Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 517.983

КОМПАКТНЫЕ ПО МЕРЕ, ПОЧТИ КОМПАКТНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ 1–ГО, 2–ГО И 3–ГО РОДОВ

В. Б. Коротков

Аннотация. Изучаются метрические, алгебраические, спектральные и характеристические свойства компактных по мере, почти компактных и интегральных операторов 1-го, 2-го и 3-го родов в пространствах суммируемых функций.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.212

Ключевые слова: компактный по мере оператор, почти компактный оператор, интегральный оператор, карлемановский интегральный оператор, оператор Гильберта — Шмидта, ядерный оператор, спектр, предельный спектр.

Пусть (X,μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой. *Атомом меры* μ называется измеримое множество положительной меры, не представимое в виде объединения двух непересекающихся множеств с положительными мерами. Будем говорить, что мера μ *не является чисто атомической*, если в X существует множество e такое, что $0 < \mu e < \infty$ и e не содержит атомов меры μ.

Через $L_0(\mu) = L_0(X,\mu)$ обозначим совокупность всех μ-измеримых μ-почти всюду конечных функций на X с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множестве меры 0. Через $L_p(\mu) = L_p(X,\mu)$ $(1 \le p < \infty)$ обозначим пространство всех $f \in L_0(\mu)$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Интеграл здесь и далее понимается в лебеговом смысле. $L_p(\nu) = L_p(Y,\nu)$ — аналогичное пространство. Мера μ называется *сепарабельной*, если $L_p(\mu)$ сепарабельны для всех $1 \le p < \infty$.

1. Компактные по мере операторы, почти компактные операторы и интегральные операторы в L_p

Определение 1.1. Множество в $L_0(\mu)$ называется *компактным по мере*, если из каждой его последовательности можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся по мере на любом множестве конечной меры.

Определение 1.2 [1]. Линейный оператор $T : L_p(\nu) \to L_0(\mu)$ называется *компактным по мере*, если он отображает единичный шар пространства $L_p(\nu)$ в компактное по мере множество.

© 2016 Коротков В. Б.

Определение 1.3 [2]. Линейный оператор $T : L_p(\nu) \to L_0(\mu)$ называется *почти компактным*, если найдется разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества X_n $(n = 1, 2, \dots)$ такое, что все операторы $P_nT : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$ компактны; здесь $P_nf = \chi_{X_n}f$, $f \in L_p(\mu)$, χ_E — характеристическая функция множества E.

Теорема 1.1. *Пусть $1 \le p \le \infty$, $T : L_p(\nu) \to L_0(\mu)$ — почти компактный оператор, последовательность $\{f_m\} \subset L_p(\nu)$ слабо сходится к $f \in L_p(\nu)$. Тогда $\{Tf_m\}$ сходится к Tf по мере на каждом множестве конечной меры.*

Доказательство. Пусть b_n — норма компактного оператора $P_nT : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$. Оператор

$$\widetilde{T} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+b_n)} P_nT$$

действует из $L_p(\nu)$ в $L_p(\mu)$ и компактен. Следовательно, $\widetilde{T}f_m$ сходится к $\widetilde{T}f$ по норме $L_p(\mu)$, поэтому $\widetilde{T}f_m$ сходится к $\widetilde{T}f$ по мере на любом множестве конечной меры. Рассмотрим функцию

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(1+b_n)\chi_{X_n}.$$

Тогда $Tf_m = b\widetilde{T}f_m$ сходится к $b\widetilde{T}f = Tf$ по мере на любом множестве конечной меры. $\square$

Следствие. *При $1 < p < \infty$ каждый почти компактный оператор $T : L_p(\nu) \to L_0(\mu)$ компактен по мере.*

Обратное утверждение верно не всегда. В [3] для любого $2 < p < \infty$ построен компактный по мере оператор $T_0 : L_p(0,1) \to L_0(0,1)$, обладающий свойством: для всякого множества $e \in (0,1)$ положительной лебеговой меры имеет место равенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \|P_eT_0r_n\|_p = \infty$, где r_n $(n = 1, 2, \dots)$ — функции Радемахера. Отсюда следует, что оператор P_eT_0 не компактен как оператор из $L_p(0,1)$ в $L_p(0,1)$, так что T_0 не является почти компактным оператором.

