Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 514.7

ПОТОК ДИРАКА НА ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

Е. Г. Малькович

Аннотация. Проиллюстрированы некоторые хорошо известные факты об эволюции трехмерной сферы (S^3, g), порожденной потоком Риччи. Определен поток Дирака и исследованы свойства метрики $\bar{g} = dt^2 + g(t)$, где $g(t)$ — решение потока Дирака. Показано, что в случае метрики g, конформно эквивалентной круглой метрике на S^3, метрика $\bar{g}$ является метрикой постоянной кривизны. Исследованы свойства решений в случае метрики g, зависящей от двух функциональных параметров. Выписан поток на дифференциальные 1-формы, решения которого порождают метрику Эгучи — Хансона. В частных случаях изучены сингулярности, развиваемые рассмотренными потоками.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.216

Ключевые слова: поток Дирака, поток Риччи, пространства постоянной кривизны, метрика Эгучи — Хансона, поток Хитчина.

1. Введение

В статье определены несколько эволюционных уравнений на геометрические структуры и исследованы их связи с некоторыми классическими четырехмерными метриками. Изучен поток Дирака

$$\frac{\partial}{\partial t} g = \sqrt{\mathrm{Ric}(g) - 4Kg}$$

в простейшей ситуации: в случае метрики g, конформно эквивалентной стандартной круглой метрике на сфере, данный поток описывает пространства постоянной кривизны $K \in \{-1, 0, +1\}$. А именно, если $g(t) = f^2(t) \cdot ds_0^2$ — метрика, конформно эквивалентная стандартной метрике ds_0^2 на трехмерной сфере единичного радиуса и при этом являющаяся решением потока Дирака, то четырехмерная метрика $dt^2 + g(t)$ — метрика постоянной кривизны K. Исследуем свойства отдельных решений данного потока также в случае, когда метрика $g(t)$ зависит от двух функциональных параметров:

$$g(t) = A_1^2(t)(e^1)^2 + A_2(t)^2((e^2)^2 + (e^3)^2),$$

где e^i образуют канонический базис Картана из 1-форм на трехмерной сфере.

Основной вопрос в определении данного потока состоит в задании квадратного корня от билинейной формы. Считаем, что $\sqrt{g} = g$, т. е. исходная

Работа была в значительной степени написана во время визита в Международный институт теоретической физики (ICTP, Trieste) при финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (соглашение № 14.B25.31.0029).

метрика играет роль неподвижного элемента по отношению к операции извлечения квадратного корня. Это корректно согласуется с определением квадратного корня на операторах: чтобы извлечь квадратный корень из билинейной формы $C = c_{ij}$, необходимо сначала превратить ее в оператор, подняв один индекс, т. е. умножив на $g^{-1} = g^{jk}$, далее извлечь корень из оператора $c_i^k = c_{ij}g^{jk} : T_M \to TM$ и затем опустить один индекс обратно: $(\sqrt{C})_{il} = \sqrt{c_{ij}g^{jk}}g_{kl}$. Если в качестве формы C рассмотреть саму метрику g, то получим в точности $\sqrt{g}_{il} = \sqrt{g_{ij}g^{jk}}g_{kl} = g_{il}$, естественно полагая, что $\sqrt{\delta_i^j} = \delta_i^j$. Отметим также, что в данной работе квадратичная форма $\mathrm{Ric}(g) - 4Kg$ положительно определена, поскольку в качестве метрики g рассматриваются деформируемые метрики на трехмерной сфере.

Для записи и исследования уравнений рассматриваемого потока используем базис $\{A_1(t)e^1, A_2(t)e^2, A_2(t)e^3\}$, в котором матрица метрики $g(t)$ становится единичной. Поэтому квадратный корень в определении потока следует понимать как стандартный квадратный корень, определенный на скалярных функциях, являющихся компонентами тензора $\mathrm{Ric}(g) - 4Kg$. При этом даже в простейшей ситуации могут возникать вопросы корректного выбора ветви квадратного корня и продолжения решений дифференциального уравнения. В данной работе мы предпочли оставить в стороне анализ проблем означенного характера и остановиться на построении и анализе конкретных решений, оправдывающих рассмотрение геометрических потоков данного вида.

Также определен поток на $\mathbb{R}P^3$, который позволяет получить метрику Эгучи — Хансона:

$$\frac{\partial}{\partial t}g_{ij} = \frac{1}{2}\sqrt{\det(\mathrm{Ric})}(\mathrm{Ric}^{-1})_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

и сводится к двум нелинейным уравнениям на A_1 и A_2. Данный поток можно переписать как уравнение на две 1-формы $\psi \in \{A_1(t)e^1, A_2(t)e^2\}$ следующего вида:

$$(*\psi)' = d\psi,$$

где $d : \Lambda^i(S^3) \to \Lambda^{i+1}(S^3)$ — стандартный дифференциал на формах на S^3.

Заметим, что похожие идеи развивались в [1]. В частности, там утверждается, что метрика Тауб-НУТ может быть описана как результат действия потока Риччи (или обратного потока Риччи). В [1] рассматривается поток Риччи на отдельных трехмерных группах Ли и проверяется, отвечают ли некоторые классические метрики решениям потока Риччи. Построения иных потоков в указанной статье не наблюдается.

2. Круглая трехмерная сфера в $\mathbb{R}^4$

Рассмотрим сначала пространство $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, стандартная плоская метрика на $\mathbb{R}^4$ совпадает с конусной метрикой над $S^3 = \mathrm{Sp}(1)$. Известно, что поток Риччи $\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\,\mathrm{Ric}(t)$, если он определен на эйнштейновом многообразии M (в частности, на круглых сферах), меняет лишь объем соответствующего многообразия. Поэтому $\mathbb{R}^4$ можно рассматривать как «конфигурационное пространство» потока Риччи, определенного на круглых трехмерных сферах и меняющего только их радиус. Грубо говоря, рассматривая временную координату t некоторого потока, меняющего лишь радиус сферы, в качестве пространственной координаты τ, можно получить пространство $(\mathbb{R}_+ \times M(\tau))$ (в данном примере $M(t)$ — сфера радиуса t) с ограничениями на кривизну, в данном случае

$R_{ijkl} \equiv 0$. Здесь и далее в качестве многообразия M будем рассматривать трехмерную сферу S^3 (либо трехмерное вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^3$). Метрика и другие рассматриваемые на S^3 тензоры будут обозначаться через g, Ric и т. д., а тензоры на четырехмерном многообразии $\mathbb{R}_+ \times M(\tau)$ — через $\bar{g}$, $\overline{\mathrm{Ric}}$ и т. д.

