Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С АБНОРМАЛЬНЫМИ И $\mathfrak{U}$–СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ

В. С. Монахов

Аннотация. Изучаются конечные группы, в которых каждая примарная подгруппа самонормализуема или $\mathfrak{U}$-субнормальна для класса $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп. В частности, такие группы обладают силовской башней.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.217

Ключевые слова: конечная группа, нильпотентная подгруппа, субнормальная подгруппа, абнормальная подгруппа.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используемая терминология соответствует [1, 2].

Подгруппа H группы G называется *абнормальной*, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$. Фаттахи [3] получил описание групп, у которых любая подгруппа субнормальна или абнормальна. В теории классов конечных групп естественным обобщением субнормальности и абнормальности являются понятия $\mathfrak{F}$-субнормальности [2, IV.5.12] и $\mathfrak{F}$-абнормальности [2, IV.5.6].

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, G — группа, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{U}$ — формации всех нильпотентных и сверхразрешимых групп соответственно. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом* группы G. Ясно, что $G^{\mathfrak{H}} \leq G^{\mathfrak{F}}$ для формаций $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, в частности, $G^{\mathfrak{U}} \leq G^{\mathfrak{N}}$.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной*, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \lessdot H_1 \lessdot \dots \lessdot H_n = G \qquad (1)$$

такая, что $H_i/\operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1} \in \mathfrak{F}$ для всех i. Это равносильно тому, что $H_i^{\mathfrak{F}} \leq \operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1}$. Здесь $\operatorname{Core}_G H = \bigcap\limits_{g \in G} H^g$ — ядро подгруппы H в группе G, а запись $H_{i-1} \lessdot H_i$ означает, что H_{i-1} — максимальная подгруппа группы H_i. Понятно, что каждая $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа $\mathfrak{H}$-субнормальна для формаций $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, в частности, каждая $\mathfrak{N}$-субнормальная подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*абнормальной*, если $L/\operatorname{Core}_L K \notin \mathfrak{F}$ для всех подгрупп K и L таких, что $H \leq K \lessdot L \leq G$. Это равносильно тому, что $L^{\mathfrak{F}}$ не содержится в $\operatorname{Core}_L K$. Поэтому каждая $\mathfrak{H}$-абнормальная подгруппа $\mathfrak{F}$-абнормальна для формаций $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, в частности, каждая $\mathfrak{U}$-абнормальная подгруппа $\mathfrak{N}$-абнормальна.

Общие свойства групп, у которых каждая подгруппа $\mathfrak{F}$-субнормальна или $\mathfrak{F}$-абнормальна, для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ исследовались в [4–7]. Полное описание строения группы, в которой каждая подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна или $\mathfrak{U}$-абнормальна, получили В. Н. Семенчук и А. Н. Скиба [8]. Они предложили [8] следующую задачу.

Задача 1. *Какое строение имеет группа, у которой каждая нильпотентная подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна или $\mathfrak{U}$-абнормальна?*

В классе всех разрешимых групп понятия абнормальности и $\mathfrak{N}$-абнормальности совпадают. Несложно проверить, что подгруппа A разрешимой группы G тогда и только тогда $\mathfrak{U}$-абнормальна, когда A абнормальна и $|L:K|$ — не простое число для всех подгрупп K и L таких, что $A \le K \lessdot L \le G$. В симметрической группе S_4 степени 4 силовская 2-подгруппа абнормальна, но не $\mathfrak{U}$-абнормальна.

В классе всех разрешимых групп понятия субнормальности и $\mathfrak{N}$-субнормальности совпадают. Понятие $\mathfrak{U}$-субнормальной подгруппы в разрешимых группах совпадает с понятием $\mathbb{P}$-субнормальной подгруппы, которое предложили А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева и В. Н. Тютянов [9].

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Подгруппа H группы G называется *$\mathbb{P}$-субнормальной*, если либо $H = G$, либо существует цепочка подгрупп (1) такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для любого i.

Группы с различными системами $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп изучались в [9–13]. В [10, задача 4] предложено описать группы, у которых любая подгруппа абнормальна или $\mathbb{P}$-субнормальна. По аналогии с задачей 1 сформулируем более общую задачу.

Задача 2. *Описать группы, у которых любая нильпотентная подгруппа абнормальна или $\mathbb{P}$-субнормальна.*

Этим двум задачам посвящена настоящая работа. В теоремах 3.6 и 4.2 получены необходимые и достаточные условия для таких групп. В частности, доказывается, что они имеют силовские башни. Проверяется также, что проблема 20 из книги Л. А. Шеметкова [14, § 17] имеет отрицательное решение.

1. Вспомогательные результаты

Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1, 2]. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G, S_n и A_n — симметрическая и знакопеременная группы степени n соответственно. Если H — подгруппа группы G, то пишем $H \le G$. Запись $H < G$ означает, что H — собственная подгруппа группы G. *Примарной* называют группу, порядок которой есть степень некоторого простого числа. G', $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ — коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно, $A \rtimes B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \le G_1 \le \cdots \le G_m = G, \tag{2}$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех $i = 0, 1, \ldots, m$. Факторгруппы G_{i+1}/G_i называются *факторами ряда* (2). Говорят, что *группа G имеет силовскую башню*, если она обладает нормальным рядом (2), факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Если

$$\pi(G) = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}, \quad p_1 > p_2 > \cdots > p_m,$$

и для каждого i фактор G_i/G_{i-1} изоморфен силовской p_i-подгруппе группы G, то говорят, что группа G *имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Сверхразрешимой* называют группу, которая обладает нормальным рядом с циклическими факторами. Каждая сверхразрешимая группа обладает силовской башней сверхразрешимого типа, знакопеременная группа A_4 степени 4 имеет силовскую башню несверхразрешимого типа.

Лемма 1.1. (1) *Группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа* $\mathbb{P}$*-субнормальна* [1, VI.9.5].

(2) *В сверхразрешимой группе любая подгруппа* $\mathbb{P}$*-субнормальна* [1, VI.9.5].

(3) *Каждая сверхразрешимая группа обладает силовской башней сверхразрешимого типа* [1, VI.9.1].

(4) *Коммутант сверхразрешимой группы нильпотентен* [1, VI.9.1].

Подгруппой Картера называют нильпотентную самонормализуемую подгруппу [1, VI.12; 2, III.4.5]. В разрешимых группах подгруппы Картера существуют и сопряжены. В неразрешимой группе подгруппы Картера может не быть, но по теореме Е. П. Вдовина [15], которая использует классификацию конечных простых групп, подгруппы Картера сопряжены в любой группе, где присутствуют.

Подгруппой Гашюца [2, III.4.21] группы G называется подгруппа K, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) K сверхразрешима;

2) если $K \leq K_1 < T \leq G$, то $|\, T : K_1 \,| \notin \mathbb{P}$.

В любой разрешимой группе подгруппы Гашюца существуют и сопряжены [2, III.4.24].

Примерами абнормальных подгрупп служат нормализаторы силовских подгрупп [1, VI.11.16], подгруппы Картера [1, VI.12.2], Гашюца [2, III.4.21] и др. Легко проверяется

Лемма 1.2. *Пусть A — абнормальная подгруппа группы G, $A \leq B \leq G$, и N — нормальная в G подгруппа. Тогда*

(1) *A абнормальна в B и $N_G(A) = A$,*

(2) *B абнормальна в G и $N_G(B) = B$,*

(3) *AN/N абнормальна в G/N.*

Лемма 1.3 [1, VI.11.17]. *Если A — подгруппа разрешимой группы G и $N_G(B) = B$ для каждой подгруппы B, содержащей A, то A абнормальна в G.*

Пример 1.1. Для неразрешимых групп утверждение леммы 1.3 неверно. В унитарной группе $\mathrm{U}_3(3)$ существует [16] неабнормальная подгруппа $U \simeq S_4$ такая, что $N_G(B) = B$ для каждой подгруппы B, содержащей U. □

Лемма 1.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, содержащая группы порядка p для всех $p \in \mathbb{P}$, и A — $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа группы G. Тогда*

(1) *если $A \leq B$, то A $\mathfrak{F}$-абнормальна в B и $B = N_G(B)$;*

(2) *если G разрешима, то A абнормальна в G.*

Доказательство. (1). Понятно, что A $\mathfrak{F}$-абнормальна в B. Предположим, что существует подгруппа K в группе G такая, что $A \leq K$ и $K \neq N_G(K)$. Пусть $K < L \leq N_G(K)$, $|L/K| \in \mathbb{P}$. По условию $L/K \in \mathfrak{F}$. Это противоречит $\mathfrak{F}$-абнормальности подгруппы A. Поэтому допущение неверно и $K = N_G(K)$ для каждой подгруппы K, содержащей A.

