Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 511

РАСШИРЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ДЗЕТА–ФУНКЦИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Лауринчикас

Аннотация. Получены теоремы универсальности типа Воронина для некоторых классов сложных функций от набора функций, состоящего из периодических дзета-функций и периодических дзета-функций Гурвица с алгебраически независимыми параметрами.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.215

Ключевые слова: периодическая дзета-функция, периодическая дзета-функция Гурвица, предельная теорема, слабая сходимость, универсальность.

1. Введение

Пусть $s = \sigma + it$ — комплексная переменная, а $\zeta(s)$ обозначает дзета-функцию Римана. Давно известно, что множество значений функции $\zeta(s)$ очень обширно. Так, Бор вместе с Курантом [1] получили, что при $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ множество $\{\zeta(\sigma + it) : t \in \mathbb{R}\}$ всюду плотно в $\mathbb{C}$. С. М. Воронин в [2] распространил этот результат в пространство $\mathbb{C}^r$: он доказал, что при $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ множество $\{(\zeta(\sigma + it), \zeta'(\sigma + it), \dots, \zeta^{(r-1)}(\sigma + it)) : t \in \mathbb{R}\}$ всюду плотно в $\mathbb{C}^r$. Более того, в [3] он получил теорему универсальности для функции $\zeta(s)$, которую можно рассматривать как бесконечномерный вариант упомянутой теоремы Бора — Куранта.

Еще более интересной является совместная универсальность дзета-функций, при которой данный набор аналитических функций одновременно приближается сдвигами набора дзета-функций. Первый результат в этом направлении также принадлежит С. М. Воронину. В [4], изучая функциональную независимость Дирихле L-функций с попарно не эквивалентными характерами, он фактически получил их совместную универсальность.

Ясно, что совместная универсальность требует некоторой независимости набора дзета-функций. В случае L-функций Дирихле эта независимость выражается попарной неэквивалентностью характеров Дирихле. В [5] предложено, как из универсальности одной функции $\varphi(s)$ можно получить совместную универсальность функций $\varphi_j(s) = \varphi(s + \lambda_j)$, $j = 1, \dots, r$.

Универсальностью обладают и многие другие дзета-функции. Так, в [6] была получена совместная универсальность дзета-функций с периодическими коэффициентами, т. е. рассматривалось одновременное приближение набора аналитических функций сдвигами набора периодических дзета-функций и периодических дзета-функций Гурвица. Напомним определение этих дзета-функций.

Пусть $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ — периодическая с минимальным периодом $k \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел. Периодическая дзета-функция $\zeta(s; \mathfrak{a})$ при $\sigma > 1$ определяется рядом

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}$$

и аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением, быть может, точки $s = 1$, которая является ее простым полюсом с вычетом

$$a = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} a_m.$$

Если $a = 0$, то $\zeta(s; \mathfrak{a})$ — целая функция.

Пусть $\mathfrak{b} = \{b_m : m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ — другая периодическая с минимальным периодом $l \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел. Периодическая дзета-функция Гурвица $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{b})$ с параметром α, $0 < \alpha \leq 1$, при $\sigma > 1$ определяется рядом

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m + \alpha)^s}.$$

Она, как и $\zeta(s; \mathfrak{a})$, также аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, за исключением, быть может, точки $s = 1$, которая является ее простым полюсом с вычетом

$$b = \frac{1}{l} \sum_{m=0}^{l-1} b_m.$$

Если $b = 0$, то $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{b})$ — целая функция.

Напомним результат из [6]. Пусть $\mathfrak{a}_j = \{a_{jm} : m \in \mathbb{N}_0\}$ — периодическая с наименьшим периодом $k_j \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел, а $\zeta(s; \mathfrak{a}_j)$ — соответствующая периодическая дзета-функция, $j = 1, \ldots, r_1$. Через $k = [k_1, \ldots, k_{r_1}]$ обозначим наименьшее общее кратное чисел $k_1, \ldots, k_{r_1}$, через $\eta_1, \ldots, \eta_{\varphi(k)}$ — приведенную систему вычетов по модулю k и определим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\eta_1} & a_{2\eta_1} & \ldots & a_{r_1\eta_1} \\ a_{1\eta_2} & a_{2\eta_2} & \ldots & a_{r_1\eta_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1\eta_{\varphi(k)}} & a_{2\eta_{\varphi(k)}} & \ldots & a_{r_1\eta_{\varphi(k)}} \end{pmatrix},$$

где $\varphi(k)$ — функция Эйлера. Пусть $\mathfrak{b}_j = \{b_{jm} : m \in \mathbb{N}\}$ — другая периодическая с наименьшим периодом $l_j \in \mathbb{N}$ последовательность комплексных чисел, а $\zeta(s, \alpha_j; \mathfrak{b}_j)$, $0 < \alpha_j \leq 1$, — соответствующая периодическая дзета-функция Гурвица, $j = 1, \ldots, r_2$. Кроме того, предположим, что для всех простых p выполняются неравенства

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|a_{jp^\alpha}|}{p^{\alpha/2}} \leq c_j < 1, \quad j = 1, \ldots, r_1. \tag{1}$$

Отметим, что техническое условие (1) можно заменить более сильным, но простым условием $\max(|a_{jm}| : 1 \leq m \leq k) < \sqrt{2} - 1$, $j = 1, \ldots, r$. Пусть $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. Через $\mathscr{K}$ обозначим класс компактных подмножеств полосы D, обладающих связным дополнением, через $H_0(K)$ и $H(K)$, $K \in \mathscr{K}$, — классы непрерывных, не имеющих нулей в K, и непрерывных в K соответственно и аналитических внутри K функций, а через $\operatorname{mes} A$ — меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$. Основным результатом в [6] является

