Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 512.7

НАХОЖДЕНИЕ КОМПОНЕНТ ЭЙНА В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ СТАБИЛЬНЫХ 2–РАССЛОЕНИЙ НА ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. А. Кытманов, Н. Н. Осипов, С. А. Тихомиров

Аннотация. Приводится метод нахождения компонент Эйна в пространствах модулей стабильных 2-расслоений с нулевым первым классом Черна на трехмерном проективном пространстве. Формулируется и иллюстрируется гипотеза о характере роста числа компонент Эйна в зависимости от значений второго класса Черна. Приводятся метод вычисления спектров упомянутых расслоений, рекуррентная и явная формулы для вычисления числа спектров таких расслоений.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.214

Ключевые слова: стабильные расслоения, классы Черна, пространства модулей.

Введение

В статье рассматриваются пространства $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,n)$ модулей стабильных 2-расслоений с первым классом Черна $c_1 = 0$ и вторым классом Черна $c_2 = n$ на пространстве $\mathbb{P}^3$. Основное внимание в работе уделено аспектам теоретико-числового исследования так называемых «компонент Эйна» — специального класса компонент в пространствах $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,n)$. А именно, впервые предлагается метод для получения всех компонент Эйна (и, как следствие, установления их точного числа) в пространстве модулей для любого значения c_2. Устанавливается условие существования компонент Эйна в произвольном (конкретном) пространстве модулей, в частности, на промежутке от 1 до 10^6 приводится полный список значений второго класса Черна указанных расслоений, при которых пространства модулей не содержат компонент Эйна. При этом формулируется и иллюстрируется гипотеза о характере роста числа компонент Эйна с ростом значения второго класса Черна соответствующих расслоений. Также приводится метод для вычисления всех спектров 2-расслоений с $c_1 = 0$ на $\mathbb{P}^3$, удовлетворяющих необходимому набору свойств. Обнаруженное рекуррентное соотношение типа Фибоначчи позволяет получить точную формулу для числа таких спектров. В качестве примера рассматривается единственная компонента

Исследования, представленные в работе, были выполнены при поддержке грантов РФФИ (коды проектов 15–31–20008–мол_а_вед (первый и третий авторы), 14–01–00283–а (первый автор)), а также грантов Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания (1.1462.2014/К (первый и второй авторы)) и базовой части государственного задания (1.14.365 (третий автор)).

Эйна в пространстве модулей 2-расслоений с $c_1 = 0$ и $c_2 = 14$ на $\mathbb{P}^3$, вычисляется ее размерность и устанавливается соответствие этой компоненты конкретному спектру расслоений. Мы работаем над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$ характеристики 0.

1. Известные результаты о компонентах пространств $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, n)$

Компоненты пространств $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, n)$ для $1 \leq n \leq 4$ известны: в случаях $n = 1, 2$ имеется единственная компонента [1], в случаях $n = 3, 4$ к ней добавляется по одной компоненте [2, 3]. Для каждого $n \geq 1$ известна по крайней мере одна компонента I_n пространства $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, n)$ — так называемая «инстантонная компонента», имеющая ожидаемую размерность $\dim I_n = 8n - 3$. Неприводимость I_n доказана А. С. Тихомировым сначала для нечетных n в [4], а затем для четных n в [5]. Гладкость I_n доказана в [6].

Три другие серии неприводимых семейств (возможно, компонент) в пространствах $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, n)$ с номерами n, пробегающими бесконечную последовательность (но не с любым n), были построены Хартсхорном [7] и В. К. Ведерниковым [8].

Эйн в [9] рассмотрел специальный класс стабильных векторных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ — класс так называемых обобщенных нуль-корреляционных расслоений E_2, являющихся когомологическими пучками монад вида

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-c) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-b) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-a) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(a) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(b) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(c) \to 0, \qquad (1)$$

где $c > b \geq a \geq 0$.