(2). Если G разрешима, то A абнормальна в G по лемме 1.3. □

Лемма 1.5. *Пусть A — подгруппа группы G.*

(1) *Если A абнормальна, то A $\mathfrak{N}$-абнормальна.*

(2) *Если G разрешима и A $\mathfrak{N}$-абнормальна, то A абнормальна.*

(3) *Подгруппа A $\mathfrak{N}$-абнормальна тогда и только тогда, когда $B = N_G(B)$ для каждой подгруппы B из G, содержащей A.*

Доказательство. (1) Пусть подгруппа A абнормальна. Предположим, что A не $\mathfrak{N}$-абнормальна. Тогда существуют подгруппы K и L такие, что $A \le K <\cdot L \le G$ и $L^{\mathfrak{N}} \le \operatorname{Core}_L K$. Теперь $K/\operatorname{Core}_L K$ — максимальная подгруппа нильпотентной группы $L/\operatorname{Core}_L K$. Поэтому $K = \operatorname{Core}_L K$ нормальна в L. Имеем противоречие с леммой 1.2(2). Значит, допущение неверно, и A $\mathfrak{N}$-абнормальна.

(2) Если G разрешима и A $\mathfrak{N}$-абнормальна, то по лемме 1.4(2) подгруппа A абнормальна.

(3) Если подгруппа A $\mathfrak{N}$-абнормальна, то $B = N_G(B)$ по лемме 1.4(1) для всех B таких, что $A \le B \le G$. Обратно, пусть $B = N_G(B)$ для каждой подгруппы B из G, содержащей A. Предположим, что A не $\mathfrak{N}$-абнормальна в G. Тогда существуют подгруппы K и L такие, что $A \le K <\cdot L \le G$ и $L/\operatorname{Core}_L K \in \mathfrak{N}$. Теперь $K/\operatorname{Core}_L K$ — максимальная подгруппа нильпотентной группы $L/\operatorname{Core}_L K$. Поэтому $K = \operatorname{Core}_L K$ нормальна в L и $K \ne N_G(K)$; противоречие. □

В [14, § 17] предложена

Проблема 20. *Доказать, что $\mathfrak{N}$-абнормальная подгруппа произвольной группы G является абнормальной в G.*

Сформулированная гипотеза неверна. Как следует из леммы 1.5(3) и примера 1.1, в унитарной группе $\mathrm{U}_3(3)$ неабнормальная подгруппа $U \simeq S_4$ $\mathfrak{N}$-абнормальна.

Лемма 1.6. *Пусть H — подгруппа разрешимой группы G и ее индекс $|G : H|$ — простое число. Тогда $G/\operatorname{Core}_G H$ сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть $|G : H| = p$ — простое число. Если $H = \operatorname{Core}_G H$, то G/H циклическая простого порядка p, поэтому $G/\operatorname{Core}_G H$ сверхразрешима. Пусть $H \ne \operatorname{Core}_G H$, т. е. подгруппа H не нормальна в G. Тогда $G/\operatorname{Core}_G H$ содержит максимальную подгруппу $H/\operatorname{Core}_G H$ с единичным ядром. Поэтому $G/\operatorname{Core}_G H$ примитивна и ее подгруппа Фиттинга $F/\operatorname{Core}_G H$ имеет простой порядок p. Так как

$$F/\operatorname{Core}_G H = C_{G/\operatorname{Core}_G H}(F/\operatorname{Core}_G H),$$

$(G/\operatorname{Core}_G H)/(F/\operatorname{Core}_G H)$ изоморфна циклической группе порядка, делящего $p-1$. Значит, $G/\operatorname{Core}_G H$ сверхразрешима. □

Лемма 1.7. *Пусть A — подгруппа разрешимой группы G. Тогда и только тогда A $\mathfrak{U}$-абнормальна, когда A абнормальна и $|L : K| \notin \mathbb{P}$ для всех подгрупп K и L таких, что $A \le K <\cdot L \le G$.*

Доказательство. Пусть A $\mathfrak{U}$-абнормальна. По лемме 1.4(2) подгруппа A абнормальна. Предположим, что $|L : K| \in \mathbb{P}$ для некоторых подгрупп K и L таких, что $A \le K <\cdot L \le G$. По лемме 1.6 группа $L/\operatorname{Core}_L K$ сверхразрешима, поэтому $L/\operatorname{Core}_L K \in \mathfrak{U}$; противоречие с $\mathfrak{U}$-абнормальностью подгруппы A.

Обратно, пусть $|L : K| \notin \mathbb{P}$ для всех K и L таких, что $A \le K <\cdot L \le G$. Предположим, что A не $\mathfrak{U}$-абнормальна в G. Тогда существуют подгруппы U

и V такие, что $A \leq U <\cdot V \leq G$ и $V/\operatorname{Core}_V U \in \mathfrak{U}$. Теперь $U/\operatorname{Core}_V U$ — максимальная подгруппа сверхразрешимой группы $V/\operatorname{Core}_V U$ и $|V : U| \in \mathbb{P}$ по лемме 1.1(1); противоречие. $\square$

Итак, в разрешимой группе каждая $\mathfrak{U}$-абнормальная подгруппа абнормальна. Обратное неверно.

Пример 1.2. В симметрической группе S_4 степени 4 силовская 2-подгруппа абнормальна и $\mathfrak{U}$-субнормальна, но не $\mathfrak{U}$-абнормальна. $\square$

Замечание 1.1. Из леммы 1.7 следует, что в разрешимой несверхразрешимой группе подгруппа Гашюца — это в точности сверхразрешимая $\mathfrak{U}$-абнормальная подгруппа.

Запись $H \ \mathbb{P}sn \ G$ означает, что подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в группе G. Свойства $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп перечислены в [9, 11].

Лемма 1.8 [11, лемма 3]. *Пусть H — подгруппа группы G, N — нормальная в G подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения:*
(1) *если $H \ \mathbb{P}sn \ G$, то $(H \cap N) \ \mathbb{P}sn \ N$ и $HN/N \ \mathbb{P}sn \ G/N$;*
(2) *если $N \leq H$ и $H/N \ \mathbb{P}sn \ G/N$, то $H \ \mathbb{P}sn \ G$;*
(3) *если $H \ \mathbb{P}sn \ K$, $K \ \mathbb{P}sn \ G$, то $H \ \mathbb{P}sn \ G$.*

Лемма 1.9 [11, лемма 4]. *Пусть G — разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*
(1) *если $H \ \mathbb{P}sn \ G$, K — подгруппа из G, то $(H \cap K) \ \mathbb{P}sn \ K$;*
(2) *если $H_i \ \mathbb{P}sn \ G$, $i = 1, 2$, то $(H_1 \cap H_2) \ \mathbb{P}sn \ G$;*
(3) *если T — субнормальная в G подгруппа, то $T \ \mathbb{P}sn \ G$.*

Лемма 1.10. *Пусть $G = AB$ и A — нормальная в G подгруппа. Если H — $\mathbb{P}$-субнормальная в B подгруппа, то AH $\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