Теорема A. *Предположим, что последовательности* $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{r_1}$ *мультипликативны,* $\operatorname{rank}(A) = r_1$, *выполняются неравенства* (1), *а числа* $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ *алгебраически независимы над полем* $\mathbb{Q}$. *При* $j = 1, \dots, r_1$ *пусть* $K_j \in \mathscr{K}$ *и* $f_j(s) \in H_0(K_j)$, *а при* $j = 1, \dots, r_2$ *пусть* $\widehat{K}_j \in \mathscr{K}$ *и* $\hat{f}_j(s) \in H(K)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{mes}\Big\{\tau \in [0, T] : \sup_{1\le j\le r_1} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s+i\tau; \mathfrak{a}_j) - f_j(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{1\le j\le r_2} \sup_{s\in \widehat{K}_j} |\zeta(s+i\tau, \alpha_j; \mathfrak{b}_j) - \hat{f}_j(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Большинство результатов об универсальности дзета-функций и ее приложениях можно найти в [7–10], а также в [11–13].

Настоящая работа посвящена универсальности сложных функций

$$F(\zeta(s; \mathfrak{a}_1), \dots, \zeta(s, \mathfrak{a}_{r_1}), \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{b}_1), \dots, \zeta(s, \alpha_{r_2}; \mathfrak{b}_{r_2}))$$

для некоторых классов операторов F.

Пусть $r = r_1 + r_2$. Определим некоторые классы операторов в пространстве $H^r(D)$. Начнем с приближения функций класса $H(K)$, $K \in \mathscr{K}$. В этом случае не требуется, чтобы приближаемая функция содержалась в образе множества $S^{r_1} \times H^{r_2}(D)$ оператора $F : H^r(D) \to H(D)$.

Будем говорить, что оператор $F : H^r(D) \to H(D)$ *принадлежит классу* $\operatorname{Lip}(\beta_1, \dots, \beta_r)$, $\beta_1 > 0, \dots, \beta_r > 0$, если выполняются следующие условия.

1°. Для любого многочлена $p = p(s)$ и любых множеств $K_1, \dots, K_{r_1} \in \mathscr{K}$ существует элемент $\underline{g} = (g_1, \dots, g_{r_1}, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_{r_2}) \in F^{-1}\{p\} \subset H^r(D)$ такой, что $g_j(s) \ne 0$ в K_j, $j = 1, \dots, r_1$.

2°. Для всех $K \in \mathscr{K}$ существуют константа $c > 0$ и множества $K_1, \dots, K_r \in \mathscr{K}$ такие, что для всех $(g_{j1}, \dots, g_{jr}) \in H^r(D)$, $j = 1, 2$,

$$\sup_{s\in K} |F(g_{11}(s), \dots, g_{1r}(s)) - F(g_{21}(s), \dots, g_{2r}(s))| \le c \sup_{1\le j\le r} \sup_{s\in K_j} |g_{1j}(s) - g_{2j}(s)|^{\beta_j}.$$

Теорема 1. *Предположим, что* $F \in \operatorname{Lip}(\beta_1, \dots, \beta_r)$, *последовательности* $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{r_1}$ *мультипликативны,* $\operatorname{rank}(A) = r_1$, *выполняются неравенства* (1), *а числа* $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ *алгебраически независимы над полем* $\mathbb{Q}$. *Пусть* $K \in \mathscr{K}$ *и* $f(s) \in H(K)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{mes}\Big\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau; \mathfrak{a}_1), \dots, \zeta(s+i\tau; \mathfrak{a}_{r_1}),$$
$$\zeta(s+i\tau, \alpha_1; \mathfrak{b}_1), \dots, \zeta(s+i\tau, \alpha_{r_2}; \mathfrak{b}_{r_2})) - f(s)| < \varepsilon\Big\} > 0.$$

Приведем пример класса $\operatorname{Lip}(\beta_1, \dots, \beta_r)$. Пусть при $(g_1, \dots, g_{r_1}, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_{r_2}) \in H^r(D)$

$$F(g_1, \dots, g_{r_1}, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_{r_2}) = c_1 g_1^{(n_1)} + \dots + c_{r_1} g_{r_1}^{(n_{r_1})} + \hat{c}_1 \hat{g}_1^{(\hat{n}_1)} + \dots + \hat{c}_{r_2} \hat{g}_{r_2}^{(\hat{n}_{r_2})},$$

где $c_1, \dots, c_{r_1}, \hat{c}_1, \dots, \hat{c}_{r_2} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, а $n_1, \dots, n_{r_1}, \hat{n}_1, \dots, \hat{n}_{r_2} \in \mathbb{N}$. Как легко видеть, для любого многочлена $p = p(s)$ существует такой элемент $\underline{g} \in F^{-1}\{p\}$, что $g_j(s) \ne 0$ в K_j, $j = 1, \dots, r_1$. Например, если $p(s) = a_n s^n + \dots + a_0$, $a_n \ne 0$, то можно взять $\underline{g} = (1, \dots, 1, 1, \dots, 1, \hat{g}_{r_2})$ с

$$\hat{g}_{r_2}(s) = \frac{1}{\hat{c}_{r_2}} \left(\frac{a_n s^{n+\hat{n}_{r_2}}}{(n+1)\dots(n+\hat{n}_{r_2})} + \dots + \frac{a_0 s^{\hat{n}_{r_2}}}{1\dots\hat{n}_{r_2}} \right).$$

Таким образом, условие 1° класса $\mathrm{Lip}(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ выполняется.