Представим S^3 как группу Ли $\mathrm{Sp}(1)$ единичных кватернионов, тогда в касательном пространстве к единице $T_1\,\mathrm{Sp}(1)$ можно выбрать базис из трех мнимых единиц (i, j, k). С помощью умножения справа в группе $\mathrm{Sp}(1)$ эти три касательных вектора продолжаются до трех глобальных касательных полей (ξ_1, ξ_2, ξ_3) на всей сфере. Им соответствует сопряженный базис в $T^*S^3 = \Lambda^1(S^3)$ из 1-форм $(e^1,\ e^2,\ e^3)$ таких, что $e^i(\xi_j) = \delta^i_j$, обычно называемый *репером Картана*. Рассмотрим плоскую коническую метрику

$$\bar{g} = d\tau^2 + \tau^2((e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2) = d\tau^2 + g(\tau), \tag{1}$$

где τ играет роль радиуса r сферы. Так как точка $0 \in \mathbb{R}^4$ является особенностью системы координат, в которой выписана метрика, а не самой метрики, будем считать, что метрика (1) задана глобально на всем $\mathbb{R}^4$.

Рассмотрим случай, когда исследуемая сфера стандартным образом вложена в $\mathbb{R}^4$, и покажем, что стандартное увеличение ее радиуса описывается потоком средней кривизны. Подсчитаем сначала вторую квадратичную форму гиперповерхности $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Напомним, что вторая квадратичная форма B вложения $r : S^3 \to \mathbb{R}^4$ определяется из равенства $r_{ij} = b_{ij}\mathbf{m} + \Gamma^k_{ij} r_k$, $i, j, k = 1, 2, 3$, где $r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$ и $r_{ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}$ — векторы первых и вторых частных производных вложения r, $\mathbf{m}$ — вектор единичной нормали, а Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля, тогда $b_{ij} = \langle r_{ij}, \mathbf{m}\rangle$. Достаточно малую окрестность любой точки из $r(S^3)$ можно задать как множество нулей некоторой функции $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, тогда градиент (относительно евклидовой метрики) данной функции с точностью до умножения на скаляр будет совпадать с нормалью $\mathbf{m}$, т. е. в $\mathbb{R}^4$ существует открытая область, диффеоморфная $r(S^3) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Так как рассматривается трехмерная сфера, то $F(x) = |x|^2$ для $x \in \mathbb{R}^4$, а сфера единичного радиуса $S^3 = \{x \mid F(x) - 1 = 0\}$. Будем считать, что $\tau = u^0$ и r_τ — вариация вложения r такая, что $\frac{\partial}{\partial \tau} r_\tau = r_0 = \mathbf{m}$, в этом случае $b_{ij} = \Gamma^0_{ij}$.

Как известно [2, (IV-2)], связность Леви-Чивиты определяется из равенства

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) \\ + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X). \end{aligned}$$

Если в нашем случае положить $Z = \mathbf{m} = \frac{\partial}{\partial \tau} = \xi_0$, то в левой части равенства получим $2B(X, Y)$. Подсчитаем для начала b_{11} для плоской метрики (1):

$$2b_{11} = 2g(\nabla_{\xi_1}\xi_1, \xi_0) = -\xi_0 g(\xi_1, \xi_1) = -2\tau,$$

поскольку в правой части лишь одно из слагаемых не обращается в нуль: скобки Ли полей на S^3 будут по-прежнему полями на S^3 и останутся перпендикулярными радиальному направлению ξ_0, поля ξ_i не зависят от радиальной координаты τ, поэтому коммутируют с ξ_0. Аналогично считаются два оставшихся диагональных члена формы B, внедиагональные члены тождественно обращаются в нуль, поскольку $g(\xi_i, \xi_j) = \delta_{ij}\tau^2$. Таким образом, показали, что метрика $g(t)$ удовлетворяет потоку средней кривизны:

$$(g_{ij})'_\tau = \begin{pmatrix} 2\tau & 0 & 0 \\ 0 & 2\tau & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau \end{pmatrix} = -2b_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Подсчитаем вторую квадратичную форму с помощью метода Картана. Напомним, что форма связности риманова многообразия M — это кососимметричная матрица ω^i_j, состоящая из 1-форм, такая, что

$$d\varepsilon^i = -\omega^i_j \wedge \varepsilon^j,$$

где $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ — ортонормированный (ко-)репер Картана, т. е. базис в $T^*(M)$ из 1-форм, сопряженный к базису из ортонормированных касательных векторных полей. В нашем случае $\{\xi_0, \tau^{-1}\xi_1, \tau^{-1}\xi_2, \tau^{-1}\xi_3\}$ образуют ортонормированный относительно метрики $\bar g$ репер. Выпишем дифференциалы соответствующих 1-форм:

$$d\varepsilon^0 = d(d\tau) = 0, \quad d\varepsilon^1 = d(\tau e^1) = \frac{1}{\tau}\varepsilon^0 \wedge \varepsilon^1 + \frac{2}{\tau}\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3,$$

$$d\varepsilon^2 = d(\tau e^2) = \frac{1}{\tau}\varepsilon^0 \wedge \varepsilon^2 + \frac{2}{\tau}\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1, \quad d\varepsilon^3 = d(\tau e^3) = \frac{1}{\tau}\varepsilon^0 \wedge \varepsilon^3 + \frac{2}{\tau}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2.$$

Учитывая кососимметричность матрицы ω^i_j, несложно подсчитать, что

$$-(\overline{\omega}^i_j)|_{i,j=0,\dots,3} = \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \\ -\varepsilon^1 & 0 & -\varepsilon^3 & \varepsilon^2 \\ -\varepsilon^2 & \varepsilon^3 & 0 & -\varepsilon^1 \\ -\varepsilon^3 & -\varepsilon^2 & \varepsilon^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Мы могли бы подсчитать форму связности и в старом базисе $\{e^0, e^1, e^2, e^3\}$, но тогда от матрицы ω^i_j пришлось бы требовать не кососимметричность, т. е. принадлежность алгебре $\mathfrak{so}(n)$, а принадлежность алгебре матриц

$$\{A \mid AG + GA^{\mathrm{T}} = 0\},$$

где G — матрица метрики $\bar g$ в старом базисе, не равная единичной матрице. Иными словами, при работе со структурными уравнениями Картана мы вынуждены использовать ортонормированные реперы и кореперы.