Доказательство. Так как подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в B, существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = B, \quad |H_{i+1} : H_i| \in \mathbb{P}, \quad i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Цепочка подгрупп

$$AH = AH_0 \leq AH_1 \leq \cdots \leq AH_{n-1} \leq AH_n = AB,$$
$$|AH_{i+1} : AH_i| = \frac{|A||H_{i+1}||A \cap H_i|}{|A \cap H_{i+1}||A||H_i|} = \frac{|H_{i+1} : H_i|}{|A \cap H_{i+1} : A \cap H_i|} \in \mathbb{P} \cup \{1\},$$
$$i \in \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

показывает, что AH $\mathbb{P}$-субнормальна в G. $\square$

Лемма 1.11. *Пусть H — подгруппа группы G. Тогда*
(1) *если H $\mathfrak{N}$-субнормальна, то H субнормальна;*
(2) *если H — субнормальная подгруппа разрешимой группы G, то H $\mathfrak{N}$-субнормальна.*

Доказательство. (1) Пусть H $\mathfrak{N}$-субнормальна. Тогда существует цепочка (1) такая, что $H_i/\operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1} \in \mathfrak{N}$ для всех i. Так как $H_{i-1}/\operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1}$ — максимальная подгруппа нильпотентной группы $H_i/\operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1}$, подгруппа $H_{i-1} = \operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1}$ нормальна в H_i и H субнормальна.

(2) Пусть H — субнормальная подгруппа группы G. Тогда H является членом некоторого композиционного ряда группы G. Если G разрешима, то

композиционные факторы имеют простые порядки. Значит, существует цепочка (1) такая, что H_{i-1} нормальна в H_i для всех i и $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$. Поэтому $H_i/H_{i-1} \in \mathfrak{N}$ для всех i и подгруппа H $\mathfrak{N}$-субнормальна. $\square$

Пример 1.3. В простой группе A_5 единичная подгруппа субнормальна, но не $\mathfrak{N}$-субнормальна. $\square$

Лемма 1.12. *Пусть H — подгруппа группы G. Тогда*

(1) *если H $\mathfrak{U}$-субнормальна, то H $\mathbb{P}$-субнормальна;*

(2) *если H — $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа разрешимой группы G, то H $\mathfrak{U}$-субнормальна.*

Доказательство. (1) Пусть H $\mathfrak{U}$-субнормальна. Тогда существует цепочка (1) такая, что $H_i/\operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1} \in \mathfrak{U}$ для всех i. Так как $H_{i-1}/\operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1}$ — максимальная подгруппа сверхразрешимой группы $H_i/\operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1}$, то

$$|H_i : H_{i-1}| = |H_i/\operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1} : H_{i-1}/\operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1}| \in \mathbb{P}$$

по лемме 1.1(1). Поэтому H $\mathbb{P}$-субнормальна.

(2) Пусть H $\mathbb{P}$-субнормальна. Тогда существует цепочка (1) такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{P}$ для всех i. Если группа G разрешима, то по лемме 1.6 подгруппа $H_i/\operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1}$ сверхразрешима. Поэтому $H_i/\operatorname{Core}_{H_i} H_{i-1} \in \mathfrak{U}$ для всех i и подгруппа H $\mathfrak{U}$-субнормальна в группе G. $\square$

Пример 1.4. В простой группе A_5 подгруппа A_4 $\mathbb{P}$-субнормальна, но не является $\mathfrak{U}$-субнормальной. $\square$

2. Группы, в которых некоторые подгруппы сверхразрешимы

Свойства минимальных несверхразрешимых групп получены в [17–19].

Лемма 2.1. *Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа, $P = G^{\mathfrak{U}}$, T — дополнение к P в группе G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *группа G имеет силовскую башню и $|\pi(G)| \leq 3$* [17, теорема 22]*;*

(2) *P — силовская p-подгруппа группы G, а $P/\Phi(P)$ является минимальной нормальной подгруппой в $G/\Phi(P)$ порядка $> p$* [18, теорема 1(a)]*;*

(3) *$\Phi(P) \rtimes T$ — подгруппа Гашюца;*

(4) *если $|\pi(G)| = 2$, то $P = G^{\mathfrak{N}}$ и $C_P(T) \times T$ — подгруппа Картера, $C_P(T) \leq \Phi(P)$;*

(5) *если $|\pi(G)| = 3$, то $T = Q \rtimes R$ ненильпотентна, где Q и R — циклические силовские q- и r-подгруппы соответственно, $p > q > r$, $P = G^{\mathfrak{U}} < G^{\mathfrak{N}} = G' = P \rtimes Q$, $R \leq K \leq R \times C_{P \rtimes Q}(R)$ для некоторой подгруппы Картера K группы G;*

(6) *$T/T \cap \Phi(G)$ либо примарная циклическая группа, либо минимальная неабелева группа* [18, теорема 2(b)].

Доказательство. (3) Из утверждения (2) следует, что $\Phi(P)T$ — максимальная в G подгруппа, $|G : \Phi(P)T| = |P/\Phi(P)| > p$. Поэтому $\Phi(P)T$ — подгруппа Гашюца.

(4) Пусть $|\pi(G)| = 2$. Тогда T — силовская подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{N}} \leq P = G^{\mathfrak{U}}$. Поскольку $G^{\mathfrak{U}} \leq G^{\mathfrak{N}}$, то $G^{\mathfrak{N}} = P$. Понятно, что $C_P(T)T = C_P(T) \times T$ — нильпотентная подгруппа. Предположим, что $C_P(T)T < N_G(C_P(T)T)$. Тогда T нормальна в $N_G(C_P(T)T)$ и подгруппа $N_G(C_P(T)T)$ p-замкнута. Поэтому силовская p-подгруппа P_1 из $N_G(C_P(T)T)$ нормальна в $N_G(C_P(T)T)$ и $P_1 \leq C_P(T)$; противоречие. Следовательно, $C_P(T)T$ — подгруппа Картера. Так как

$C_P(T)\Phi(P)$ — подгруппа, нормализуемая подгруппой T, то $C_P(T)\Phi(P)T < G$ и $C_P(T) \leq \Phi(P)$.

(5) Пусть $|\pi(G)| = 3$. Согласно [17, теорема 22] группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, поэтому $T = Q \rtimes R$, Q и R — силовские q- и r-подгруппы соответственно, $p > q > r$. Из [19] следует, что T ненильпотентна, а Q и R циклические. Понятно, что $P = G^{\mathfrak{U}} \leq G^{\mathfrak{N}} \leq P \rtimes Q$. Если предположить, что $G^{\mathfrak{N}} < PQ$, то $RG^{\mathfrak{N}}$ нормальна в G и $N_G(R)G^{\mathfrak{N}} = G$ по лемме Фраттини. Теперь $Q \leq N_G(R)$ и T нильпотентна; противоречие. Поэтому $P = G^{\mathfrak{U}} < G^{\mathfrak{N}} = P \rtimes Q$. Из $G^{\mathfrak{N}} \leq G'$ получаем равенство $G^{\mathfrak{N}} = G'$. Пусть K — подгруппа Картера. Поскольку K является $\mathfrak{N}$-проектором группы G, то $G = KG^{\mathfrak{N}}$ и подгруппу K можно выбрать так, что $R \leq K$. Так как K нильпотентна, r'-холлова подгруппа из K централизует R, поэтому $K \leq R \times C_{PQ}(R)$. □

В следующей лемме сохранены обозначения леммы 2.1.

Лемма 2.2. *Пусть $G = P \rtimes T$ — минимальная несверхразрешимая группа, $P = G^{\mathfrak{U}}$ и $1 \neq V < G$. Тогда*

(1) *если $|T|$ не делит $|V|$, то V $\mathfrak{U}$-субнормальна в G;*

(2) *если $|V| = |\Phi(P)T|$, то V $\mathfrak{U}$-абнормальна в G;*

(3) *если $|T|$ делит $|V|$ и $|V| \neq |\Phi(P)T|$, то V не $\mathfrak{U}$-субнормальна в G и V не $\mathfrak{U}$-абнормальна в G;*

(4) *тогда и только тогда каждая примарная подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна в G или $\mathfrak{U}$-абнормальна в G, когда $|\pi(T)| = 2$ или $|\pi(T)| = 1$ и $\Phi(P) = 1$.*

Доказательство. Так как G/P сверхразрешима, PV/P $\mathfrak{U}$-субнормальна в G/P по лемме 1.1(2) и PV $\mathfrak{U}$-субнормальна в G по лемме 1.8(2).