Условие 2° класса $\mathrm{Lip}(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ является следствием интегральной формулы Коши. Пусть $K \in \mathscr{K}$, а $K \subset G \subset K_1$, где G — открытое множество и $K_1 \in \mathscr{K}$. Берем простой замкнутый контур L, лежащий в $K_1 \backslash G$ и окаймляющий множество K. Тогда в силу интегральной формулы Коши находим, что при $(g_{j1}, \ldots, g_{jr}) \in H^r(D)$, $j = 1, 2$, и $s \in K$ (для упрощения обозначений считаем, что $\hat{c}_j \hat{g}_j^{(\hat{n}_j)} = c_{j+r_1} g_{j+r_1}^{(n_{j+r_1})}$ при $j = 1, \ldots, r_2$)

$$|F(g_{11}(s), \ldots, g_{1r}(s)) - F(g_{21}(s), \ldots, g_{2r}(s))| = \left| \sum_{j=1}^{r} c_j \frac{n_j!}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g_{1j}(z) - g_{2j}(z)}{(z-s)^{n_j+1}}\, dz \right|$$
$$\leq \sum_{j=1}^{r} |c_j| C_j \sup_{s \in L} |g_{1j}(s) - g_{2j}(s)| \leq c \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_1} |g_{1j}(s) - g_{2j}(s)|$$

с некоторыми константами $C_j > 0$, $j = 1, \ldots, r$, и $c > 0$. Таким образом, $F \in \mathrm{Lip}(1, \ldots, 1)$. В этом случае $K_1, \ldots, K_r = K_1$.

Условие 2° класса $\mathrm{Lip}(\beta_1, \ldots, \beta_r)$ можно ослабить.

2°a. Для любого $K \in \mathscr{K}$ существуют множества $K_1, \ldots, K_r \in \mathscr{K}$ такие, что для всех $(g_{j1}, \ldots, g_{jr}) \in H^r(D)$, $j = 1, 2$,

$$\sup_{s \in K} |F(g_{11}(s), \ldots, g_{1r}(s)) - F(g_{21}(s), \ldots, g_{2r}(s))| \leq \hat{c} \sup_{1 \leq j \leq r} \sup_{s \in K_j} |g_{1j}(s) - g_{2j}(s)|^{\beta_j}$$

с некоторой константой $\hat{c} = \hat{c}(K_j, j = 1, \ldots, r; g_{2j}, j = 1, \ldots, r) > 0$. Новый класс операторов $F : H^r(D) \to H(D)$ обозначим через $\widehat{\mathrm{Lip}}(\beta_1, \ldots, \beta_r)$.

Пусть $F : H^r(D) \to H(D)$ определяется формулой

$$F(g_1, \ldots, g_r) = \sum_{j=1}^{r} g_j^2, \quad g_1, \ldots, g_r \in H^r(D).$$

Тогда для любого многочлена $p = p(s)$ найдется элемент $\underline{g} \in F^{-1}\{p\}$ такой, что $g_j(s) \neq 0$ в K_j, $j = 1, \ldots, r_1$. В самом деле, можем найти число $C > 0$ такое, что $p(s) \pm C \neq 0$ в K_j, $j = 1, \ldots, r_1$. Определим

$$\hat{r} = \begin{cases} r, & \text{если } r \text{ — четное число,} \\ r - 1, & \text{если } r \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Полагая

$$g_{2j-1}(s) = \frac{p(s) + C}{2\sqrt{\hat{r}C}}, \quad g_{2j}(s) = \frac{p(s) - C}{2i\sqrt{\hat{r}C}}, \quad j = 1, \ldots, \frac{\hat{r}}{2},$$

и $g_r(s) = 0$ при нечетном r, имеем

$$\sum_{j=1}^{r} g_j^2 = p(s)$$

и $g_j(s) \neq 0$ в K_j, $j = 1, \ldots, r_1$. Следовательно, оператор F удовлетворяет условию 1° класса $\widehat{\mathrm{Lip}}(\beta_1, \ldots, \beta_r)$.

Легко видеть, что для этого оператора

$$
\begin{aligned}
&\sup_{s\in K}|F(g_{11}(s),\dots,g_{1r}(s))-F(g_{21}(s),\dots,g_{2r}(s))| \\
&\qquad\le \sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}(|g_{1j}(s)|+|g_{2j}(s)|)|g_{1j}(s)-g_{2j}(s)| \\
&\le \sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}|g_{1j}(s)-g_{2j}(s)|^2+2\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}|g_{2j}(s)||g_{1j}(s)-g_{2j}(s)| \\
&\le (1+2\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}|g_{2j}(s)|)\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}|g_{1j}(s)-g_{2j}(s)| \\
&\le \hat{c}(K_1,\dots,K_r;g_{2j},j=1,\dots,r)\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}|g_{1j}(s)-g_{2j}(s)|
\end{aligned}
$$

для всех $K\in\mathscr{K}$ и $(g_{j1},\dots,g_{jr})\in H^r(D)$ с $K_1,\dots,K_r=K$ и константой $\hat{c}(K_1,\dots,K_r;g_{2j},j=1,\dots,r)=1+2\sup\limits_{1\le j\le r}\sup\limits_{s\in K}|g_{2j}(s)|$ при условии, что

$$
\sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}|g_{1j}(s)-g_{2j}(s)|^2\le \sup_{1\le j\le r}\sup_{s\in K}|g_{1j}(s)-g_{2j}(s)|.
$$

Ниже приводим некоторые модификации теоремы 1.