В этом случае, как нетрудно вычислить, $c_1(E_2) = 0$, $c_2(E_2) = c^2 - a^2 - b^2$. Более того, Эйн показал, что такие расслоения стабильны, если и только если $c > a + b$, а также что пространство модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, c^2 - a^2 - b^2)$ имеет неприводимую компоненту $N(a, b, c)$, общая точка которой соответствует классу расслоений, являющихся когомологическими пучками монад (1). Мы называем такие компоненты *компонентами Эйна.*

Тем самым проблема поиска точного числа компонент Эйна в пространствах модулей 2-расслоений с первым классом Черна $c_1 = 0$ в зависимости от значения второго класса Черна $c_2 = n$ расслоения E_2 сводится к задаче нахождения для заданного $n \geq 1$ всех троек (a, b, c) целых чисел, удовлетворяющих условиям

$$c^2 - a^2 - b^2 = n, \quad 0 \leq a \leq b, \quad c > a + b.$$

Данная задача рассматривается в разд. 2.

Изучение данных компонент тесно связано с понятием «спектра» расслоения. В случае произвольной характеристики понятие спектра для стабильного расслоения ранга 2 с $c_1 = 0$ на $\mathbb{P}^3$ введено Хартсхорном [7]. А именно, пусть $\operatorname{Spec} E_2$ — спектр 2-расслоения с $c_1 = 0$. Тогда $\operatorname{Spec} E_2 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — неубывающая последовательность целых чисел, обладающая следующими свойствами (см. [7, 10]):

(S1) симметричность: $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1) = -(a_1, a_2, \ldots, a_n)$;

(S2) связность: для любых двух чисел в $\operatorname{Spec} E_2$ каждое число, лежащее между ними, также лежит в $\operatorname{Spec} E_2$;

(S3) если число l_0 такое, что $1 \leq l_0 \leq \max\{a_i\}$, появляется только один раз в $\operatorname{Spec} E_2$, то каждое число l такое, что $l_0 \leq l \leq \max\{a_i\}$, также должно появляться только один раз в $\operatorname{Spec} E_2$.

Например, расслоения E_2 с минимальным в смысле лексикографического упорядочения спектром — нулевым спектром $(0, \dots, 0)$ — суть в точности инстантонные расслоения, составляющие открытые плотные подмножества инстантонных компонент I_n.

Все возможные значения для спектров 2-расслоений с $c_1 = 0$ и виды монад, когомологическими пучками которых являются эти расслоения, при $1 \le c_2 \le 8$ перечислены в [10].

В разд. 4 рассматривается задача нахождения спектров стабильных 2-расслоений с $c_1 = 0$ на пространстве $\mathbb{P}^3$.

2. Метод нахождения компонент Эйна и его обоснование

Для натурального n обозначим через T_n число троек (a, b, c) неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих системе

$$c^2 - a^2 - b^2 = n, \quad c > a + b.$$

Такую тройку (a, b, c) назовем *подходящей*, если $a \le b$. Обозначим число подходящих троек через t_n. Пусть также P_n — число тех подходящих троек, в которых $a = b$. Ясно, что

$$t_n = \frac{T_n + P_n}{2}. \tag{2}$$

Опишем алгоритм, позволяющий для данного натурального n перечислить все подходящие тройки (a, b, c).

Заменив c на $k = c - a - b$, получим уравнение

$$(a + k)(b + k) = \frac{n + k^2}{2},$$

где $k \ge 1$ и $k \equiv n \pmod 2$. Поскольку $0 \le a \le b$, имеем также

$$\frac{n + k^2}{2} \ge (a + k)^2 \ge k^2.$$

В итоге приходим к следующим ограничениям:

$$k \equiv n \pmod 2, \quad 1 \le k \le \sqrt{n}, \quad 0 \le a \le \sqrt{\frac{n + k^2}{2}} - k. \tag{3}$$