Пусть $|T|$ не делит $|V|$. Тогда $PV \neq G$, PV сверхразрешима, V $\mathfrak{U}$-субнормальна в PV по лемме 1.1(2) и V $\mathfrak{U}$-субнормальна в G по лемме 1.8(3).

Пусть $|T|$ делит $|V|$. Тогда $T^g \leq V$ для некоторого $g \in G$ и $PV = G$. Из леммы 2.1(2) следует, что в G нет подгрупп индекса p, поэтому V не $\mathfrak{U}$-субнормальна в G. Поскольку $\Phi(P) \leq \Phi(G)$, то $\Phi(P)V \neq G$ и $\Phi(P)T^g = \Phi(P)V$ — подгруппа Гашюца по лемме 2.1(3). Если $|V| = |\Phi(P)T|$, то V — подгруппа Гашюца и V $\mathfrak{U}$-абнормальна в G. Пусть $|V| \neq |\Phi(P)T|$. Тогда $V < \Phi(P)V$ и V не $\mathfrak{U}$-абнормальна в G по лемме 1.7. Утверждения (1)–(3) доказаны.

Докажем утверждение (4). Пусть каждая примарная подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна в G или $\mathfrak{U}$-абнормальна в G. Тогда для примарной подгруппы V случай 3 исключается. Значит, $|\pi(T)| = 2$ или $|\pi(T)| = 1$ и $\Phi(P) = 1$. Обратно, если $|\pi(T)| = 2$ или $|\pi(T)| = 1$ и $\Phi(P) = 1$, то каждая примарная подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна в G или $\mathfrak{U}$-абнормальна в G. □

Нам потребуются классы групп, изученные в [9, 11–13].

Класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ состоит из всех групп с $\mathbb{P}$-субнормальными примарными подгруппами, а $\mathfrak{X}$ состоит из всех групп, у которых каждая примарная циклическая подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна. Понятно, что $\mathfrak{U} \subset \mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$.

Лемма 2.3. (1) *Класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ является насыщенной наследственной формацией* [9, 2.7].

(2) *Группа G принадлежит $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и каждая бипримарная подгруппа из G сверхразрешима* [11, теорема B].

(3) *Метанильпотентные группы из $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ сверхразрешимы* [9, 2.13].

(4) *Минимальная не $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-группа является бипримарной минимальной несверхразрешимой группой* [9, 2.9].

Лемма 2.4 [11, теорема B]. (1) *Класс $\mathfrak{X}$ является наследственной насыщенной формацией.*

(2) *Группа G принадлежит $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и каждая бипримарная подгруппа из G с циклической силовской подгруппой сверхразрешима.*

(3) *Минимальная не $\mathfrak{X}$-группа является бипримарной минимальной несверхразрешимой группой, в которой ненормальная силовская подгруппа циклическая.*

Брандл [20] ввел класс $\mathfrak{B}$ групп, удовлетворяющих тождествам $\ddot{u}_k(x, y) = 1$, где

$$\ddot{u}_1(x, y) = [x, y], \quad \ddot{u}_{k+1}(x, y) = \ddot{u}_k(x, y)^{-k}[\ddot{u}_k(x, y), y] \text{ при } k > 1.$$

Лемма 2.5 [21, теорема 1]. (1) *Класс $\mathfrak{B}$ является наследственной насыщенной формацией.*

(2) *Группа G принадлежит $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда каждая подгруппа с нильпотентным коммутантом сверхразрешима.*

В. И. Мурашко [12] заметил, что класс $\mathfrak{X}$ совпадает с классом $\mathfrak{B}$. Следующая теорема характеризует классы $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{X}$ сверхразрешимостью некоторых подгрупп.

Теорема 2.6. (1) *Группа G принадлежит $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда каждая подгруппа с нильпотентным коммутантом сверхразрешима.*

(2) *Группа G принадлежит $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда каждая метанильпотентная подгруппа сверхразрешима.*

Доказательство. (1) Фактически надо доказать, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{B}$. В [12] это равенство доказано с помощью экранов локальных формацией. Дадим прямое доказательство.

Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{X}$. Поскольку $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{X}$ — насыщенные наследственные формации, G — минимальная не $\mathfrak{X}$-группа. Согласно лемме 2.4(3) группа G является бипримарной минимальной несверхразрешимой группой с циклической ненормальной силовской подгруппой. По лемме 2.1 коммутант группы G нильпотентен. Так как $G \in \mathfrak{B}$, то G сверхразрешима по лемме 2.5(2). Поэтому $G \in \mathfrak{X}$; противоречие с выбором. Значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{X}$.

Проверим обратное включение. Пусть группа G минимального порядка из $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{B}$. Поскольку $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{B}$ — насыщенные наследственные формации, $\Phi(G) = 1$ и G — примитивная группа: $G = [N]M$, $N = F(G) = C_G(N)$ — единственная минимальная нормальная в G подгруппа, M — максимальная подгруппа. Так как $G \notin \mathfrak{B}$, группа G по лемме 2.5(2) содержит несверхразрешимую подгруппу H с нильпотентным коммутантом. Выберем H минимального порядка. Понятно, что H — минимальная несверхразрешимая группа. Если $H \neq G$, то $H \in \mathfrak{B}$ по выбору G. Теперь H сверхразрешима; противоречие. Следовательно, $H = G$. Тем самым $G' = N$ и M абелева. По [1, I.10.5] группа M циклическая, а так как G — минимальная несверхразрешимая группа, M примарная по лемме 2.1. Стало быть, M $\mathbb{P}$-субнормальна в G, поэтому $|N|$ — простое число и G сверхразрешима; противоречие. Значит, $\mathfrak{B} = \mathfrak{X}$.

(2) Если $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, то каждая метанильпотентная подгруппа сверхразрешима по лемме 2.3(3).

Обратно, пусть в группе G каждая метанильпотентная подгруппа сверхразрешима. Тогда в G каждая подгруппа с нильпотентным коммутантом сверхразрешима. По утверждению 1 доказываемой теоремы $G \in \mathfrak{X}$. Пусть $G \in \mathfrak{X} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{U}$, группа G имеет минимальный порядок. Тогда G — минимальная не $\mathrm{w}\mathfrak{U}$-группа и по лемме 2.3(4) группа G является бипримарной минимальной несверхразрешимой группой. Поэтому G метанильпотентна по лемме 2.1. Но теперь G сверхразрешима; противоречие. $\square$

Следствие 2.6.1 [13]. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{X}$ и G имеет нильпотентный коммутант.*

Доказательство. В сверхразрешимой группе по лемме 1.1(4) коммутант нильпотентен и все подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны по лемме 1.1(2). Обратно, пусть $G \in \mathfrak{X}$ и G' нильпотентна. Так как $\mathfrak{X} = \mathfrak{B}$ по теореме 2.6(1), $G \in \mathfrak{B}$ и G сверхразрешима, поскольку G' нильпотентна. $\square$

Следуя [9], *обобщенным коммутантом* группы G будем называть наименьшую нормальную подгруппу K группы G такую, что G/K имеет абелевы силовские подгруппы. Пусть $s\mathfrak{A}$ — формация всех групп с абелевыми силовскими подгруппами. Обобщенный коммутант группы G является ее $s\mathfrak{A}$-корадикалом. Понятно, что $G^{s\mathfrak{A}}$ порождается коммутантами всех силовских подгрупп группы G.