Поскольку форма связности есть не что иное, как обобщение символов Кристоффеля: $\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}\varepsilon^k$, для вычисления второй квадратичной формы уже имеется все необходимое:

$$b_{jk} = \Gamma^0_{jk} = \omega^0_j(\tau^{-1}\xi_k) = -\frac{1}{\tau}\delta_{jk}, \quad j,k = 1,2,3.$$

Проверим снова, что стандартная расширяющаяся сфера удовлетворяет потоку средней кривизны, в базисе $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$:

$$(\bar g)'_\tau = \big(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2\big)'_\tau = \big(\tau^2\big(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2\big)\big)'_\tau = \frac{2}{\tau}\big(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2\big) = -2b.$$

Далее в работе не будем предполагать, что сфера вложена в $\mathbb{R}^4$, а будем изучать метрические свойства пространства, которое локально выглядит как $(0,1) \times S^3$. В частности, будет получена метрика постоянной кривизны на $(0,1) \times S^3$, которая единственным образом продолжается до метрики на S^4.

Напомним [2, (II-5)], что форма кривизны Ω — это матрица, состоящая из 2-форм

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j,$$

которая обобщает тензор кривизны, а именно $\Omega^i_j = \frac{1}{2}R^i_{jkl}\varepsilon^k \wedge \varepsilon^l$. Несложно проверить, что для метрики $\bar g$ форма кривизны тождественно равна нулю —

рассматриваемое $\mathbb{R}^4$ плоско. Подсчитаем тензор Риччи Ric метрики g. Используя симметрии тензора кривизны, получим

$$\mathrm{Ric}_{11} = R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131} = R^1_{212} + R^1_{313}.$$

Чтобы подсчитать последние два слагаемых, необходимо вычислить форму кривизны Ω метрики g:

$$\Omega^1_2 = d\omega^1_2 + \omega^1_k \wedge \omega^k_2 = d\left(\frac{1}{\tau}\varepsilon^3\right) + \left(-\frac{1}{\tau}\varepsilon^2\right) \wedge \left(-\frac{1}{\tau}\varepsilon^1\right) = -\frac{1}{\tau^2}\varepsilon^0 \wedge \varepsilon^3$$
$$+ \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\tau}\varepsilon^0 \wedge \varepsilon^3 + \frac{2}{\tau}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2\right) + \frac{1}{\tau^2}\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^1 = \frac{1}{\tau^2}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \frac{1}{2}R^1_{212}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2,$$

где $k \in \{1,2,3\}$. Тогда $\mathrm{Ric}_{11} = \frac{4}{\tau^2} = \mathrm{Ric}_{22} = \mathrm{Ric}_{33}$. Здесь может показаться, что пришли к противоречию, ведь известно (см., например, [3, 1.159]), что при умножении метрики на константу λ (4,0)-тензор Римана также умножится на константу λ, скалярная кривизна умножится на λ^{-1}, а тензор Риччи не изменится. Все сферы получаются из сферы единичного радиуса простой гомотетией, и $\lambda \equiv \tau$. В данном же случае получается, что тензор Риччи зависит от τ. Дело в том, что используемый для подсчета компонент Ric_{ij} базис $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ также зависит от τ. В уравнении потока Риччи $g'_\tau = -2\,\mathrm{Ric}$ при выбранных нами координатах левая часть является положительно определенной формой, а правая — отрицательно определенной, т. е. при увеличении пространственной координаты τ метрика должна «уменьшаться», а соответствующая сфера схлопываться. Таким образом, видно, что стандартный коллапс сферы, описываемый сферической системой координат, не образует решения потока Риччи.

3. Случай метрики, зависящей от одного функционального параметра

Рассмотрим метрику вида

$$\bar{g} = dt^2 + f(t)^2\left(\sum_{i=1}^{3}(e^i)^2\right) = dt^2 + g(t) = \left(\sum_{i=0}^{3}(\varepsilon^i)^2\right). \tag{2}$$

Хотя 1-формы $\varepsilon^i = f(t)e^i$, $i = 1,2,3$, зависят от функции f, будем использовать прежние обозначения. Тогда в базисе $\{\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ форма связности метрики $\bar{g}$ примет вид

$$-\overline{\omega} = \frac{1}{f}\begin{pmatrix} 0 & f'\varepsilon^1 & f'\varepsilon^2 & f'\varepsilon^3 \\ -f'\varepsilon^1 & 0 & -\varepsilon^3 & \varepsilon^2 \\ -f'\varepsilon^2 & \varepsilon^3 & 0 & -\varepsilon^1 \\ -f'\varepsilon^3 & -\varepsilon^2 & \varepsilon^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементарный подсчет формы кривизны Ω, аналогичный приведенному выше, показывает, что $\mathrm{Ric}_{ij} = \frac{4}{f^2}\delta_{ij}$, $i,j = 1,2,3$. Чтобы выполнялось уравнение потока Риччи, необходимо потребовать

$$(g_{ij})'_t = \frac{2f'}{f}\delta_{ij} = -\frac{8}{f^2}\delta_{ij} = -2\,\mathrm{Ric}_{ij}, \quad i,j = 1,2,3, \tag{3}$$

т. е. $f(t) = \sqrt{8(t_0 - t)}$. Здесь учтено, что базис $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ ортонормированный для метрики g и в нем она имеет вид единичной матрицы δ_{ij}. Радиус сферы f должен зависеть от времени t как квадратный корень и под действием потока

Риччи сфера за конечное время коллапсирует — это хорошо известный факт. Заметим также, что при выбранном базисе уравнение потока средней кривизны будет выполнено автоматически — это первое из равенств формулы (3). Тем самым поток средней кривизны при работе с инвариантным базисом фактически обращается в тавтологию.