Число пар (k, a) целых чисел, удовлетворяющих этим ограничениям, асимптотически равно

$$\frac{1}{2} \int\limits_1^{\sqrt{n}} \left(\sqrt{\frac{n + k^2}{2}} - k \right) dk \sim \frac{\sqrt{2} \ln (1 + \sqrt{2})}{8}\, n \approx 0.156\, n.$$

Будем перебирать все такие пары (k, a) и проверять для каждой из них условие

$$n + k^2 \equiv 0 \pmod{2(a + k)}. \tag{4}$$

Если для какой-то пары (k, a) это условие выполнено, то, положив

$$b = \frac{n + k^2}{2(a + k)} - k, \quad c = a + b + k,$$

получим подходящую тройку (a, b, c). В частности, число t_n подходящих троек (a, b, c) равно числу пар (k, a), удовлетворяющих условиям (3) и (4).

Рассмотрим теперь задачу нахождения для заданного натурального n всех подходящих троек (a, b, c) с условием $a = b$. Соответствующий алгоритм устроен аналогичным образом. Нужно найти все пары (k, a) целых чисел $k \geq 1$, $a \geq 0$, для которых

$$\frac{n + k^2}{2} = (a + k)^2.$$

Каждая такая пара (k, a) дает подходящую тройку вида $(a, a, 2a + k)$. Все искомые пары (k, a) могут быть перечислены, исходя из ограничений

$$k \equiv n \pmod 2, \quad 1 \leq k \leq \sqrt{n}, \quad a = \sqrt{\frac{n + k^2}{2}} - k.$$

Чтобы оценить число P_n таких пар, запишем последнее уравнение в виде

$$2(a + k)^2 - k^2 = n.$$

Каждому решению (k, a) этого уравнения в целых числах $k \geq 1$, $a \geq 0$ соответствует решение $(x, y) = (k, a + k)$ норменного уравнения

$$|x^2 - 2y^2| = n, \tag{5}$$

удовлетворяющее неравенствам $1 \leq x \leq y$. Нетрудно проверить, что любые два таких решения (x, y) не могут быть ассоциированными, поэтому справедливо неравенство

$$P_n \leq Q(n), \tag{6}$$

где $Q(n)$ — максимальное число попарно не ассоциированных решений уравнения (5). Имеет место равенство

$$Q(n) = \sum_{d|n} \chi(d),$$

где χ — характер квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, т. е.

$$\chi(d) = \begin{cases} +1, & d \equiv 1,\, 7 \pmod 8, \\ -1, & d \equiv 3,\, 5 \pmod 8, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

(см. [11, гл. III, § 8, задача 17]). В частности, $Q(n) \leq \tau(n)$ — число делителей n.

Из компьютерных экспериментов следует оценка

$$t_n^{\mathrm{av}} = \frac{t_1 + \cdots + t_n}{n} \sim \mathrm{const} \cdot n^{1/2}, \tag{7}$$

где $\mathrm{const} \approx 0.2617$. На самом деле, справедливо

Предложение 1. *Имеет место асимптотика*

$$t_n^{\mathrm{av}} = \frac{t_1 + \cdots + t_n}{n} \sim \frac{\pi}{12} \cdot n^{1/2}. \tag{8}$$

Доказательство. Действительно, во-первых,

$$T_n^{\mathrm{av}} = \frac{T_1 + \dots + T_n}{n} \sim \frac{1}{n} \int\limits_0^\infty da \int\limits_0^{(2a)^{-1}n} (\sqrt{a^2+b^2+n} - a - b)\, db$$

$$= n^{1/2} \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_0^{(2\xi)^{-1}} (\sqrt{\xi^2+\eta^2+1} - \xi - \eta)\, d\eta$$

$$= n^{1/2} \int\limits_0^\infty \frac{(1+\xi^2)\ln(1+\xi^{-2}) - 1}{4}\, d\xi = \frac{\pi}{6}\, n^{1/2},$$