Следствие 2.6.2 [13]. *Группа G принадлежит $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда она принадлежит $\mathfrak{X}$ и имеет нильпотентный обобщенный коммутант.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Так как $\mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X}$, то $G \in \mathfrak{X}$. Согласно [9, 2.13] подгруппа $G^{s\mathfrak{A}}$ нильпотентна.

Обратно, пусть $G \in \mathfrak{X}$ и $G^{s\mathfrak{A}}$ нильпотентна. Предположим, что группа G минимального порядка из разности $\mathfrak{X} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{U}$. По лемме 2.3(1),(4) $\Phi(G) = 1$ и G является бипримарной минимальной несверхразрешимой группой, $G = [P]Q$, $P = G^{\mathfrak{U}}$, и $Q' \le G^{s\mathfrak{A}}$. Пусть Q_1 — силовская подгруппа из $G^{s\mathfrak{A}}$, $Q' \le Q_1 \le Q$. По условию $G^{s\mathfrak{A}}$ нильпотентна, поэтому Q_1 нормальна в G и $Q' \le C_Q(P) \le \Phi(G) = 1$. Значит, Q абелева, и $G' = P$. Так как $G \in \mathfrak{X} = \mathfrak{B}$, то G сверхразрешима; противоречие. $\square$

Лемма 2.7. *Если в группе G все примарные подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны, то все нильпотентные подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны. В частности, если $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U} \setminus \mathfrak{N}$, то подгруппа Картера $\mathbb{P}$-субнормальна и отлична от подгруппы Гашюца.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. По условию $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. По лемме 2.3(1) класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ является насыщенной наследственной формацией. Пусть H — нильпотентная подгруппа и N — минимальная нормальная подгруппа. Тогда по индукции HN/N $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N, а по лемме 1.8(2) подгруппа HN $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Если $HN < G$, то по индукции H $\mathbb{P}$-субнормальна в HN и H $\mathbb{P}$-субнормальна в G по лемме 1.8(3). Если $HN = G$, то G метанильпотентна и G сверхразрешима по теореме 2.6(2). По лемме 1.1(2) подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в G.

Пусть $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U} \setminus \mathfrak{N}$. Так как подгруппа Картера нильпотентна, она $\mathbb{P}$-субнормальна в G и отлична от G. Подгруппа Гашюца $\mathfrak{U}$-абнормальна в G, поэтому она отлична от подгруппы Картера. $\square$

3. Группы с $\mathbb{P}$-субнормальными и самонормализуемыми подгруппами

Зафиксируем $r \in \mathbb{P}$. Через $\mathfrak{Y}_r$ обозначим класс всех групп G, в которых

1) каждая циклическая r-подгруппа самонормализуема или $\mathbb{P}$-субнормальна в группе G;

2) для любого $p \in \pi(G) \setminus \{r\}$ все циклические p-подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны в группе G.

Пусть $\mathfrak{Y}$ — класс групп, в которых каждая примарная циклическая подгруппа самонормализуема или $\mathbb{P}$-субнормальна. Понятно, что

$$\mathfrak{U} \subset \mathrm{w}\mathfrak{U} \subset \mathfrak{X} \subset \mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{Y}_r \subset \mathfrak{Y}, \quad r \in \mathbb{P}.$$

Лемма 3.1. *Если $G \in \mathfrak{Y}$, то G имеет силовскую башню.*

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{X}$, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа по лемме 2.4(2). Пусть $G \in \mathfrak{Y} \setminus \mathfrak{X}$, G — группа наименьшего порядка. Тогда существует примарная циклическая подгруппа P не $\mathbb{P}$-субнормальная в G. По условию P самонормализуема. Поэтому P — силовская подгруппа группы G и существует [1, IV.2.6] нормальное дополнение K к P в группе G. По лемме 1.8(1) $K \in \mathfrak{Y}$. По выбору группы G подгруппа K входит в $\mathfrak{X}$. Согласно лемме 2.4(2) подгруппа K имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Значит, группа G имеет силовскую башню. $\square$

Лемма 3.2. (1) *Для любого $r \in \mathbb{P}$ класс $\mathfrak{Y}_r$ — наследственный гомоморф.*

(2) $\mathfrak{Y} = \bigcup\limits_{r\in\mathbb{P}} \mathfrak{Y}_r$.

(3) $\mathfrak{X} = \bigcap\limits_{r\in\mathbb{P}} \mathfrak{Y}_r$.

Доказательство. (1) Пусть $H \leq G \in \mathfrak{Y}_r$ и X — циклическая примарная подгруппа из H. Если $N_G(X) = X$, то $N_H(X) = X$. Если X $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то подгруппа X $\mathbb{P}$-субнормальна в H по лемме 1.9(1), поскольку группа G разрешима по лемме 3.1. Поэтому $\mathfrak{Y}_r$ — наследственный класс. Пусть N — нормальная в G подгруппа, A/N — циклическая t-подгруппа из G/N, $t \in \pi(G)$, и $a \in A \setminus N$. Пусть T — силовская t-подгруппа из $\langle a\rangle$. По условию подгруппа T либо $\mathbb{P}$-субнормальна в G, либо $N_G(T) = T$. Если T $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то $TN/N = AN/N$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N по лемме 1.8(2). Если $N_G(T) = T$, то T — силовская t-подгруппа группы G, поэтому

$$N_{G/N}(TN/N) = N_G(T)N/N = TN/N.$$

Так как $TN/N = AN/N$, то $N_{G/N}(A/N) = A/N$. Следовательно, $G/N \in \mathfrak{Y}_r$ и $\mathfrak{Y}_r$ — наследственный гомоморф.

(2) Понятно, что $\bigcup\limits_{r\in\mathbb{P}} \mathfrak{Y}_r \subseteq \mathfrak{Y}$. Пусть $G \in \mathfrak{Y}$, Q и R — циклические q- и r-подгруппы, не $\mathbb{P}$-субнормальные в G. Тогда они самонормализуемы и являются подгруппами Картера группы. Значит, $q = r$ и $G \in \mathfrak{Y}_r$. Следовательно, $\mathfrak{Y} = \bigcup\limits_{r\in\mathbb{P}} \mathfrak{Y}_r$.

(3) Понятно, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}_r$ для каждого $r \in \mathbb{P}$. Если $q \neq r$, то в классе $\mathfrak{Y}_q \cap \mathfrak{Y}_r$ все циклические примарные подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны, поэтому $\mathfrak{Y}_q \cap \mathfrak{Y}_r = \mathfrak{X}$. Следовательно, $\mathfrak{X} = \bigcap\limits_{r\in\mathbb{P}} \mathfrak{Y}_r$. $\square$

Пример 3.1. Знакопеременная группа A_4 принадлежит $\mathfrak{Y}_3 \setminus \mathfrak{X}$. Кроме того, $A_4 \times A_4 \notin \mathfrak{Y}_3$. Поэтому классы $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}_r$ не являются формациями и классами Фиттинга. $\square$

Пример 3.2. В группе $G = \mathrm{SL}(2,3)$ силовская 2-подгруппа Q нормальна и является группой кватернионов порядка 8. Силовская 3-подгруппа R имеет порядок 3 и $N_G(R) = R \times I$, $I = \Phi(G)$ — подгруппа порядка 2. Фактор-группа $G/\Phi(G) \simeq A_4$ входит в $\mathfrak{Y}_3$. Так как R не самонормализуема и не $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то $G \notin \mathfrak{Y}_3$. Поэтому $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}_r$ не являются насыщенными классами. $\square$

Лемма 3.3. (1) *Если в группе G каждая нильпотентная подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна или $\mathfrak{U}$-абнормальна, то $G \in \mathfrak{Y}$.*

(2) *Если в группе G каждая нильпотентная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна или абнормальна, то $G \in \mathfrak{Y}$.*

Доказательство. (1) Пусть в группе G каждая нильпотентная подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна или $\mathfrak{U}$-абнормальна. Используя леммы 1.12(1) и 1.4(1), получаем, что $G \in \mathfrak{Y}$.