Подсчитаем форму кривизны метрики (2) для объемлющего пространства, теперь t будет играть роль пространственной координаты:

$$\overline{\Omega}_1^0 = -\frac{f''}{f}\varepsilon^0 \wedge \varepsilon^1 = \frac{1}{2}\overline{R}_{101}^0 \varepsilon^0 \wedge \varepsilon^1, \quad \overline{\Omega}_2^1 = \frac{1-f'^2}{f^2}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 = \frac{1}{2}\overline{R}_{212}^1 \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2.$$

Соответственно тензор Риччи примет вид

$$\overline{\mathrm{Ric}}_{00} = -6\frac{f''}{f}, \quad \overline{\mathrm{Ric}}_{11} = \frac{1}{f^2}(4 - 4f'^2 - 2f''f) = \overline{\mathrm{Ric}}_{22} = \overline{\mathrm{Ric}}_{33},$$

а скалярная кривизна — вид

$$\overline{R} = \frac{3}{f^2}(4 - 4f'^2 - 4f''f).$$

При $f(t) = f_0(t) = t$ получим плоское пространство $\mathbb{R}^4$, при $f(t) = f_{+1}(t) = \sin(t)$ — круглую сферу S^4 радиуса 1 и при $f(t) = f_{-1}(t) = \sinh(t)$ — гиперболическое пространство H^4.

Если рассмотреть поток Риччи относительно времени τ, то при правильно подобранной зависимости координаты t и времени τ сфера S^3 под действием такого потока будет «заметать» пространство постоянной кривизны. Для плоского пространства $\mathbb{R}^4$ необходимо положить $\frac{dt}{d\tau} = -\frac{4}{t}$ или $\tau = h_0 = \mathrm{const} - \frac{t^2}{8}$. Для сферы S^4 имеем $\tau = h_{+1} = \mathrm{const} + \frac{1}{8}\sin^2 t$, для гиперболического пространства — $\tau = h_{-1} = \mathrm{const} - \frac{1}{8}\sinh^2 t$. Таким образом, получили довольно очевидное

Утверждение 1. *Пусть круглая сфера $(S^3, g(\tau))$ удовлетворяет потоку Риччи*

$$\frac{\partial}{\partial \tau} g(\tau) = -2\,\mathrm{Ric}\,. \tag{4}$$

Тогда если $\tau = h_K(t)$, где h_K — функции, описанные выше, то метрика

$$\bar{g} = dt^2 + g(\tau(t)) = dt^2 + f^2(t)\left(\sum_{i=1}^{3}(e^i)^2\right)$$

будет метрикой постоянной кривизны $K \in \{-1, 0, +1\}$.

Это утверждение действительно очевидно: рассмотрим поток Риччи как процедуру, которая меняет со временем радиус сферы S^3. Меняя скорость изменения радиуса, можно добиться того, чтобы заметаемое сферой пространство обладало постоянной кривизной. Распишем левую часть потока Риччи через базис $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau} g(\tau(t)) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\sum_{i=1}^{3}(\varepsilon^i)^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[f^2(t)\left(\sum_{i=1}^{3}(e^i)^2\right)\right]\frac{\partial t}{\partial \tau} \\ = 2ff_t'\left(\sum_{i=1}^{3}(e^i)^2\right)\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{2f_t'}{f}\left(\sum_{i=1}^{3}(\varepsilon^i)^2\right)\frac{\partial t}{\partial \tau}.\end{aligned}$$

Правая часть, как вычислено ранее, равна $\mathrm{Ric}_{ij} = \frac{4}{f^2}\delta_{ij} = \frac{4}{f^2}\left(\sum_{i=1}^{3}(\varepsilon^i)^2\right)$. Таким образом, приходим к скалярному уравнению

$$\frac{2f_t'}{f}\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{8}{f^2}.$$

В случае $K = 0$ по условию теоремы имеем $\frac{\partial t}{\partial \tau} = -\frac{4}{t}$ и данное уравнение сводится к $ff_t' = t$, решением которого является линейная функция $f_0(t) = t + \mathrm{const}$. Константу интегрирования можно положить равной нулю, и метрика $\bar{g}$ будет метрикой плоского $\mathbb{R}^4$. Аналогичные рассуждения проходят и для $K \in \{-1, +1\}$. Утверждение доказано.

С другой стороны, верна следующая

Теорема 1. *Пусть круглая сфера $(S^3, g(t))$ радиуса $f(t)$ изменяется под действием потока*

$$\frac{\partial}{\partial t}g = \sqrt{\mathrm{Ric} - 4Kg}. \tag{5}$$

Тогда метрика $\bar{g} = dt^2 + g(t)$ изометрична метрике пространства постоянной кривизны $K \in \{-1, 0, +1\}$.

Доказательство данной теоремы сводится к тому, чтобы выписать поток (5) в нашем частном случае, когда метрика конформно эквивалентна стандартной круглой метрике на сфере. В выбранном нами ортонормированном базисе $g = (\varepsilon^1)^2 + (\varepsilon^2)^2 + (\varepsilon^3)^2 = f(t)^2((e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2)$. Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 2f(t)f'(t)((e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2) = \frac{2f'(t)}{f(t)}((\varepsilon^1)^2 + (\varepsilon^2)^2 + (\varepsilon^3)^2).$$

Аналогично, используя (3), получаем $\mathrm{Ric} = \frac{4}{f(t)^2}((\varepsilon^1)^2 + (\varepsilon^2)^2 + (\varepsilon^3)^2)$. Таким образом, уравнение (5) сводится к простому скалярному уравнению

$$2\frac{f'}{f} = \sqrt{\frac{4}{f^2} - 4K}.$$

Очевидно, что при подходящих начальных данных, а именно при $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, данное уравнение имеет решения $f_- = \sinh(t)$ для $K = -1$, $f_0 = t$ для $K = 0$ и $f_+ = \sin(t)$ для $K = +1$. Отвечающие им метрики g будут иметь соответствующую кривизну K. Теорема доказана.

Поясним здесь наше обозначение. Заметим, что, так как тензор Риччи — это лапласиан от метрики, рассмотренный поток фактически является уравнением Дирака, определенным на пространстве метрик. Напомним, что уравнение Дирака имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \sqrt{\Delta - U}\Psi,$$

где Ψ — сечение спинорного расслоения. Рассматриваем правую часть (5) как псевдодифференциальный оператор порядка 1, определенный на пространстве метрик. Можно проследить формальные аналогии между уравнением теплопроводности и потоком Риччи, уравнением Шредингера и нормализованным потоком Риччи, поэтому изучение уравнения (5) вполне естественно. Исходя из того, что поток (5) представляет собой пересечение теории геометрических потоков и теории операторов Дирака, называем его *потоком Дирака*.