так как $T_1 + \dots + T_n$ — это число троек (a, b, c) неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих системе

$$1 \le c^2 - a^2 - b^2 \le n, \quad c > a + b.$$

Во-вторых,

$$P_n^{\mathrm{av}}(n) = \frac{P_1 + \dots + P_n}{n} \sim \frac{1}{n} \int\limits_1^{\sqrt{n}} \left(\sqrt{\frac{n+k^2}{2}} - k \right) dk \sim \frac{\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})}{4} \approx 0.312,$$

поскольку $P_1 + \dots + P_n$ — это число пар (k, a) целых чисел $k \ge 1$, $a \ge 0$, удовлетворяющих неравенствам $1 \le 2(a+k)^2 - k^2 \le n$. Учитывая (2), получим утверждение предложения. □

Отметим также, что $Q(1) + \dots + Q(n)$ — это число пар (x, y) целых чисел, для которых

$$|x^2 - 2y^2| \le n, \quad 1 \le x + y\sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}.$$

Следовательно,

$$Q^{\mathrm{av}}(n) = \frac{Q_1 + \dots + Q_n}{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{2}} \int\limits_1^{1+\sqrt{2}} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})}{2} \approx 0.623.$$

Таким образом, оценка (6) в среднем завышена в 2 раза.

3. Асимптотическое поведение чисел компонент Эйна

Теоретико-числовой результат, доказанный Эйном (см. [9, лемма 3.5]), утверждает, что если второй класс Черна $c_2 = n$ 2-расслоения с $c_1 = 0$ представляет собой произведение m различных нечетных чисел, то число подходящих троек (a, b, c) (соответственно число компонент Эйна) не меньше m. Как видно из (7) и (8), эта оценка «в среднем» достаточно грубая. Например, в случае $n = 315 = 5{\cdot}7{\cdot}9$ результат Эйна дает нижнюю оценку числа троек, равную 3, в то время как $t_{315} = 12$. В качестве следствия данного результата Эйном доказывается утверждение о том, что число t_n всех различных неприводимых компонент пространства $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, n)$ удовлетворяет равенству $\varlimsup\limits_{n\to\infty} t_n = \infty$. Проведенный в работе компьютерный эксперимент позволяет сделать более точное предположение о характере роста их числа.

Алгоритм для вычисления всех подходящих троек (a, b, c) реализован в системе компьютерной алгебры Maple. С его помощью были получены экспериментальные данные о числе троек для значений второго класса Черна от 1 до 10^6, позволяющие сформулировать следующую гипотезу.

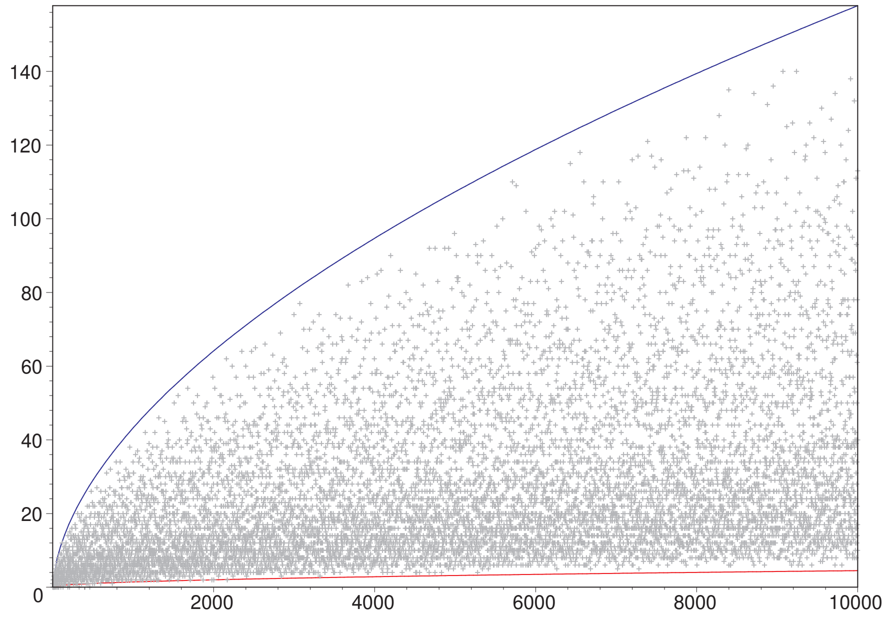

Рис. 1. Числа подходящих троек t_n (компонент Эйна).