Теорема 1.2. *Пусть $1 < p < \infty$, $T : L_p(\nu) \to L_1(\mu)$ — ограниченный компактный по мере оператор. Тогда T — компактный оператор.*

Доказательство. Пусть $\{g_n\} \subset L_p(\nu)$ слабо сходится к $g \in L_p(\nu)$. Тогда $\{Tg_n\}$ слабо сходится в $L_1(\mu)$ к Tg. Выберем из компактного по мере множества $\{Tg_n\}$ подпоследовательность $\{Tg_{n_k}\}$, сходящуюся по мере на каждом множестве конечной меры к некоторой функции $f \in L_0(\mu)$. Пусть G — произвольное множество конечной меры, для которого $\chi_Gf \in L_1(\mu)$. Так как $\chi_GTg_{n_k} \to \chi_GTg$ слабо в $L_1(G,\mu)$, в силу следствий IV.8.10, IV.8.11 из [4]

$$\lim_{\mu E\to 0} \sup_k \int\limits_E |\chi_GTg_{n_k}|\,d\mu = 0.$$

Отсюда и из сходимости $\chi_GTg_{n_k}$ к $\chi_Gf \in L_1(\mu)$ по мере на G получим

$$\|\chi_GTg_{n_k} - \chi_Gf\|_1 \to 0$$

при $k \to \infty$, здесь $\|\cdot\|_1$ — норма в $L_1(\mu)$. Так как $\chi_GTg_{n_k} \to \chi_GTg$ слабо в $L_1(\mu)$, то $\chi_GTg = \chi_Gf$. Таким образом, $Tg = f$. Кроме того, $Tg_{n_k} \to Tg$ слабо в $L_1(\mu)$, и $Tg_{n_k} \to Tg$ по мере на любом множестве конечной меры. Тогда в силу теоремы IV.8.12 из [4] $\|Tg_{n_k} - Tg\|_1 \to 0$ при $k \to \infty$. $\square$

Следствие. *Пусть* $1 < p < \infty$, $T : L_p(\nu) \to L_1(\mu)$ — *почти компактный оператор. Тогда* T — *компактный оператор.*

Доказательство. Пусть $h_m \to h$ по норме $L_p(\nu)$ и $Th_m \to g$ по норме $L_1(\mu)$. По теореме 1.1 Th_m сходится к Th по мере на каждом множестве конечной меры. Значит, $g = Th$, и по теореме о замкнутом графике оператор $T : L_p(\nu) \to L_1(\mu)$ ограничен. Следовательно, по теореме 1.2 T компактен. □

Определение 1.4. Линейный оператор $T : L_p(\nu) \to L_0(\mu)$ называется *интегральным*, если существует функция $K \in L_0(X \times Y, \mu \times \nu)$ такая, что для всех $f \in L_p(\nu)$

$$Tf(s) = \int\limits_Y K(s,t)f(t)\,d\nu(t)$$

для μ-почти всех $s \in X$. Функция $K(s,t)$ называется *ядром интегрального оператора* T. Интегральный оператор $T : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$ с ядром $K(s,t)$ называется *регулярным*, если интегральный оператор

$$|T|f(s) = \int\limits_Y |K(s,t)|f(t)\,d\nu(t)$$

определен на всем $L_p(\nu)$ и действует в $L_p(\mu)$.

Имеет место следующая теорема о компактной и регулярной факторизации интегральных операторов, действующих из $L_p(\nu)$ в $L_0(\mu)$.