Пусть $S=\{g\in H(D):g(s)\ne 0$ или $g(s)\equiv 0\}$.

Теорема 2. *Предположим, что последовательности $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_{r_1}$ и числа $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_2}$ удовлетворяют условиям теоремы* 1, *а $F:H^r(D)\to H(D)$ — непрерывный оператор такой, что для любого открытого множества $G\subset H(D)$ множество $(F^{-1}G)\cap(S^{r_1}\times H^{r_2}(D))$ непусто. Тогда имеет место утверждение теоремы* 1.

Условие теоремы 2, что $(F^{-1}G)\cap(S^{r_1}\times H^{r_2}(D))\ne\varnothing$ для любого открытого множества $G\subset H(D)$, общее, но трудно проверяемое. Например, оно выполняется, если каждый элемент пространства $H(D)$ имеет прообраз в $S^{r_1}\times H^{r_2}(D)$. С другой стороны, теорема 2 позволяет получить следующую модификацию теоремы 1.

Следствие 1. *Предположим, что последовательности $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_{r_1}$ и числа $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_2}$ удовлетворяют условиям теоремы* 1, *а $F:H^r(D)\to H(D)$ — непрерывный оператор такой, что для любого многочлена $p=p(s)$ множество $(F^{-1}\{p\})\cap(S^{r_1}\times H^{r_2}(D))$ непусто. Тогда имеет место утверждение теоремы* 1.

Легко видеть, что из условия 2° класса $\mathrm{Lip}(\beta_1,\dots,\beta_r)$ вытекает непрерывность оператора F, но условие 1° слабее условия

$$
(F^{-1}\{p\})\cap(S^{r_1}\times H^{r_2}(D))\ne\varnothing.
$$

Необращение многочлена в нуль в ограниченной области можно контролировать его свободным членом. Поэтому в некоторых случаях удобнее рассматривать операторы F в пространстве $H^r(D_V,D)=H^{r_1}(D_V)\times H^{r_2}(D)$, где при $V>0$

$$
D_V=\left\{s\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<\sigma<1,\ |t|<V\right\}.
$$

Пусть еще $S_V=\{g\in H(D_V):g(s)\ne 0$ или $g(s)\equiv 0\}$. Например, рассуждая, как в доказательствах теоремы 2 и следствия 1, нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что последовательности* $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{r_1}$ *и числа* $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1, $K \in \mathscr{K}$, $f(s) \in H(K)$, *а* $V > 0$ *такое, что* $K \subset D_V$. *Пусть* $F : H^r(D_V, D) \to H(D_V)$ *— непрерывный оператор такой, что для любого многочлена* $p = p(s)$ *множество* $(F^{-1}\{p\}) \cap \big(S_V^{r_1} \times H^{r_2}(D)\big)$ *непусто. Тогда имеет место утверждение теоремы* 1.

Теорема может быть применена, например, в случае оператора

$$F(g_1, \dots, g_{r_1}, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_{r_2}) = c_1 g_1^{(n_1)} + \dots + c_{r_1} g_{r_1}^{(n_{r_1})}, \quad n_1, \dots, n_{r_1} \in \mathbb{N}.$$

Займемся приближением аналитических в D функций, содержащихся в образе множества $S^{r_1} \times H^{r_2}(D)$ оператора $F : H^r(D) \to H(D)$.

Имеет место следующее общее утверждение.

Теорема 4. *Предположим, что последовательности* $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{r_1}$ *и числа* $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1, *а оператор* $F : H^r(D) \to H(D)$ *непрерывен. Пусть* $K \subset D$ *— компактное множество, а* $f(s) \in F(S^{r_1} \times H^{r_2}(D))$. *Тогда имеет место утверждение теоремы* 1.

Найти образ оператора F непросто. Следующая теорема является примером, когда образ множества $S^{r_1} \times H^{r_2}(D)$ содержит достаточно простое множество. Это позволяет найти примеры некоторых операторов F со свойством универсальности.

Пусть $a_1, \dots, a_m$ — различные комплексные числа, а

$$H_m(D) = \{g \in H(D) : (g(s) - a_j)^{-1} \in H(D),\ j = 1, \dots, m\}.$$

Теорема 5. *Предположим, что последовательности* $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{r_1}$ *и числа* $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_2}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1, *а* $F : H^r(D) \to H(D)$ *— непрерывный оператор такой, что* $F(S^{r_1} \times H^{r_2}(D)) \supset H_m(D)$. *Если* $m = 1$, *то пусть* $K \in \mathscr{K}$, $f(s) \in H(K)$ *и* $f(s) \neq a_1$ *в* K. *Если* $m \geq 2$, *то пусть* $K \subset D$ *— любое компактное множество, а* $f(s) \in H_m(D)$. *Тогда имеет место утверждение теоремы* 1.