Поток (5) записан в бескоординатной форме по следующей простой причине. Из общего курса алгебры известно, что любая симметричная матрица (например, матрица $\mathrm{Ric}_{ij} - Kg_{ij}$) имеет вещественные собственные числа и базис из попарно ортогональных собственных векторов. Поэтому из теории Жордана следует, что матричный квадратный корень, определенный на пространстве симметричных матриц, всегда может быть сведен к квадратному корню на пространстве диагональных матриц. Следовательно, зафиксировав ортонормированный базис, всегда можно перейти от тензорной формы записи потока (5) к координатной. При этом вопросы глобального определения правой части, выбора ветви квадратного корня и выхода в область комплексных чисел остаются, но здесь мы их не касаемся.

4. Случай метрики, зависящей от двух функциональных параметров

Рассмотрим далее метрику вида

$$\bar{g} = dt^2 + A_1^2(t)(e^1)^2 + A_2^2(t)((e^2)^2 + (e^3)^2) = dt^2 + g(t). \tag{6}$$

Введем, как и прежде, ортонормированный относительно g корепер

$$\varepsilon^1 = A_1 e^1, \quad \varepsilon^2 = A_2 e^2, \quad \varepsilon^3 = A_2 e^3.$$

Тогда форма связности примет вид

$$-\overline{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{A_1'}{A_1}\varepsilon^1 & \frac{A_2'}{A_2}\varepsilon^2 & \frac{A_2'}{A_2}\varepsilon^3 \\ -\frac{A_1'}{A_1}\varepsilon^1 & 0 & \frac{-A_1}{A_2^2}\varepsilon^3 & \frac{A_1}{A_2^2}\varepsilon^2 \\ -\frac{A_2'}{A_2}\varepsilon^2 & \frac{A_1}{A_2^2}\varepsilon^3 & 0 & \frac{A_1^2-2A_2^2}{A_1A_2^2}\varepsilon^1 \\ -\frac{A_2'}{A_2}\varepsilon^3 & \frac{-A_1}{A_2^2}\varepsilon^2 & -\frac{A_1^2-2A_2^2}{A_1A_2^2}\varepsilon^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Форма кривизны будет выглядеть следующим образом:

$$\overline{\Omega}_1^0 = \varepsilon^0 \wedge \varepsilon^1 \left[-\frac{A_1''}{A_1} \right] + \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 \left[-\frac{2A_1'}{A_2^2} + \frac{2A_1A_2'}{A_2^3} \right],$$

$$\overline{\Omega}_2^0 = \varepsilon^0 \wedge \varepsilon^2 \left[-\frac{A_2''}{A_2} \right] + \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 \left[\frac{A_1'}{A_2^2} - \frac{A_1A_2'}{A_2^3} \right],$$

$$\overline{\Omega}_2^1 = \varepsilon^0 \wedge \varepsilon^3 \left[\frac{A_1'}{A_2^2} - \frac{A_1A_2'}{A_2^3} \right] + \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \left[\frac{A_1^2}{A_2^4} - \frac{A_1'A_2'}{A_1A_2} \right],$$

$$\overline{\Omega}_3^2 = \varepsilon^0 \wedge \varepsilon^1 \left[\frac{2A_1A_2'}{A_2^3} - \frac{2A_1'}{A_2^2} \right] + \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3 \left[\frac{4}{A_2^2} - \frac{3A_1^2}{A_2^4} - \frac{A_2'^2}{A_2^2} \right],$$

оставшиеся компоненты вычисляются по аналогии. Заметим, что для метрики (6) тензор кривизны $\overline{R}^i_{jkl}$ уже не является диагональным. Под диагональным понимаем тензор кривизны, у которого лишь секционные кривизны $\overline{R}^i_{jij}$ не обращаются в нуль. Тогда тензор Риччи метрики g будет иметь две нетривиальные компоненты: $\mathrm{Ric}_{11} = R^1_{212} + R^1_{313} = 4\frac{A_1^2}{A_2^4}$ и $\mathrm{Ric}_{22} = \mathrm{Ric}_{33} = R^1_{212} + R^3_{232} = \frac{4}{A_2^2}\big(2 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\big)$. Будем считать при этом, что в каждый фиксированный момент времени t метрика g зависит от A_1 и A_2 как от констант, поэтому компоненты тензора кривизны R^i_{jkl} не зависят от производных функций A_1 и A_2.

Поток Риччи сведется к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{A_1'}{A_1} = -4\frac{A_1^2}{A_2^4}, \\ \frac{A_2'}{A_2} = -\frac{4}{A_2^2}\Big(2 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\Big). \end{cases} \tag{7}$$

Сделаем замену $\alpha = A_1^2$, $\beta = A_2^2$. Тогда рассматриваемая система примет вид

$$\begin{cases} \alpha' = -8\frac{\alpha^2}{\beta^2}, \\ \beta' + 16 = \frac{8\alpha}{\beta}. \end{cases} \tag{8}$$

Данная система имеет два очевидных решения. Первое соответствует уже рассмотренному случаю

$$\alpha = \beta = 8(t_0 - t), \tag{9}$$

второе решение

$$\alpha = 0, \quad \beta = 16(t_0 - t) \tag{10}$$

— коллапсу двумерной сферы $S^2 = S^3/S^1$, когда слой S^1 в расслоении Хопфа тождественно схлопнут. Фактически второе решение определяет метрику (6) на трехмерном пространстве.

Замечание. Решение (9) соответствует коллапсирующей круглой трехмерной сфере. В [4] Гиббонс и Хокинг называют решения с такой особенностью термином «nut», так как в этом случае коллапсирует вся трехмерная сфера («орех»). Другое разрешение конусной сингулярности было названо «bolt». Очевидно, что болт напоминает цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$, у которого одна координата определена на окружности S^1 малого радиуса, а вторая координата протяженная, т. е. определена на $\mathbb{R}$. Второе разрешение особенности представляет собой коллапсирующую окружность S^1 в расслоении Хопфа, умноженную на двумерную сферу ограниченного снизу радиуса. Иными словами, роль протяженной координаты играет двумерная сфера, а схлопывается одномерная окружность S^1 («сечение болта»). В нашей ситуации решение (10) вырожденно, так как одномерная окружность схлопнута тождественно — $\alpha \equiv 0$, и двумерная сфера тоже со временем коллапсирует — $\beta = 16(t_0 - t)$.