Теорема 1.3. *Пусть* $1 < p \le \infty$, $T : L_p(\nu) \to L_0(\mu)$ — *интегральный оператор. Тогда оператор* T *можно представить в виде* $T = AB$, *где* $B : L_p(\nu) \to L_p(\mu)$ — *регулярный интегральный компактный оператор,* A — *оператор умножения на функцию* a: $Ah = ah$, $h \in L_p(\mu)$, *здесь* $a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \chi_{X_n}$, $\lambda_n \ge 1$, $n = 1, 2, \ldots$, $\{X_n\}$ — *разбиение множества* X *на попарно не пересекающиеся измеримые множества с конечными мерами.*

Эта теорема при $p = 2$ сформулирована в совместной работе автора и В. Д. Степанова [5, с. 66]. Для $1 < p \le \infty$ теорема 1.3 доказана в [6, 7]. Для $1 < p \le \infty$ близкое к теореме 1.3 утверждение доказано другим методом Шахермайером и Вайсом [2].

Следствие 1. *При* $1 < p \le \infty$ *каждый интегральный оператор* $T : L_p(\nu) \to L_0(\mu)$ *почти компактен.*

Следствие 2. *При* $1 < p < \infty$ *каждый интегральный оператор* $T : L_p(\nu) \to L_0(\mu)$ *отображает слабо сходящиеся в* $L_p(\nu)$ *последовательности в последовательности, сходящиеся по мере на любом множестве конечной меры.*

Следствие 3. *При* $1 < p < \infty$ *каждый интегральный оператор* $T : L_p(\nu) \to L_0(\mu)$ *компактен по мере.*

Следствие 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $T : L_p(\nu) \to L_1(\mu)$ — *интегральный оператор. Тогда* T *компактен.*

Справедливость следствия 4 вытекает из следствия 1 и следствия теоремы 1.2.

Таким образом, при $1 < p < \infty$ любой интегральный оператор $T : L_p(\nu) \to L_0(\mu)$ почти компактен. Следующий пример показывает, что обратное утверждение неверно.

Пример. Пусть $\{r_n\}$ — ортонормированная система Радемахера. Для любого $1 < p < \infty$ оператор

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (f, r_n)\, r_n, \quad f \in L_p(0,1), \tag{1}$$

где все μ_n вещественны, $\mu_n \to 0$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 = \infty, \quad (f, r_n) = \int\limits_0^1 f r_n \, dt,$$

компактен как оператор, действующий из $L_p(0,1)$ в $L_p(0,1)$, но не является интегральным оператором.

Доказательство. Пусть $2 \le p < \infty$. Тогда для каждой функции $f \in L_p(0,1)$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(f, r_n)|^2 < \infty$. Следовательно, в силу неравенства Хинчина ряд (1) сходится по норме $L_p(0,1)$, при этом для любого $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}\left\| Tf - \sum_{n=1}^{m} \mu_n (f, r_n) r_n \right\|_p &= \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \mu_n (f, r_n) r_n \right\|_p \\ &\le C_p \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \mu_n (f, r_n) r_n \right\|_2 = C_p \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |\mu_n|^2 |(f, r_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C_p \sup_{n>m} |\mu_n| \|f\|_2 \le C_p \sup_{n>m} |\mu_n| \|f\|_p.\end{aligned}$$

Отсюда $\|T - S_m\| \le C_p \sup\limits_{n>m} |\mu_n| \to 0$ при $m \to \infty$; здесь

$$S_m f = \sum_{n=1}^{m} \mu_n (f, r_n) r_n$$

— конечномерный оператор в $L_p(0,1)$. Следовательно, оператор $T : L_p(0,1) \to L_p(0,1)$ — компактный оператор при $2 \le p < \infty$.

Пусть $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$. Тогда $2 < q < \infty$. Рассмотрим в $L_q(0,1)$ оператор

$$\widehat{T} f = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (f, r_n) r_n.$$

По доказанному $\widehat{T}$ — компактный оператор в $L_q(0,1)$. Так как T — сопряженный к $\widehat{T}$ оператор, T — компактный оператор в $L_p(0,1)$. Итак, определяемый равенством (1) оператор T компактен в $L_p(0,1)$ для любого $1 < p < \infty$.