Например, если $m = 2$ и $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, то из теоремы 5 следует универсальность тригонометрических функций $\sin(\zeta(s; \mathfrak{a}) + \zeta(s, \alpha; \mathfrak{b}))$ и $\cos(\zeta(s; \mathfrak{a}) + \zeta(s, \alpha; \mathfrak{b}))$. Для этого в случае функции $\sin(\cdot)$ достаточно решить уравнение

$$\frac{e^{i(g_1+g_2)} - e^{-i(g_1+g_2)}}{2i} = f, \quad f \in H_2(D),\ a_1 = 1,\ a_2 = -1.$$

2. Вспомогательные утверждения

Доказательства всех теорем, за исключением теоремы 1, используют вероятностный подход, основанный на слабой сходимости вероятностных мер в пространстве аналитических функций. Мы будем развивать метод из [14] для сложных функций $F(\zeta(s; \mathfrak{a}_1), \dots, \zeta(s; \mathfrak{a}_{r_1}), \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{b}_1), \dots, \zeta(s, \alpha_{r_2}; \mathfrak{b}_{r_2}))$. Исходной точкой нашего исследования является теорема 2 в [6]. Для ее формулировки нужны некоторые обозначения.

Пусть $\mathscr{B}(X)$ — класс борелевских множеств пространства X, $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ — единичная окружность на комплексной плоскости,

$$\Omega = \prod_{p \in \mathscr{P}} \gamma_p, \quad \widehat{\Omega} = \prod_{m \in \mathbb{N}_0} \gamma_m,$$

где $\mathscr{P}$ — множество всех простых чисел, а $\gamma_p = \gamma$ для всех $p \in \mathscr{P}$ и $\gamma_m = \gamma$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$. В силу известной теоремы Тихонова бесконечномерные торы Ω и

$\widehat{\Omega}$ с топологией произведения и операцией поточечного перемножения являются компактными топологическими абелевыми группами. Определим

$$\underline{\Omega} = \Omega \times \widehat{\Omega}_1 \times \cdots \times \widehat{\Omega}_{r_2},$$

где $\widehat{\Omega}_j = \widehat{\Omega}$ для всех $j = 1, \ldots, r_2$. Тогда $\underline{\Omega}$ опять в силу теоремы Тихонова является компактной топологической группой. Это приводит к вероятностному пространству $(\underline{\Omega}, \mathscr{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$, где $\underline{m}_H$ — вероятностная мера Хаара на $(\underline{\Omega}, \mathscr{B}(\underline{\Omega}))$. Через $\omega(p)$ обозначим проекцию элемента $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_p, $p \in \mathscr{P}$, а через $\widehat{\omega}_j(m)$ — проекцию элемента $\widehat{\omega}_j \in \widehat{\Omega}_j$, $j = 1, \ldots, r_2$, на координатное пространство γ_m, $m \in \mathbb{N}_0$. Продолжим функцию $\omega(p)$ на все множество $\mathbb{N}$, полагая

$$\omega(m) = \prod_{p^k \| m} \omega^k(p), \quad m \in \mathbb{N},$$

где $p^k \| m$ означает, что $p^k \mid m$, но $p^{k+1} \nmid m$.

Пусть для краткости $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_2})$, $\underline{\omega} = (\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{r_2})$, $\underline{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r_1})$, $\underline{\mathfrak{b}} = (\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{r_2})$, и на вероятностном пространстве $(\underline{\Omega}, \mathscr{B}(\underline{\Omega}), \underline{m}_H)$ определим $H^r(D)$-значный случайный элемент $\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathfrak{a}}; \underline{\mathfrak{b}})$ формулой

$$\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}; \underline{\omega}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathfrak{b}}) = (\zeta(s, \omega; \mathfrak{a}_1), \ldots, \zeta(s, \omega; \mathfrak{a}_{r_1}), \zeta(s, \alpha_1, \omega_1; \mathfrak{b}_1), \ldots, \zeta(s, \alpha_{r_2}, \omega_{r_2}; \mathfrak{b}_{r_2})),$$

где

$$\zeta(s, \omega; \mathfrak{a}_j) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{mj}\omega(m)}{m^s}, \quad j = 1, \ldots, r_1,$$

$$\zeta(s, \alpha_j, \omega_j; \mathfrak{b}_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_{mj}\widehat{\omega}_j(m)}{(m + \alpha_j)^s}, \quad j = 1, \ldots, r_2.$$

Через $P_{\underline{\zeta}}$ обозначим распределение случайного элемента $\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathfrak{b}})$, т. е.

$$P_{\underline{\zeta}}(A) = \underline{m}_H(\underline{\omega} \in \underline{\Omega} : \underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}, \underline{\omega}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathfrak{b}}) \in A), \quad A \in \mathscr{B}(H^r(D)).$$

Пусть еще

$$\underline{\zeta}(s, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathfrak{b}}) = (\zeta(s; \mathfrak{a}_1), \ldots, \zeta(s; \mathfrak{a}_{r_1}), \zeta(s, \alpha_1; \mathfrak{b}_1), \ldots, \zeta(s, \alpha_{r_2}; \mathfrak{b}_{r_2})).$$

Тогда имеем следующую предельную теорему [6, теорема 2].

Лемма 1. *Предположим, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_2}$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{Q}$. Тогда мера*

$$P_T(A) = \frac{1}{T} \operatorname{mes}\{\tau \in [0, T] : \underline{\zeta}(s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathfrak{b}}) \in A\}, \quad A \in \mathscr{B}(H^r(D)),$$

при $T \to \infty$ слабо сходится к $P_{\underline{\zeta}}$.