Система (8) может быть полностью проинтегрирована. Из второго уравнения выразим $\alpha = \frac{1}{8}\beta(\beta' + 16)$ и подставим в первое, получим

$$\beta\beta'' + 2\beta'^2 + 48\beta' + 256 = 0,$$

общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$-\frac{1}{16}\beta - \frac{\sqrt{2}}{128}c_1 \operatorname{arctg}\left(\frac{4\sqrt{2}\beta}{\sqrt{c_1^2 - 32\beta^2}}\right) = t + c_2, \tag{11}$$

где c_1 и c_2 — константы интегрирования. Когда правая часть (11) стремится к нулю снизу, левая стремится к нулю сверху. При этом выполнено следующее равенство:

$$-\frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 - 32\beta^2}}{\sqrt{c_1^2 - 32\beta^2}} \cdot \frac{\beta'}{16} = 1,$$

т. е. $\beta' \to -8$ и $\alpha' = \frac{\beta'}{8}(\beta'+16) + \frac{\beta}{8}\beta'' = \frac{\beta'}{8}(\beta'+16) + \frac{\beta}{8}\big(\frac{-1}{\beta}\big)(256+48\beta'+2\beta'^2) \to -8$ при $t \downarrow -c_2 = t_0$. Иными словами, получен хорошо известный факт: за конечное время трехмерная не круглая сфера под действием потока Риччи коллапсирует (как круглая сфера бесконечно малого радиуса) в точку. Можно утверждать, что решение (10) «непертурбативно», т. е. независимо от того, насколько мало $\alpha(0) \neq 0$, будет выполнено

$$\lim_{t\to t_0} \alpha'(t) = \lim_{t\to t_0} \beta'(t) = -8.$$

Это согласуется с общей теорией: поток Риччи делает кривизну «равномерно распределенной» по всем точкам многообразия и по всем касательным площадкам, если начальные данные не слишком плохи, т. е. под действием потока Риччи сфера полностью коллапсирует, поток Риччи не может уменьшать лишь одномерный слой расслоения Хопфа, оставляя двумерную базу с ограниченным снизу радиусом. Отсюда делаем вывод, что с помощью потоков, «незначительно» отличающихся от потока Риччи, получить описание метрик с разрешением конической особенности типа «болт» маловероятно.

Исследуем качественное поведение решений. Если $\beta(0) > \alpha(0)$, то в начальные моменты времени правые части системы (7) достаточно малы и α ведет себя как константа, а β убывает как $-16t$. Когда радиус $A_2(t)$ сферы станет достаточно близким к радиусу $A_1(t)$ окружности, они сольются в одно решение (9). Если $\alpha(0) > \beta(0)$, то, поскольку правая часть первого уравнения — большое по модулю отрицательное число, довольно быстро α станет равной β и они сольются. Данное поведение несложно вывести напрямую из (11).

Замечание. При проведении численных экспериментов из-за погрешностей вычисления иногда (т. е. не во всех численных экспериментах) решение системы (7) продолжается за время сингулярности t_0. При этом функция α продолжается тождественным нулем, а функция β становится равной $16(t_0-t)$, т. е. уходит в отрицательную область, и метрика (6) перестает быть римановой, более того, она перестает быть метрикой на четырехмерном многообразии. Тем не менее можно утверждать, что решение (9), проходя через сингулярность, обращается в решение (10). Неясно, можно ли найти содержательную интерпретацию данному эффекту, или это всего лишь погрешности численных экспериментов.

Заметим также, что упомянутый переход от решения (9) к решению (10) не имеет ничего общего с разрешением сингулярности с помощью нормализации потока Риччи, хотя бы потому что при данном переходе падает размерность многообразия. Напомним, что нормализованный поток Риччи имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2\operatorname{Ric}_{ij} + \frac{2}{n}\mathfrak{R} g_{ij},$$

где n — размерность многообразия, $\mathfrak{R}$ — усредненная скалярная кривизна. В нашем случае нормализованный поток примет вид

$$A_1' = -\frac{16}{3}\frac{A_1}{A_2^4}\big(A_1^2 - A_2^2\big), \quad A_2' = \frac{8}{3}\cdot\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^3},$$

поскольку функции A_1 и A_2 зависят только от времени и усреднять кривизну по сфере нет необходимости. Данные уравнения могут быть легко решены, особенно если помнить, что объем $\sqrt{\det(g)} = A_1 A_2^2$ под действием нормализованного потока Риччи сохраняется. По правым частям данной системы видно, что при $t \to \infty$ обе функции будут стремиться к одной константе, т. е. за бесконечное время опять получим круглую сферу.

Напомним, что метрика называется *антисамодуальной*, если ее форма связности удовлетворяет уравнению $\omega^i_j = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}\omega^k_l$, где ε_{ijkl} — антисимметрический символ Леви-Чивиты. У антисамодуальных метрик, как и у самодуальных, тензор Риччи автоматически обращается в нуль. В четырехмерном случае антисамодуальность сводится к паре уравнений $\omega^0_1 = -\omega^2_3$, $\omega^0_2 = \omega^1_3$, или в нашем случае

$$\frac{A_1'}{A_1} = -\frac{A_1^2 - 2A_2^2}{A_1 A_2^2}, \quad \frac{A_2'}{A_2} = \frac{A_1}{A_2^2}. \tag{12}$$

Хорошо известно, что уравнения (12) могут быть проинтегрированы в общем случае: таким образом была найдена классическая метрика Эгучи — Хансона [5]

$$ds^2 = [1 - (a/r)^4]^{-1}dr^2 + r^2((e^2)^2 + (e^3)^2) + r^2[1 - (a/r)^4](e^1)^2.$$

Данная метрика была первой метрикой с группой голономии $SU(2)$, выписанной в элементарных функциях. При r, стремящемся к a, метрика Эгучи — Хансона имеет особенность типа «болт», а при достаточно большом R множество $\{r = R\}$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$.