(2) Пусть в группе G каждая нильпотентная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна или абнормальна. Согласно лемме 1.2(1) абнормальная подгруппа самонормализуема, поэтому $G \in \mathfrak{Y}$. $\square$

Теорема 3.4. *Пусть $G \notin \mathfrak{X}$. В группе G каждая примарная циклическая подгруппа самонормализуема или $\mathbb{P}$-субнормальна тогда и только тогда, когда*

(1) *подгруппа Картера является не $\mathbb{P}$-субнормальной в G циклической силовской p-подгруппой $P = \langle x \rangle$ для некоторого $p \in \pi(G)$;*

(2) *$G^{\mathfrak{N}} = G'$ — p'-холлова подгруппа группы G;*

(3) *$\langle x^p \rangle \ltimes G^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть $G \notin \mathfrak{X}$ и в G каждая примарная циклическая подгруппа самонормализуема или $\mathbb{P}$-субнормальна. По лемме 3.1 группа G имеет силовскую башню.

Поскольку G не принадлежит $\mathfrak{X}$, существует циклическая p-подгруппа P для некоторого $p \in \pi(G)$, не $\mathbb{P}$-субнормальная в G. По условию $P = N_G(P)$, поэтому P силовская в G и является подгруппой Картера группы G.

По [1, IV.2.6] существует нормальное дополнение K к P в G. Понятно, что K является p'-холловой подгруппой группы G и $G^{\mathfrak{N}} \leq K$. Так как $G/G^{\mathfrak{N}}$ — нильпотентная группа и $PG^{\mathfrak{N}}/G^{\mathfrak{N}}$ — силовская подгруппа, $PG^{\mathfrak{N}}$ нормальна в G и по лемме Фраттини

$$G = N_G(P)(PG^{\mathfrak{N}}) = PG^{\mathfrak{N}} = K \rtimes P, \quad K = G^{\mathfrak{N}}.$$

Пусть Q — циклическая q-подгруппа, $q \neq p$. Если Q не $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то по условию $N_G(Q) = Q$. По теореме Картера подгруппы P и Q сопряжены, что невозможно. Поэтому каждая примарная циклическая p'-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна в G. По лемме 1.9(1) $K \in \mathfrak{X}$.

Так как $R = \langle x^p \rangle$ не самонормализуема, R $\mathbb{P}$-субнормальна в G. По лемме 1.10 подгруппа RK $\mathbb{P}$-субнормальна в G, а по лемме 1.9(1) подгруппа R $\mathbb{P}$-субнормальна в RK. Теперь $RK \in \mathfrak{X}$. Из теоремы 2.6(1) следует, что в $RK = \langle x^p \rangle G^{\mathfrak{N}}$ все подгруппы с нильпотентным коммутантом сверхразрешимы.

Обратно, пусть для группы G выполняются утверждения 1–3 и $G \notin \mathfrak{X}$. Пусть X — произвольная циклическая q-подгруппа из G, $K = G^{\mathfrak{N}}$. Если $q \in \pi(K)$, то $X \leq K$ и X $\mathbb{P}$-субнормальна в K, поскольку $K \in \mathfrak{X}$ по теореме 2.6(1). Подгруппа K $\mathbb{P}$-субнормальна в G по лемме 1.9(3). Теперь X $\mathbb{P}$-субнормальна в G по лемме 1.8(3). Пусть $q \notin \pi(K)$. Тогда $q = p$. Если $|P| = |X|$, то X — подгруппа Картера и $X = N_G(X)$. Если $|P| \neq |X|$, то $X^g < P$ для некоторого $g \in G$ и $X^g \leq \langle x^p \rangle$. По условию 3 доказываемой теоремы и лемме 2.4(1) $KX^g \in \mathfrak{X}$, поэтому X^g $\mathbb{P}$-субнормальна в KX^g. Так как X^g $\mathbb{P}$-субнормальна в P, то KX^g $\mathbb{P}$-субнормальна в G по лемме 1.10. Теперь X $\mathbb{P}$-субнормальна в G по лемме 1.8(3). $\square$

Замечание 3.1. Согласно лемме 2.4(1) включение $\langle x^p \rangle G^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{X}$ равносильно тому, что каждая подгруппа из $\langle x^p \rangle G^{\mathfrak{N}}$ с нильпотентным коммутантом сверхразрешима.

Теорема 3.5. *Пусть $G \in \mathfrak{X} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{U}$. В группе G каждая примарная подгруппа самонормализуема или $\mathbb{P}$-субнормальна тогда и только тогда, когда*

(1) *подгруппа Картера является не $\mathbb{P}$-субнормальной нециклической силовской p-подгруппой P для наименьшего $p \in \pi(G)$;*

(2) *$G^{\mathfrak{N}}$ — p'-холлова подгруппа группы G;*

(3) *$G^{\mathfrak{N}} \rtimes R \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ для всех $R < P$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{X} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и в G каждая примарная подгруппа самонормализуема или $\mathbb{P}$-субнормальна. Поскольку G не принадлежит $\mathrm{w}\mathfrak{U}$, существует p-подгруппа P для некоторого $p \in \pi(G)$, не $\mathbb{P}$-субнормальная в G. По условию $P = N_G(P)$, поэтому P силовская в G и является подгруппой Картера группы G. Так как $G \in \mathfrak{X}$, то P нециклическая. По лемме 2.4(2) группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, поэтому p наименьшее в $\pi(G)$, существует нормальная p'-холлова подгруппа K и $G^{\mathfrak{N}} \leq K$. В силу того, что $G/G^{\mathfrak{N}}$ — нильпотентная группа и $PG^{\mathfrak{N}}/G^{\mathfrak{N}}$ — силовская подгруппа, $PG^{\mathfrak{N}}$ нормальна в G и по лемме Фраттини

$$G = N_G(P)(PG^{\mathfrak{N}}) = PG^{\mathfrak{N}} = K \rtimes P, \quad K = G^{\mathfrak{N}}.$$

Пусть Q — q-подгруппа, $q \neq p$. Если Q не $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то по условию $N_G(Q) = Q$. По теореме Картера подгруппы P и Q сопряжены, что невозможно. Поэтому каждая примарная p'-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна в G. По лемме 1.9(1) подгруппа $K \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

Пусть $R < P$. Тогда R не самонормализуема и R $\mathbb{P}$-субнормальна в G. По лемме 1.10 подгруппа $KR = K \rtimes R$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G, а по лемме 1.9(1) подгруппа R $\mathbb{P}$-субнормальна в RK. Теперь $KR = G^{\mathfrak{N}} \rtimes R \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

Обратно, пусть для группы G выполняются утверждения 1–3 и $G \in \mathfrak{X} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Пусть X — произвольная q-подгруппа из G, $K = G^{\mathfrak{N}}$. Если $q \in \pi(K)$, то $X \leq K$ и X $\mathbb{P}$-субнормальна в K, поскольку $K \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Подгруппа K $\mathbb{P}$-субнормальна в G по лемме 1.9(3). Теперь X $\mathbb{P}$-субнормальна в G по лемме 1.8(3). Пусть $q \notin \pi(K)$. Тогда $q = p$. Если $|P| = |X|$, то X — подгруппа Картера и $X = N_G(X)$. Если $|P| \neq |X|$, то $X^g < P$ для некоторого $g \in G$. По условию 3 подгруппа $KX^g \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, поэтому X^g $\mathbb{P}$-субнормальна в KX^g. Так как X^g $\mathbb{P}$-субнормальна в P, то KX^g $\mathbb{P}$-субнормальна в G по лемме 1.10. Теперь X $\mathbb{P}$-субнормальна в G по лемме 1.8(3). □

Замечание 3.2. Согласно утверждению (2) теоремы 2.6 включение $G^{\mathfrak{N}}R \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ равносильно тому, что каждая метанильпотентная подгруппа из $G^{\mathfrak{N}}R$ сверхразрешима.