Для дальнейшего будет полезен следующий хорошо известный факт теории слабой сходимости вероятностных мер. Пусть S_1 и S_2 — два метрических пространства. Напомним, что отображение $h : S_1 \to S_2$ называется $(\mathscr{B}(S_1), \mathscr{B}(S_2))$-*измеримым*, если $h^{-1}A \in \mathscr{B}(S_1)$ для любого множества $A \in \mathscr{B}(S_2)$. Известно, что непрерывность отображения h влечет за собой его $(\mathscr{B}(S_1), \mathscr{B}(S_2))$-измеримость. Предположим, что отображение h является $(\mathscr{B}(S_1), \mathscr{B}(S_2))$-измеримым. Тогда всякая вероятностная мера P на $(S_1, \mathscr{B}(S_1))$ индуцирует единственную вероятностную меру Ph^{-1} на $(S_2, \mathscr{B}(S_2))$, определяемую формулой

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), \quad A \in \mathscr{B}(S_2).$$

При этом имеет место

Лемма 2. *Предположим, что P_n, $n \in \mathbb{N}$, и P — вероятностные меры на $(S_1, \mathscr{B}(S_1))$, а отображение $h : S_1 \to S_2$ непрерывно. Если P_n при $n \to \infty$ слабо сходится к P, то $P_n h^{-1}$ при $n \to \infty$ также слабо сходится к Ph^{-1}.*

Лемма является частным случаем теоремы 5.1 из [15].

Из лемм 1 и 2 вытекает

Лемма 3. *Предположим, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_2}$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$, а оператор $F : H^r(D) \to H(D)$ непрерывен. Тогда мера*

$$P_{T,F}(A) = \frac{1}{T} \operatorname{mes}\{\tau \in [0,T] : F(\underline{\zeta}(s+i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathfrak{b}})) \in A\}, \quad A \in \mathscr{B}(H(D)),$$

слабо сходится к $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$ при $T \to \infty$.

При использовании в доказательстве универсальности вероятностных предельных теорем в пространстве аналитических функции требуется явный вид носителя предельной меры в этих теоремах.

Пусть X — сепарабельное метрическое пространство, а P — вероятностная мера на $(X, \mathscr{B}(X))$. Напомним, что *носителем меры* P называется минимальное замкнутое множество $X_P \subset X$ такое, что $P(X_P) = 1$. Множество X_P состоит из всех точек $x \in X$ таких, что для всякой открытой окрестности G точки x выполняется неравенство $P(G) > 0$. В [6, теорема 16] получен следующий результат.

Лемма 4. *Предположим, что последовательности $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r_1}$ мультипликативны,* $\operatorname{rank}(A) = r_1$, *выполняются неравенства* (1), *а числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_2}$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$. Тогда носителем меры $P_{\underline{\zeta}}$ является множество $S^{r_1} \times H^{r_2}(D)$.*

Используя лемму 4, получим явный вид носителя меры $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$ для непрерывных операторов $F : H^r(D) \to H(D)$.

Лемма 5. *Предположим, что последовательности $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r_1}$ мультипликативны,* $\operatorname{rank}(A) = r_1$, *выполняются неравенства* (1), *числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_2}$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$, а оператор $F : H^r(D) \to H(D)$ непрерывен. Тогда носителем меры $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$ является замыкание множества $F(S^{r_1} \times H^{r_2}(D))$.*

Доказательство. Пусть g — произвольный элемент множества $F(S^{r_1} \times H^{r_2}(D))$, а G — некоторая открытая его окрестность. Тогда $F^{-1}G$ — открытая окрестность некоторого элемента множества $S^{r_1} \times H^{r_2}(D)$. Поэтому из леммы 4 следует, что $P_{\underline{\zeta}}(F^{-1}G) > 0$. Отсюда вытекает неравенство $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}(G) > 0$. Кроме того, опять в силу леммы 4 имеем

$$P_{\underline{\zeta}} F^{-1}(F(S^{r_1} \times H^{r_2}(D))) = P_{\underline{\zeta}}(S^{r_1} \times H^{r_2}(D)) = 1.$$

Следовательно, носителем меры $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$ является замыкание множества $F(S^{r_1} \times H^{r_2}(D))$.

В дальнейшем будет очень полезной теорема Мергеляна о приближении аналитических функций многочленами. Мы ее формулируем в виде следующей леммы.

Лемма 6. *Предположим, что $K \subset \mathbb{C}$ — компактное множество, обладающее связным дополнением. Тогда всякая функция $f(s)$, непрерывная в K и аналитическая внутри K, равномерно в K приближается многочленами от s.*

Доказательство см. в [16], а также в [17].

Еще будет полезным эквивалент слабой сходимости вероятностных мер в терминах открытых множеств.

Лемма 7. *Пусть P_n, $n \in \mathbb{N}$, и P — вероятностные меры на $(X, \mathscr{B}(X))$. Тогда P_n слабо сходится к P при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда для любого открытого множества $G \subset X$*

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G).$$

Лемма является частью теоремы 2.1 из [15], где содержится ее доказательство.

3. Доказательства теорем универсальности

Теорема 1 выводится непосредственно из теоремы А с применением определения класса $\mathrm{Lip}(\beta_1, \dots, \beta_r)$.