Гипотеза 1. *Пусть N — некоторое натуральное число, а n — значение второго класса Черна расслоения E_2 с нулевым первым классом Черна. Тогда для $n > N$ справедливы неравенства*

$$0,045\sqrt{n} \le t_n \le 0,52\sqrt{n \ln n}, \tag{9}$$

где t_n — число подходящих троек (компонент Эйна).

Данная гипотеза проиллюстрирована на рис. 1, где точками отмечены числа подходящих троек t_n для $n = 1, \ldots, 10^4$, а верхняя и нижняя кривые представляют собой графики функций $0,52\sqrt{x \ln x}$ и $0,045\sqrt{x}$ соответственно. Следует отметить, что получение точных оценок вида (9) на числа t_n представляет собой сложную теоретико-числовую задачу.

Следующее замечание относится к асимптотическому поведению чисел t_n «снизу».

Замечание 1. Из определений t_n и T_n следует равносильность неравенств $t_n > 0$ и $T_n > 0$. В свою очередь, компьютерные эксперименты показывают, что при $n \le 10^6$ равенство $T_n = 0$ имеет место только для $n \in \{2, 6, 10, 18, 22, 30, 42, 58, 70, 78, 102, 130, 190, 210, 330, 462\}$. Нетрудно видеть, что возможные исключения могут составлять только числа вида $p - 1$, где p — простое число, удовлетворяющее условию $p \equiv 3 \pmod 4$.

4. Нахождение спектров стабильных 2-расслоений

Как отмечал Хартсхорн в [7], спектры расслоений производят стратификацию пространств модулей данных расслоений, что облегчает изучение данных пространств. В частности, информация о (реализуемых) спектрах помогает в изучении «географии» и геометрии компонент в пространствах модулей, позволяя разделять задачу изучения конкретного пространства модулей (его компонент) на подзадачи.

Для удобства дальнейших рассуждений введем

Определение 1. *Спектр-вектором длины* k назовем целочисленный вектор $(v_1, \dots, v_k)$ длины k с неотрицательными элементами такой, что

(1) $v_1 = 0$;

(2) для всех $i \in \{1, \dots, \}$ либо $v_{i+1} = v_i$, либо $v_{i+1} = v_i + 1$;

(3) если для какого-либо $i \in \{2, \dots, k-1\}$ выполнено $v_{i-1} < v_i < v_{i+1}$, то для всех $j \in \{i+1, \dots, k-1\}$ выполнено $v_j < v_{j+1}$.

Условия (2) и (3) определения 1 идентичны соответствующим свойствам (S2) и (S3) спектра 2-расслоения с первым классом Черна $c_1 = 0$.

Заметим, что существует взаимно однозначное соответствие между спектр-вектором $(0, v_2, \dots, v_k)$ длины k и спектром длины n, а именно для нечетного $n = 2k-1$ соответствующий спектр имеет вид $(-v_k, \dots, -v_2, 0, v_2, \dots, v_k)$, а для четного $n = 2k$ соответствующий спектр — вид $(-v_k, \dots, -v_2, 0, 0, v_2, \dots, v_k)$.