Несмотря на то, что правые части уравнений (12) выражаются через компоненты формы связности, они могут быть выражены и через компоненты тензора Риччи:

$$-\frac{A_1^2 - 2A_2^2}{A_1 A_2^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Ric}_{22}(\mathrm{Ric}_{11})^{-1/2}, \quad \frac{A_1}{A_2^2} = \frac{1}{2}(\mathrm{Ric}_{11})^{1/2}.$$

Таким образом, уравнения (12) эквивалентны потоку следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} g = \frac{1}{2}\sqrt{\det(\mathrm{Ric})}\,\mathrm{Ric}^{-1}. \tag{13}$$

Данный поток задан на трехмерной сфере, и его не нужно определять отдельно на слоях S^1 и базе S^2 расслоения Хопфа. К сожалению, получившийся поток имеет крайне неприятную правую часть. Это подтверждает наше предположение о том, что метрики, имеющие особенность типа «болт», не могут быть описаны геометрическими потоками с правой частью, зависящей от тензора Риччи некоторым «хорошим» образом. Заметим также, что при $A_1 = A_2$ в качестве решения будет выступать функция $f(t)$, рассмотренная ранее, а соответствующая метрика g будет метрикой плоского пространства. Это немедленно следует из того, что метрика плоского пространства антисамодуальна.

Теорема 2. *Пусть проективное пространство $\mathbb{R}P^3 = S^3/\mathbb{Z}_2$ с метрикой*

$$A_1^2(t)(e^1)^2 + A_2^2(t)((e^2)^2 + (e^3)^2)$$

изменяется под действием потока (13). *Тогда если $A_1(0) = 0$ и $A_2(0) = a$, то соответствующая метрика* (6) *изометрична метрике Эгучи — Хансона.*

Доказательство. Выше показано, что уравнения (12) эквивалентны потоку (13). Метрика Эгучи — Хансона была найдена путем интегрирования системы (12) [5]. Осталось понять, что, помимо метрики Эгучи — Хансона, у данной системы других решений нет. Это следует из подсчета свободных параметров. Из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений вытекает, что множество решений системы (12) параметризуется двумя величинами, а именно $A_1(0)$ и $A_2(0)$. Фиксируя начальные данные, как в формулировке теоремы, потребуем, чтобы при $t = 0$ окружность из расслоения Хопфа схлопнулась, а двумерная сфера имела радиус a. Переменные r и t связаны соотношением

$$\frac{r^2 dr}{\sqrt{r^4 - a^4}} = dt.$$

Будем считать, что константа интегрирования равна нулю, тогда очевидно, что переменная r определена на отрезке $[a, \infty)$, а переменная t — на отрезке $[0, \infty)$. Осталось заметить из вида метрики, что $A_2(r) = r$ и $A_1(r) = r^2[1 - (a/r)^4]$ и при $r = a$ начальные условия выполнены. Теорема доказана.

Так как рассмотренный поток (13) имеет крайне нелинейную правую часть, было бы естественно рассмотреть эволюционное уравнение, определенное на некоторых структурах, согласованных с расслоением Хопфа. Напомним, что 1-форма на $(2n+1)$-мерном многообразии называется *контактной*, если $\psi \wedge (d\psi)^n \neq 0$. Можно проверить, что

$$\varepsilon^1 \wedge d\varepsilon^1 = 2\frac{A_1}{A_2^2}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3,$$

здесь $d : \Lambda^i(S^3) \to \Lambda^{i+1}(S^3)$. Аналогично

$$\varepsilon^2 \wedge d\varepsilon^2 = 2\frac{1}{A_1}\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3.$$

Если рассмотреть уравнение

$$(*\psi)' = d\psi, \tag{14}$$

где $*$ — оператор Ходжа относительно ортонормированного репера $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$, то при $\psi = \varepsilon^1$ получим в точности второе уравнение из (12), а при $\psi = \varepsilon^2$ —

$$\left(\frac{A_1'}{A_1} + \frac{A_2'}{A_2}\right)\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1 = \frac{2}{A_1}\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^1.$$

Данное уравнение с учетом уравнения для $\psi = \varepsilon^1$ дает в точности первое уравнение из (12). Очевидно, что при подстановке $\psi = \varepsilon^3$ в (14) получится такое же уравнение. Поэтому можем сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3. *Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{R}P^3 = S^3/\mathbb{Z}_2$ с метрикой вида*

$$A_1^2(t)(e^1)^2 + A_2^2(t)((e^2)^2 + (e^3)^2) = (\varepsilon^1)^2 + (\varepsilon^2)^2 + (\varepsilon^3)^2,$$

порожденной тремя контактными 1-формами $\varepsilon^1 = A_1(t)e^1$, $\varepsilon^2 = A_2(t)e^2$, $\varepsilon^3 = A_2(t)e^3$, которые удовлетворяют потоку (14). Тогда при подходящих начальных условиях метрика

$$dt^2 + A_1^2(t)(e^1)^2 + A_2^2(t)((e^2)^2 + (e^3)^2)$$

изометрична метрике Эгучи — Хансона.

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы с заменой потока (13) уравнением (14). Теорема доказана.

Замечание о связи с группой голономии G_2. Мы должны упомянуть, что поток (14) был введен Хитчиным (см., например, [6]) с целью получить эволюционное уравнение на 3-форму ϕ_0, задающую G_2-структуру на семимерном многообразии. Он показал, что для достаточно малых времен t решение ϕ_t системы (14) определяет G_2-структуру.

Заметим также, что уравнения (12) после некоторых тривиальных замен могут быть сведены к системе, выписанной в [7]. В данной статье строились метрики с группой голономии G_2 на деформациях конусов над твисторным пространством семимерного 3-сасакиева многообразия.

Далее покажем, что поток Дирака имеет содержательные решения не только в случае, когда метрика зависит лишь от одного конформного фактора $f(t)$. В случае (6), когда g зависит от двух функциональных параметров A_1 и A_2, уравнения потока Дирака принимают вид

$$A_1' = \frac{A_1}{A_2^2}\sqrt{A_1^2 - KA_2^4}, \quad A_2' = \sqrt{2 - \frac{A_1^2}{A_2^2} - KA_2^2}. \tag{15}$$

Выберем стандартные ветви квадратного корня и исследуем систему (15) при $K = 0$:

$$A_1' = \frac{A_1^2}{A_2^2}, \quad A_2' = \sqrt{2 - \frac{A_1^2}{A_2^2}}. \tag{16}$$

Докажем, что при $T \to \infty$ секционные кривизны метрики $\bar{g}$ стремятся к нулю в области (T, ∞) для $K = 0$. Это будет следовать из того, что метрика $\bar{g}$ асимптотически коническая. При $K = \pm 1$ для точного анализа поведения решений потока используемая далее техника не дает результата.