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 6 существует многочлен $p = p(s)$ такой, что

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Условие 1° класса $\mathrm{Lip}(\beta_1, \dots, \beta_r)$ для любых $K_1, \dots, K_{r_1} \in \mathscr{K}$ влечет за собой существование элемента $\underline{g} = (g_1, \dots, g_{r_1}, \hat{g}_1, \dots, \hat{g}_{r_2}) \in F^{-1}\{p\}$ такого, что $g_j(s) \neq 0$ в K_j, $j = 1, \dots, r_1$. Предположим, что $\tau \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{gathered} \sup_{1\leq j\leq r_1} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s + i\tau; \mathfrak{a}_j) - g_j(s)| < c^{-\frac{1}{\beta}} (\epsilon/4)^{\frac{1}{\beta}}, \\ \sup_{1\leq j\leq r_2} \sup_{s\in \widehat{K}_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{b}_j) - \hat{g}_j(s)| < c^{-\frac{1}{\beta}} (\epsilon/4)^{\frac{1}{\beta}}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $K_1, \dots, K_{r_1}$, $\widehat{K}_1, \dots, \widehat{K}_{r_2} \in \mathscr{K}$ соответствуют множеству K в условии 2° класса $\mathrm{Lip}(\beta_1, \dots, \beta_r)$, а $\beta = \min\limits_{1\leq j\leq r} \beta_j$. Тогда в силу условия 2° класса $\mathrm{Lip}(\beta_1, \dots, \beta_r)$ для τ, удовлетворяющих неравенствам (3), имеем

$$\begin{aligned} \sup_{s\in K} |F(\underline{\zeta}(s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathfrak{b}})) - p(s)| &\leq c \sup_{1\leq j\leq r_1} \sup_{s\in K_j} |\zeta(s + i\tau; \mathfrak{a}_j) - g_j(s)|^{\beta_j} \\ &+ c \sup_{1\leq j\leq r_2} \sup_{s\in \widehat{K}_j} |\zeta(s + i\tau, \alpha_j; \mathfrak{b}_j) - \hat{g}_j(s)|^{\beta_j} \leq 2cc^{-\frac{\beta}{\beta}} (\epsilon/4)^{\frac{\beta}{\beta}} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Из теоремы А следует, что множество тех τ, для которых справедливы неравенства (3), имеет положительную нижнюю плотность. Отсюда и из неравенства (4) заключаем, что

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{mes}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |F(\underline{\zeta}(s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathfrak{b}})) - p(s)| < \epsilon/2\} > 0.$$

Это неравенство вместе с неравенством (2) приводит к неравенству

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{mes}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |F(\underline{\zeta}(s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathfrak{b}})) - f(s)| < \epsilon\} > 0.$$

Теорема доказана.

Доказательство в случае класса $\widehat{\mathrm{Lip}}(\beta_1, \dots, \beta_r)$ проводится аналогично с очевидными изменениями.

Доказательства остальных теорем универсальности используют предельные теоремы о слабой сходимости вероятностных мер в пространстве аналитических функций.

Доказательство теоремы 2. Легко видеть, что в условиях теоремы 2 носителем меры $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$ является все пространство $H(D)$. Действительно, из условия $(F^{-1}G) \cap (S^{r_1} \times H^{r_2}(D)) \neq \varnothing$, справедливого для любого открытого множества $G \in H(D)$, для любого элемента $g \in H(D)$ и любой его открытой окрестности G найдется элемент множества $F(S^{r_1} \times H^{r_2}(D))$, принадлежащий множеству G. Отсюда вытекает, что множество $F(S^{r_1} \times H^{r_2}(D))$ всюду плотно в $H(D)$, и остается воспользоваться леммой 5.

В силу леммы 6 существует многочлен $p(s)$ такой, что выполняется неравенство (2). Пусть

$$G = \{g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - p(s)| < \epsilon/2\}.$$

Тогда G — открытая окрестность многочлена $p(s)$. Так как $p(s)$ принадлежит носителю меры $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$, то $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(G) > 0$. Следовательно, из лемм 3 и 7 вытекает, что

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{mes}\{\tau \in [0,T] : F(\underline{\zeta}(s+i\tau; \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}; \underline{\mathfrak{b}})) \in G\} \geq P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(G) > 0.$$

Отсюда и из определения множества G получаем

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{mes}\{\tau \in [0,T] : \sup_{s \in K} |F(\underline{\zeta}(s+i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}; \underline{\mathfrak{b}})) - p(s)| \leq \epsilon/2\} > 0.$$

Это неравенство вместе с неравенством (2) приводит к утверждению теоремы.

Известно (см., например, [18]), что существует последовательность компактных множеств $\{K_l : l \in \mathbb{N}\} \subset D$ такая, что $K_l \subset K_{l+1}$ для всех $l \in \mathbb{N}$, $D = \bigcup\limits_{l=1}^{\infty} K_l$, и для любого компактного множества $K \subset D$ существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что $K \subset K_l$. Для $g_1, g_2 \in H(K)$ положим

$$\rho(g_1, g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup\limits_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup\limits_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}.$$

Тогда ρ является метрикой в пространстве $H(D)$, индуцирующей его топологию равномерной сходимости на компактах.

Пусть ϵ — произвольное положительное число. Фиксируем $l \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{l > l_0} 2^{-l} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5}$$

Теперь если

$$\sup_{s \in K_{l_0}} |g_1(s) - g_2(s)| < \frac{\epsilon}{2},$$

то ввиду соотношения $K_l \subset K_{l+1}$, $l \in \mathbb{N}$, имеем

$$\sup_{s \in K_l} |g_1(s) - g_2(s)| < \frac{\epsilon}{2}$$

для всех $l = 1, \ldots, l_0$. Это неравенство вместе с (5) показывает, что функция g_2 с заданной точностью приближается функцией g_1 в пространстве $H(D)$, если g_2 с подходящей точностью приближается функцией g_1 равномерно в K_l для достаточно большого l. Ясно, что множества K_l можем выбрать так, чтобы они обладали связными дополнениями. Следовательно, в пространстве $H(D)$ можем ограничиться рассмотрением приближения функций на компактных множествах, обладающих связными дополнениями.