Легко проверить, что единственным спектр-вектором длины 1 является (0), а спектр-векторы длины 2 суть $(0,0)$, $(0,1)$. Для спектр-векторов длины 3 и более верна следующая

Теорема 1. *Для $m = 1, 2, \dots$ каждый спектр-вектор длины $m+2$ является одним из следующих векторов:*

1) *спектр-вектор длины $m+1$ с добавленным нулем слева;*

2) *сумма спектр-вектора длины m с добавленными двумя нулями слева и вектора $(0, 1, \dots, 1)$ длины $m+2$;*

3) *вектор $(0, 1, 2, \dots, m+1)$.*

Доказательство. В силу условия (3) из определения спектр-вектора для $m = 1, 2, \dots$ спектр-векторы длины $m+2$ можно разделить на векторы следующих типов:

1) векторы вида $(0, 0, \dots)$, которые назовем *векторами первого типа*;

2) векторы вида $(0, 1, 1, \dots)$, которые назовем *векторами второго типа*;

3) вектор $(0, 1, 2, \dots, m+1)$.

Каждый вектор первого типа представляет собой спектр-вектор длины $m+1$ с добавленным нулем слева. Действительно, заметим, что любой спектр-вектор начинается с 0, фиксирование еще одного элемента 0 фактически снижает размерность вектора на единицу. Таким образом получаем все спектр-векторы длины $m+1$.

Рассмотрим спектр-вектор второго типа. Заметим, что все его элементы, кроме первого, не меньше 1, поэтому его разность с вектором $(0, 1, \dots, 1)$ представляет собой неотрицательный целочисленный вектор вида $(0, 0, 0, \dots)$. Вычитание данного вектора не влияет на условия (2) и (3), участвующие в определении спектра. Поэтому три фиксированных нуля в начале снижают размерность вектора на 2 и в результате получаем множество спектр-векторов длины m с добавленными двумя нулями слева.

В силу условия (3) из определения спектра единственным спектр-вектором длины $m+2$, не являющимся вектором первого или второго типа, является вектор $(0, 1, 2, \dots, m+1)$. $\square$

Алгоритм вычисления спектров стабильных 2-расслоений с $c_1 = 0$ на пространстве $\mathbb{P}^3$, созданный на основе полученного результата, был реализован в системе компьютерной алгебры Maple.

Следствие 1. *Для $k = 1, 2, \ldots$ последовательность чисел a_k спектр-векторов длины k удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k + 1$ с начальными данными $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.*

Легко видеть, что $a_k = F_{k+2} - 1$, где F_k есть k-е число Фибоначчи,

$$F_k = \frac{(1+\sqrt{5})^k - (1-\sqrt{5})^k}{2^k\sqrt{5}}.$$

Таким образом, получена явная формула для подсчета числа спектр-векторов длины k (а следовательно, числа спектров, удовлетворяющих свойствам (S1)–(S3)).

Замечание 2. В [10] показано, что спектры 2-расслоений с $c_1 = 0$ и $1 \le c_2 \le 19$, удовлетворяющие свойствам (S1)–(S3), в точности реализуемы, т. е. существуют 2-расслоения, имеющие такие спектры, и других реализуемых спектров нет. Соответственно для расслоений с $c_1 = 0$ и $c_2 \ge 20$ числа a_k являются верхними границами чисел реализуемых спектров.

5. Пример нахождения размерности компоненты Эйна

В качестве примера разберем подробно случай пространства $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 14)$ на предмет компонент Эйна. Справедлива следующая

Теорема 2. *В пространстве $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 14)$ есть единственная компонента Эйна: компонента размерности 117, содержащая плотное открытое подмножество классов расслоений, имеющих спектр $(-3, -2, -2, -1, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3)$ и задаваемых монадой типа*

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(4) \to 0.$$

Доказательство. Согласно упомянутым выше экспериментальным данным имеется единственная подходящая тройка, где $(a, b, c) = (1, 1, 4)$. Таким образом, в пространстве $M_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 14)$ есть в точности одна компонента Эйна.

Найдем спектр 2-расслоений E_2 из данной компоненты Эйна и вычислим размерность этой компоненты.