Заметим, что если $K = 0$, то система (16) инвариантна относительно следующей подстановки:

$$A_1 \to \lambda A_1, \quad A_2 \to \lambda A_2, \quad t \to \tau,$$

где τ — новое время, связанное со старым через $dt = \lambda d\tau$. После данного замечания можем разделить нашу систему на две части: нормальную и тангенциальную. Этот метод значительным образом использовался в [7, 8]. Перепишем систему, используя следующие обозначения:

$$\frac{dR}{dt} = V(R),$$

где $R = (A_1, A_2)$, $V(R) = \left(\frac{A_1^2}{A_2^2}, \sqrt{2 - \frac{A_1^2}{A_2^2}}\right)$. Тогда тангенциальная часть примет вид

$$\frac{dS}{d\tau} = V(S) - \langle V(S), S\rangle S = W(S),$$

где $S = (\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau)) = \frac{1}{\lambda}R$ — проекция точки $R = (A_1(t), A_2(t))$ на единичную окружность. Нормальная часть примет вид

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{d\tau} = \langle V(S), S\rangle \, dt = \lambda \, d\tau.$$

Нули поля $W(S)$ определяют асимптотику на бесконечности начальной системы. Сначала будем предполагать, что $\alpha_2 \neq 0$. Формально правая часть системы (16) не определена при $A_2 = 0$, тем не менее можно подобрать сходимость к точке p функций A_1 и A_2 таким образом, что правая часть будет равна нулю. Такие точки p для более сложных систем назывались *условно стационарными* [7]. Остальные нули поля $W(S)$ называются *стационарными точками*.

Лемма. *Все стационарные точки системы* (16) — *это* $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *и* $\pm(0,1)$.

Доказательство проводится с помощью простых алгебраических вычислений. Выпишем координаты поля $W(S)$:

$$W(\alpha_1,\alpha_2) = \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}, \sqrt{2-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\right) - \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\alpha_1 + \sqrt{2-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}}\alpha_2\right)(\alpha_1,\alpha_2).$$

Тогда при условии $\alpha_2 \neq 0$ нули $W(S)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \alpha_1\big(\alpha_1 - \alpha_1^3 - \alpha_2^2\sqrt{2\alpha_2^2-\alpha_1^2}\big) = 0, \\ \sqrt{2\alpha_2^2-\alpha_1^2}\big(1-\alpha_2^2\big) - \alpha_1^3 = 0. \end{cases}$$

Как нетрудно заметить, нули данной системы указаны в утверждении леммы.

Теорема 4. *Рассмотрим на трехмерной сфере метрику вида*

$$\bar{g} = dt^2 + A_1^2(t)(e^1)^2 + A_2^2(t)((e^2)^2 + (e^3)^2) = dt^2 + g(t)$$

такую, что метрика $g(t)$ является решением потока Дирака с $K = 0$ и начальными данными $A_2(0) > A_1(0) > 0$. Тогда метрика $\bar{g}$ является полной асимптотически конической метрикой.

Доказательство теоремы начнем с рассмотрения сектора $\{(A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2 \mid A_2 > A_1 > 0\}$. Ясно, что граница сектора состоит из двух инвариантных траекторий системы. Первая траектория $A_1(t) = A_2(t) = t$ отвечает рассмотренному ранее случаю плоской метрики на $\mathbb{R}^4$, вторая траектория $A_1(t) \equiv 0$ — вырожденной трехмерной плоской метрике с особенностью: $dt^2 + 2t^2((e^2)^2 + (e^3)^2)$. Траектории системы (16) в секторе устроены следующим образом. Точка с координатами $(A_1(t), A_2(t))$ удаляется от начала координат, поскольку правая часть системы (16) строго положительна в секторе. Векторное поле W на дуге окружности направлено от точки $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ до $(0,1)$. Это несложно проверить, подставив, например, значения $\alpha_1 = \frac{3}{5}$ и $\alpha_2 = \frac{4}{5}$ в первую координату поля $W(S)$:

$$W_1\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{9}{25} - \frac{3}{25}\sqrt{23} < 0.$$

Поэтому проекция (α_1, α_2) точки (A_1, A_2) движется от $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ до $(0,1)$. Стало быть, сама траектория (A_1, A_2) выходит из начала координат с начальным вектором скорости $(1,1)$. Это гарантирует отсутствие особенности в начальный момент времени и полноту метрики. При этом на бесконечности

$$A_1' = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 \to 0, \quad A_2' \to \sqrt{2}.$$

Следовательно, на бесконечности функцию A_1 можно приблизить константой, а функцию A_2 — линейной функцией:

$$A_1(t) = \mathrm{const} + B_1(t), \quad A_2(t) = \sqrt{2}t + B_2(t),$$

где $\frac{B_1(t)}{t} \to 0$ и $\frac{B_2(t)}{t} \to 0$ при $t \to \infty$. Тем самым метрика асимптотически коническая. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что все коэффициенты в компонентах формы кривизны $\overline{\Omega}_j^i$ убывают не медленнее, чем $\frac{1}{t^2}$. Таким образом, определенный выше поток Дирака при $K = 0$ деформирует метрику, зависящую от двух функциональных параметров, на трехмерной сфере так, что заметаемая этой сферой часть четырехмерного пространства не имеет особенностей и при достаточно больших $t \in (T, \infty)$ имеет кривизну не более $\frac{1}{T^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Onda K.* The Ricci flow on 3-dimensional Lie groups and 4-dimensional Ricci-flat manifolds // Adv. Appl. Math. Sci. 2012. V. 11, N 3. P. 133–159.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии.. М.: Наука, 1981. Т. I, II.
3. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
4. *Gibbons G. W., Hawking S. W.* Classification of gravitational instanton symmetries // Comm. Math. Phys. 1979. V. 66, N 3. P. 291–310.
5. *Eguchi T., Hanson A. J.* Self-dual solutions to Euclidean gravity // Ann. Phys. 1979. V. 120, N 1. P. 82–106.
6. *Hitchin N.* Special holonomy and beyond // Strings and geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004. P. 159–175. (Clay Math. Proc.; V. 3).
7. *Базайкин Я. В., Малькович Е. Г.* Spin(7)-структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии $SU(4)$ // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 4. С. 3–30.
8. *Базайкин Я. В.* О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии Spin(7) // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 11–32.

Статья поступила 9 апреля 2015 г.

Малькович Евгений Геннадьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`malkovich@math.nsc.ru`