Доказательство следствия 1. Покажем, что из условий следствия вытекает условие теоремы 2. Пусть $G \in H(D)$ — любое непустое открытое множество. Из предыдущего замечания о приближении в пространстве $H(D)$ и леммы 6 следует, что найдется многочлен $p = p(s)$, лежащий в множестве G. Отсюда и из условия $(F^{-1}\{p\}) \cap (S^{r_1} \times H^{r_2}(D)) \neq \varnothing$ следствия получаем $(F^{-1}G) \cap (S^{r_1} \times H^{r_2}(D)) \neq \varnothing$ — условие теоремы 2.

Доказательство теоремы 4. Определим множество

$$G = \{g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| < \epsilon\}.$$

Поскольку $f(s) \in F(S^{r_1} \times H^{r_2}(D))$, из леммы 5 следует, что $f(s)$ является элементом носителя меры $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$. Поэтому $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(G) > 0$. Отсюда и из лемм 3 и 7 получаем утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 5. Случай $m \geq 2$ содержится в теореме 4. Поэтому остается рассмотреть только случай $m = 1$.

В силу леммы 6 существует многочлен $p(s)$ такой, что

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{6}$$

Так как $f(s) \neq a_1$ в K, то и $p(s) \neq a_1$ в K, если ϵ достаточно мало. Поэтому в K можем определить непрерывную ветвь логарифма $\log(p(s) - a_1)$, которая будет аналитической функцией внутри множества K. Применяя еще раз лемму 6, найдем многочлен $p_1(s)$ такой, что

$$\sup_{s \in K} |p(s) - a_1 - e^{p_1(s)}| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{7}$$

Положим $g_{a_1}(s) = e^{p_1(s)} + a_1$. Тогда $g_{a_1}(s) \in H(D)$ и $g_{a_1}(s) \neq a_1$ в полосе D, т. е. $g_{a_1}(s) \in H_1(D)$. Из леммы 5 следует, что носитель меры $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$ содержит замыкание множества $H_1(D)$. Поэтому $g_{a_1}(s)$ является элементом носителя меры $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}$. Стало быть, $P_{\underline{\zeta}}F^{-1}(G) > 0$, где

$$G = \{g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - g_{a_1}(s)| < \epsilon/2\}.$$

Отсюда и из лемм 3 и 7 вытекает, что

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \operatorname{mes}\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\underline{\zeta}(s + i\tau, \underline{\alpha}; \underline{\mathfrak{a}}, \underline{\mathfrak{b}})) - g_{a_1}(s)| < \epsilon/2\} > 0. \tag{8}$$

Кроме того, из неравенств (6) и (7) имеем

$$\sup_{s \in K} |f(s) - g_{a_1}(s)| < \frac{\epsilon}{2},$$

откуда с учетом неравенства (8) получаем утверждение теоремы при $m = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bohr H., Courant R.* Neue Anwendungen der Theorie der Diophantischen Approximation auf die Riemannsche Zetafunktion // J. Reine Angew. Math. 1914. Bd 144. S. 249–274.
2. *Воронин С. М.* О распределении ненулевых значений ζ-функции Римана // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1972. Т. 128. С. 131–150.
3. *Воронин С. М.* Теорема об «универсальности» дзета-функции Римана // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975. Т. 39, № 3. С. 457–486.
4. *Воронин С. М.* О функциональной независимости L-функций Дирихле // Acta Arith. 1975. V. 27. P. 493–503.
5. *Kaczorowski J., Laurinčikas A., Steuding J.* On the value distribution of shifts of universal Dirichlet series // Monatsh. Math. 2006. V. 147, N 4. P. 309–317.
6. *Лауринчикас А.* Совместная универсальность дзета-функций с периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат. 2010. Т. 74, № 3. С. 79–102.
7. *Воронин С. М., Карацуба А. А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1984.
8. *Laurinčikas A.* Limit theorems for the Riemann zeta-function. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. (Math. Appl.; V. 352).
9. *Laurinčikas A., Garunkštis R.* The Lerch zeta-function. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
10. *Steuding J.* Value-distribution of L-functions. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 2007. (Lect. Notes Math.; V. 1877).
11. *Laurinčikas A.* The universality of zeta-functions // Acta Appl. Math. 2003. V. 78, N 1–3. P. 251–271.
12. *Matsumoto K.* Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions // Sugaku Expo. 2004. V. 17, N 1. P. 51–71.
13. *Matsumoto K.* A survey on the theory of universality for zeta and L-functions // Number theory: Plowing and starring through high wave forms: Proc. 7th China – Japan Seminar (M. Koneko, S. Kanemitsu, J. Liu, eds.). New York: World Sci. Publ. Co., 2015. P. 95–144. (Number Theory Appl.; V. 11).
14. *Laurinčikas A.* Universality of the Riemann zeta-function // J. Number Theory. 2010. V. 170. P. 2323–2331.
15. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
16. *Мергелян С. Н.* Равномерные приближения функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7, № 2. С. 31–122.
17. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
18. *Conway J. B.* Functions of one complex variable. New York; Heidelberg: Springer-Verl., 1973.

Статья поступила 24 марта 2015 г.

Лауринчикас Антанас
Вильнюсский университет,
ул. Наугардуко, 24, Вильнюс LT-03225, Литва
antanas.laurincikas@mif.vu.lt