В нашем случае монада (1) имеет вид $0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(4) \to 0$. Отсюда ее дисплей, подкрученный на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$, таков:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-5) & \to & L(-1) & \to & E_2(-1) & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-5) & \to & 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} & \to & Q(-1) & \to & 0\,, \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(3) & = & \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(3) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

где L и Q — некоторые пучки. Используя данный дисплей и учитывая стабильность E_2, находим

$$h^1 E_2(-1) = 18. \qquad (10)$$

Аналогично, рассматривая дисплеи для $E_2(-2-i)$, $i \geq 0$, получаем

$$h^1E_2(-2) = 10,\ h^1E_2(-3) = 4,\ h^1E_2(-4) = 1,\ h^1E_2(-5-i) = 0,\ i \geq 0. \qquad (11)$$

Результат разд. 4 позволяет получить точное число реализуемых спектров для стабильных 2-расслоений с $c_1 = 0$ и $c_2 = 14$, равное 33. Перечислим эти спектры:

1) $(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$;
2) $(-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1)$;
3) $(-1,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1)$;
4) $(-2,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,2)$;
5) $(-1,-1,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1)$;
6) $(-2,-1,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,2)$;
7) $(-3,-2,-1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,2,3)$;
8) $(-1,-1,-1,-1,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1)$;
9) $(-2,-1,-1,-1,0,0,0,0,0,0,1,1,1,2)$;
10) $(-2,-2,-1,-1,0,0,0,0,0,0,1,1,2,2)$;
11) $(-3,-2,-1,-1,0,0,0,0,0,0,1,1,2,3)$;
12) $(-4,-3,-2,-1,0,0,0,0,0,0,1,2,3,4)$;
13) $(-1,-1,-1,-1,-1,0,0,0,0,1,1,1,1,1)$;
14) $(-2,-1,-1,-1,-1,0,0,0,0,1,1,1,1,2)$;
15) $(-2,-2,-1,-1,-1,0,0,0,0,1,1,1,2,2)$;
16) $(-3,-2,-1,-1,-1,0,0,0,0,1,1,1,2,3)$;
17) $(-2,-2,-2,-1,-1,0,0,0,0,1,1,2,2,2)$;
18) $(-3,-2,-2,-1,-1,0,0,0,0,1,1,2,2,3)$;
19) $(-4,-3,-2,-1,-1,0,0,0,0,1,1,2,3,4)$;
20) $(-5,-4,-3,-2,-1,0,0,0,0,1,2,3,4,5)$;
21) $(-1,-1,-1,-1,-1,-1,0,0,1,1,1,1,1,1)$;
22) $(-2,-1,-1,-1,-1,-1,0,0,1,1,1,1,1,2)$;
23) $(-2,-2,-1,-1,-1,-1,0,0,1,1,1,1,2,2)$;
24) $(-3,-2,-1,-1,-1,-1,0,0,1,1,1,1,2,3)$;
25) $(-2,-2,-2,-1,-1,-1,0,0,1,1,1,2,2,2)$;
26) $(-3,-2,-2,-1,-1,-1,0,0,1,1,1,2,2,3)$;
27) $(-4,-3,-2,-1,-1,-1,0,0,1,1,1,2,3,4)$;
28) $(-2,-2,-2,-2,-1,-1,0,0,1,1,2,2,2,2)$;
29) $(-3,-2,-2,-2,-1,-1,0,0,1,1,2,2,2,3)$;
30) $(-3,-3,-2,-2,-1,-1,0,0,1,1,2,2,3,3)$;
31) $(-4,-3,-2,-2,-1,-1,0,0,1,1,2,2,3,4)$;
32) $(-5,-4,-3,-2,-1,-1,0,0,1,1,2,3,4,5)$;
33) $(-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,0,1,2,3,4,5,6)$.