По лемме 3.3 класс $\mathfrak{Y}$ охватывает все группы, предложенные к описанию в задаче 2. Поэтому из теорем 3.4 и 3.5 вытекает

Теорема 3.6. *В группе G каждая примарная подгруппа абнормальна или $\mathbb{P}$-субнормальна тогда и только тогда, когда либо $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, либо справедливо одно из двух утверждений:*

(1) *группа G не принадлежит $\mathfrak{X}$, подгруппа Картера $P = \langle x \rangle$ является циклической силовской p-подгруппой для некоторого $p \in \pi(G)$, $G^{\mathfrak{N}} = G'$ — p'-холлова подгруппа группы G и $\langle x^p \rangle G^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{X}$;*

(2) *группа G принадлежит $\mathfrak{X} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{U}$, подгруппа Картера P является нециклической силовской p-подгруппой для наименьшего $p \in \pi(G)$, $G^{\mathfrak{N}}$ — p'-холлова подгруппа группы G и $RG^{\mathfrak{N}} \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ для всех $R < P$.*

Следствие 3.6.1. *В группе G каждая примарная подгруппа абнормальна или $\mathbb{P}$-субнормальна тогда и только тогда, когда в G каждая нильпотентная подгруппа абнормальна или $\mathbb{P}$-субнормальна.*

Доказательство. Пусть в группе G каждая примарная подгруппа абнормальна или $\mathbb{P}$-субнормальна и V — нильпотентная подгруппа. Если $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, то по лемме 2.7 подгруппа V $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Пусть $G \notin \mathrm{w}\mathfrak{U}$, тогда выполняются утверждения (1), (2) теоремы 3.6. Если $|P|$ делит $|V|$, то $P^g \leq V$, $g \in G$, и подгруппа V абнормальна в G, поскольку P — подгруппа Картера. Если $|P|$ не делит $|V|$, то $VG^{\mathfrak{N}} < G$, поэтому подгруппа $VG^{\mathfrak{N}}$ субнормальна в G и по лемме 1.9(3) она $\mathbb{P}$-субнормальна в G. По лемме 1.2(2) в $VG^{\mathfrak{N}}$ нет абнормальных в G подгрупп. Поэтому каждая примарная подгруппа из $VG^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$-субнормальна в G. По лемме 1.9(1) подгруппа $VG^{\mathfrak{N}}$ принадлежит $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ и V $\mathbb{P}$-субнормальна в $VG^{\mathfrak{N}}$ по лемме 2.7. По лемме 1.8(3) подгруппа V $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Обратное очевидно. $\square$

Таким образом, теорема 3.6 описывает группы из задачи 2.

4. Группы с $\mathfrak{U}$-субнормальными и $\mathfrak{U}$-абнормальными нильпотентными подгруппами

Пример 4.1. Группа автоморфизмов экстраспециальной группы $P = \langle a, b\rangle$ порядка 7^3 имеет подгруппу, изоморфную симметрической группе S_3. Полупрямое произведение $G = [P]S_3$ является минимальной несверхразрешимой группой, в которой

$$\Phi(G) = \Phi(P) = \langle [a, b]\rangle, \quad N_G(S_3) = S_3.$$

Поэтому $H = \Phi(G) \rtimes S_3$ ненильпотентна и является по лемме 2.1 подгруппой Гашюца группы G. По лемме 2.2 все подгруппы, за исключением сопряженных с H и S_3, $\mathbb{P}$-субнормальны в G. Подгруппа H $\mathfrak{U}$-абнормальна в G. Подгруппа S_3 самонормализуема и не $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Так как $|H : S_3| = 7$, то S_3 не $\mathfrak{U}$-абнормальна в G. $\square$

Этот пример показывает, что класс групп, у которых все подгруппы самонормализуемы или $\mathbb{P}$-субнормальны, шире класса групп, изученного в следующей теореме.

Теорема 4.1 [8, теорема A]. *Пусть в группе G все подгруппы $\mathfrak{U}$-абнормальны или $\mathfrak{U}$-субнормальны и $D = G^{\mathfrak{U}}$ — сверхразрешимый корадикал. Тогда $G = D \rtimes H$, где*

(i) *H — холлова подгруппа группы G и H — подгруппа Гашюца группы G. Поэтому если H нильпотентна, то H является подгруппой Картера группы G.*

(ii) *Каждый главный фактор группы G, содержащейся в D, нециклический. Поэтому H — сверхразрешимый нормализатор группы G.*

(iii) *$|G : DG'|$ — примарное число.*

(iv) *Если H — нециклическая группа порядка p^n, $p \in \mathbb{P}$, $n > 1$, то D нильпотентна.*

(v) *$H\Phi(G)/\Phi(G)$ либо группа Миллера — Морено, либо абелева примарная группа.*

(vi) *Каждая собственная подгруппа в G, содержащая D, сверхразрешима.*

Обратно, в каждой группе, обладающей перечисленными выше свойствами, все подгруппы $\mathfrak{U}$-абнормальны или $\mathfrak{U}$-субнормальны.

Согласно лемме 3.3(1) класс $\mathfrak{Y}$ охватывает все группы, предложенные для описания в первой задаче из введения. По лемме 3.1 группы из класса $\mathfrak{Y}$

разрешимы, а по лемме 1.12 в этом классе понятия $\mathfrak{U}$-субнормальности и $\mathbb{P}$-субнормальности совпадают. По лемме 2.4 в каждой группе из класса $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ все нильпотентные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны. Поэтому класс всех групп с $\mathfrak{U}$-субнормальными и $\mathfrak{U}$-абнормальными нильпотентными подгруппами содержит класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ и содержится в классе $\mathfrak{Y}$. В частности, применимы теоремы 3.4 и 3.5.

Пример 4.2. Экстраспециальная группа $Q = \langle a, b\rangle$ порядка 17^3 имеет автоморфизм c порядка 32, $a^c = b$, $b^c = a^3$. Полупрямое произведение $G = [Q]\langle c\rangle$ является минимальной несверхразрешимой группой, в которой

$$\Phi(G) = \Phi(Q) = \langle [a, b]\rangle, \quad [a, b]^c = [a, b]^{14}.$$

Поэтому $H = \Phi(G) \rtimes \langle c\rangle$ ненильпотентна и $N_G(\langle c\rangle) = \langle c\rangle$. По лемме 2.2 все подгруппы, за исключением сопряженных с H и $\langle c\rangle$, $\mathbb{P}$-субнормальны в G. Подгруппа H является подгруппой Гашюца по лемме 2.1, она $\mathfrak{U}$-абнормальна в G. Подгруппа $\langle c\rangle$ является подгруппой Картера, она самонормализуема и не $\mathbb{P}$-субнормальна в G по лемме 2.3(2). Так как $|H : \langle c\rangle| = 17$, то $\langle c\rangle$ не $\mathfrak{U}$-абнормальна в G. $\square$

Этот пример показывает, что класс групп, у которых все примарные подгруппы самонормализуемы или $\mathbb{P}$-субнормальны (т. е. класс групп, изученный в теореме 3.6), шире класса групп, в которых все примарные подгруппы $\mathfrak{U}$-абнормальны или $\mathfrak{U}$-субнормальны.

Теорема 4.2. *В группе G каждая примарная подгруппа $\mathfrak{U}$-абнормальна или $\mathfrak{U}$-субнормальна тогда и только тогда, когда либо $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, либо выполняются следующие утверждения:*

(1) *силовская p-подгруппа P для некоторого $p \in \pi(G)$ является подгруппой Картера и подгруппой Гашюца; если $G \notin \mathfrak{X}$, то P циклическая; если $G \in \mathfrak{X} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{U}$, то P нециклическая и p наименьшее в $\pi(G)$;*

(2) *$G^{\mathfrak{U}} = G^{\mathfrak{N}}$ — p'-холлова подгруппа группы G;*

(3) *$R \ltimes G^{\mathfrak{N}} \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ для всех $R < P$; в частности, все метанильпотентные подгруппы в $RG^{\mathfrak{N}}$ сверхразрешимы.*

Доказательство. Пусть в группе G каждая примарная подгруппа $\mathfrak{U}$-абнормальна или $\mathfrak{U}$-субнормальна. По леммам 1.2 и 1.7 все $\mathfrak{U}$-абнормальные подгруппы самонормализуемы, а по лемме 1.12(1) все $\mathfrak{U}$-субнормальные подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны. Поэтому в группе G каждая примарная подгруппа самонормализуема или $\mathbb{P}$-субнормальна. Если каждая примарная подгруппа $\mathfrak{U}$-субнормальна, то $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Пусть $G \notin \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Тогда к группе G применимы теоремы 3.4 и 3.5. В обозначениях этих теорем подгруппа P не $\mathfrak{U}$-субнормальна в G, поэтому P $\mathfrak{U}$-абнормальна в G и является подгруппой Гашюца группы G. Следовательно, для группы G выполняется утверждение (1) доказываемой теоремы и $G^{\mathfrak{N}}$ — p'-холлова подгруппа группы G.