Рассмотрим спектр под номером 26 из данного списка. Следуя технике Барта (см. [12]), имеем $h^1E_2(-1) = h^0K$, $h^1E_2(-2) = h^0K(-1)$, $h^1E_2(-3) = h^0K(-2)$, $h^1E_2(-4) = h^0K(-3)$, где $K = \oplus_k \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$, а числа k пробегают вышеуказанные спектры. Отсюда элементарным вычислением получаем, что равенства (10) и (11) верны для спектра $\operatorname{Spec} E_2 = (-3,-2,-2,-1,-1,-1,0,0,1,1,1,2,2,3)$, входящего в список под номером 26. В силу единственности спектра $\operatorname{Spec} E_2$ расслоения E_2 следует, что наша компонента Эйна соответствует именно этому спектру. Применяя формулу Барта из [12], находим размерность d этой компоненты Эйна:

$$d = d_1 - d_2 - d_3 - d_4,$$

где

$$d_1 = \dim \operatorname{Hom}(2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1);$$

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) = 2h^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(5) + 2h^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(3) = 112 + 40 = 152;$$

$$d_2 = \dim \operatorname{Hom}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(4), \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) = h^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} = 1;$$

$$d_3 = h^0(\Lambda^2(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(4))) = 0;$$

$$d_4 = h^0(S^2(2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus 2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1))) = h^0(S^2(2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1))) + h^0(S^2(2\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1))) + 4h^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}$$
$$= 3h^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) + 3h^0\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(2) + 4 = 0 + 30 + 4 = 34.$$

Таким образом, $d = 152 - 1 - 0 - 34 = 117$, и получили компоненту размерности выше ожидаемой (равной в данном случае $8 \cdot 14 - 3 = 109$). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hartshorne R.* Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbf{P}^3$ // Math. Ann. 1978. Bd 238. S. 229–280.
2. *Barth W.* Irreducibility of the space of mathematical instanton bundles with rank 2 and $c_2 = 4$ // Math. Ann. 1981. Bd 258, Heft 1. S. 81–106.
3. *Ellingsrud G. Strömme S.* Stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1 = 0$ and $c_2 = 3$ // Math. Ann. 1981. Bd 255. S. 129–138.
4. *Тихомиров А. С.* Модули математических инстантонных векторных расслоений с нечетным c_2 на проективном пространстве // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76, № 5. С. 143–224.
5. *Тихомиров А. С.* Модули математических инстантонных векторных расслоений с четным c_2 на проективном пространстве // Изв. РАН. Сер. мат. 2013. Т. 77, № 6. С. 139–168.
6. *Jardim M., Verbitsky M.* Trihyperkahler reduction and instanton bundles on $\mathbb{C}P^3$ // Compos. Math. 2014. V. 150, N 11. P. 1836–1868.
7. *Hartshorne R.* Stable reflexive sheaves // Math. Ann. 1980. Bd 254. S. 121–176.
8. *Ведерников В. К.* Модули стабильных векторных расслоений ранга 2 на $\mathbf{P}^3$ с фиксированным спектром // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 5. С. 986–998.
9. *Ein L.* Generalized null correlation bundles // Nagoya Math. J. 1988. V. 111. P. 13–24.
10. *Hartshorne R., Rao A. P.* Spectra and monads of stable bundles // J. Math. Kyoto Univ. 1991. V. 31, N 3. P. 789–806.
11. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1985.
12. *Barth W.* Some experimental data // Les equations de Yang–Mills. Seminaire E.N.S. 1977–1978. Astérisque. 1980. 71–72. P. 205–218.

Статья поступила 5 мая 2015 г.

Кытманов Алексей Александрович, Осипов Николай Николаевич
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
`aakytm@gmail.com`, `nnosipov@rambler.ru`

Тихомиров Сергей Александрович
Ярославский гос. педагогический университет им. К. Д. Ушинского,
Республиканская ул., 108, Ярославль 150000;
Филиал Северного (Арктического) федерального университета им. М. В. Ломоносова,
пр. Ленина, 9, Архангельская обл., Коряжма 165651
`satikhomirov@mail.ru`