Предположим, что $G^{\mathfrak{U}} < G^{\mathfrak{N}}$. Тогда $PG^{\mathfrak{U}}$ — собственная подгруппа в G. Поскольку $G/G^{\mathfrak{U}}$ сверхразрешима, существуют подгруппы K и L такие, что

$$P \leq PG^{\mathfrak{U}} \leq K < L \leq G, \quad |L : K| \in \mathbb{P}.$$

Согласно лемме 1.7 это противоречит $\mathfrak{U}$-абнормальности подгруппы P. Поэтому допущение неверно и $G^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{U}}$.

Для всех $R < P$ подгруппа $RG^{\mathfrak{N}}$ субнормальна в G. Пусть X — произвольная примарная подгруппа из $RG^{\mathfrak{N}}$. По условию X $\mathfrak{U}$-абнормальна или

$\mathfrak{U}$-субнормальна в G. Если X $\mathfrak{U}$-абнормальна в G, то по лемме 1.7 она абнормальна в G и X не может содержаться в собственной субнормальной в G подгруппе по лемме 1.2(2); противоречие. Поэтому X $\mathfrak{U}$-субнормальна в G. По лемме 1.9(1) подгруппа X $\mathfrak{U}$-субнормальна в $RG^{\mathfrak{N}}$. Следовательно, $RG^{\mathfrak{N}} \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Согласно теореме 2.6(2) включение $RG^{\mathfrak{N}} \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ равносильно тому, что каждая метанильпотентная подгруппа из $RG^{\mathfrak{N}}$ сверхразрешима.

Обратно, если $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, то по лемме 2.7 все нильпотентные подгруппы $\mathfrak{U}$-субнормальны в G. Пусть $G \notin \mathrm{w}\mathfrak{U}$, для группы G выполняются утверждения (1)–(3) и X — произвольная r-подгруппа из G. Если $|P| = |X|$, то X — подгруппа Гашюца и $\mathfrak{U}$-абнормальна в G. Пусть $|P| \neq |X|$. Если $r \neq p$, то $X \leq K = G^{\mathfrak{N}}$. Так как K принадлежит $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ и нормальна в G, то X $\mathfrak{U}$-субнормальна в G по леммам 1.8(3) и 1.9(3). Если $r = p$, то $X^g < P$ для некоторого $g \in G$, $X^gK \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ по утверждению (3) доказываемой теоремы и опять X $\mathfrak{U}$-субнормальна в G. □

Следствие 4.2.1. *В группе G каждая примарная подгруппа $\mathfrak{U}$-абнормальна или $\mathfrak{U}$-субнормальна тогда и только тогда, когда в G каждая нильпотентная подгруппа $\mathfrak{U}$-абнормальна или $\mathfrak{U}$-субнормальна.*

Доказательство. Пусть в группе G каждая примарная подгруппа $\mathfrak{U}$-абнормальна или $\mathfrak{U}$-субнормальна. Предположим, что в G существует нильпотентная подгруппа V, которая не $\mathfrak{U}$-абнормальна и не $\mathfrak{U}$-субнормальна. Согласно лемме 2.7 $G \notin \mathrm{w}\mathfrak{U}$, поэтому для G выполняются утверждения (1)–(3) теоремы 4.1. Понятно, что V непримарна. Если $|P|$ делит $|V|$, то $P^g \leq V$, $g \in G$, и подгруппа V $\mathfrak{U}$-абнормальна в G, поскольку P — подгруппа Гашюца. Если $|P|$ не делит $|V|$, то $VG^{\mathfrak{N}} < G$ и $VG^{\mathfrak{N}} \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Теперь V $\mathfrak{U}$-субнормальна в $VG^{\mathfrak{N}}$ по лемме 2.7. Поскольку $VG^{\mathfrak{N}}$ субнормальна в G, то V $\mathfrak{U}$-субнормальна в G; противоречие. Обратное очевидно. □

Таким образом, теорема 4.2 решает задачу 1 из введения.

Замечание 4.1. Согласно [9, 2.5] для любого натурального n существует группа $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$, нильпотентная длина которой равна n. Поэтому в теореме 4.2 подгруппа $G^{\mathfrak{U}}$ может иметь любую нильпотентную длину. В частности, $G^{\mathfrak{U}}$ может быть несверхразрешимой в отличие от ситуации теоремы 4.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg: New York, 1967.
2. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
3. *Fattahi A.* Groups with only normal and abnormal subgroups // J. Algebra. 1974. V. 28, N 1. P. 15–19.
4. *Ebert G., Bauman S.* A note on subnormal and abnormal chains // J. Algebra. 1975. V. 36, N 2. P. 287–293.
5. *Förster P.* Finite groups all of whose subgroups are $\mathfrak{F}$-subnormal or $\mathfrak{F}$-subabnormal // J. Algebra. 1986. V. 103, N 1. P. 285–293.
6. *Семенчук В. Н.* Строение конечных групп с $\mathfrak{F}$-абнормальными или $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами // Вопросы алгебры. Минск: Университетское, 1986. С. 50–55.
7. *Семенчук В. Н., Шевчук С. Н.* Конечные группы, у которых примарные подгруппы либо $\mathfrak{F}$-субнормальны, либо $\mathfrak{F}$-абнормальны // Изв. вузов. Математика. 2011. № 8. С. 46–55.
8. *Semenchuk V. N., Skiba A. N.* On one generalization of finite $\mathfrak{U}$-critical groups // ArXiv.org e-Print archive, arXiv:1412.5469v1, 17 Dec 2014.
9. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
10. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам // Пробл. физики, математики и техники. 2010. № 2. С. 21–27.

11. *Monakhov V. S., Kniahina V. N.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ric. Mat. 2013. V. 62, N 2. P. 307–323.
12. *Murashka V. I.* One formation of finite groups // ArXiv.org e-Print archive, arXiv:1312.0213v1, 2 Dec 2013.
13. *Мурашко В. И.* Свойства класса конечных групп с $\mathbb{P}$-субнормальными циклическими примарными подгруппами // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 5–8.
14. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
15. *Вдовин Е. П.* Картеровы подгруппы конечных групп // Мат. тр. 2008. Т. 11, № 2. С. 20–106.
16. *Feldman A.* A non-abnormal subgroup contained only in self-normalising subgroups in a finite group // Arch. Math. 1998. V. 70, N 1. P. 9–10.
17. *Huppert B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. Bd 60. S. 409–434.
18. *Doerk K.* Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen // Math. Z. 1966. Bd 91. S. 198–205.
19. *Нагребецкий В. Т.* О конечных минимальных несверхразрешимых группах // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 104–108.
20. *Brandl R.* Groups sharing some varietal properties with supersoluble groups // J. Austral. Math. Soc. 1981. V. 34. P. 265–268.
21. *Brandl R.* Zür Theorie der untergruppenabgeschlossenen Formationen: Endliche Varietäten // J. Algebra. 1981. V. 73. P. 1–22.

Статья поступила 27 февраля 2015 г.

Монахов Виктор Степанович
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246050, Беларусь
`Victor.Monakhov@gmail.com`