Докажем, что T — неинтегральный оператор. Предположим противное: пусть T — интегральный оператор и $K(s,t)$ — его ядро. Имеем

$$\int\limits_0^1 |K(s,t)| \, dt < \infty \quad \text{для почти всех } s \in (0,1).$$

Кроме того, для всех $n, m = 1, 2, \dots$ и почти всех $s \in (0,1)$

$$\int\limits_0^1 K(s,t) r_n(t) \, dt = T r_n(s) = \mu_n r_n(s), \quad \int\limits_0^1 K(s,t) r_m^{\perp}(t) \, dt = T r_m^{\perp}(s) = 0,$$

где $\{r_m^\perp\}$ — любой ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке последовательности $\{r_m\}$, состоящий из ограниченных функций. Следовательно, при подходящем $s \in (0,1)$ в силу [8, предложение 4.5.7]

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 |r_n(s)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 8 \int_0^1 |K(s,t)|\, dt < \infty,$$

что противоречит условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 = \infty$. $\square$

2. Компактные по мере, почти компактные и интегральные операторы 1-го, 2-го и 3-го родов в L_p

В этом параграфе рассмотрим алгебраические и метрические свойства классов операторов, тесно связанных с функциональными и интегральными уравнениями 1-го, 2-го и 3-го родов в L_p. Всюду в параграфе (X,μ) — пространство с положительной σ-конечной мерой μ, $L_p(\mu) = L_p(X,\mu)$, $\|\cdot\|_p$ — норма в $L_p(\mu)$ и $B(L_p(\mu))$ — пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из $L_p(\mu)$ в $L_p(\mu)$, с операторной нормой $\|\cdot\|$.

Определение 2.1. Оператор $Tf = af + Df$, $f \in L_p(\mu)$, где $a \in L_\infty(\mu)$, $D \in B(L_p(\mu))$ — интегральный оператор, называется *интегральным оператором* 3-*го рода* [9, с. 5]. Если $a(s) = \alpha \neq 0$ для почти всех $s \in X$, то T называется *интегральным оператором* 2-*го рода*; если $a(s) = 0$ для почти всех $s \in X$, — *интегральным оператором* 1-*го рода.* Совокупность всех интегральных операторов 3-го рода (2-го рода, 1-го рода) обозначим через $I_{p,3}$ (соответственно через $I_{p,2}$, $I_{p,1}$).

По аналогии с классами интегральных операторов 1-го, 2-го и 3-го родов введем следующие классы компактных по мере и почти компактных операторов.

Определение 2.2. Пусть $B_{p,1}$ — множество всех компактных по мере операторов из $B(L_p(\mu))$. Множество операторов вида $af + Lf$, $f \in L_p(\mu)$, где a — произвольная функция из $L_\infty(\mu)$ и L — произвольный оператор из $B_{p,1}$, обозначим через $B_{p,3}$. Совокупность операторов вида $\alpha 1 + L$, где α — произвольное число, 1 — тождественный оператор, L — произвольный оператор из $B_{p,1}$, обозначим через $B_{p,2}$.

Определение 2.3. Пусть $C_{p,1}$ — множество всех почти компактных операторов из $B(L_p(\mu))$, $C_{p,2}$ — совокупность операторов вида $\alpha 1 + K$, где α — произвольное число, K — любой оператор из $C_{p,1}$. Через $C_{p,3}$ обозначим множество операторов вида $af + Kf$, $f \in L_p(\mu)$, где a — произвольная функция из $L_\infty(\mu)$ и K — произвольный оператор из $C_{p,1}$.

Отметим, что в определении множеств $B_{p,2}$, $C_{p,2}$ число α может равняться нулю, так что $B_{p,2}$ является объединением всех компактных по мере операторов 2-го и 1-го родов из $B(L_p(\mu))$, а $C_{p,2}$ есть объединение всех почти компактных операторов 2-го и 1-го родов из $B(L_p(\mu))$.

Из определений 2.2, 2.3 следует, что при $1 \leq p \leq \infty$ множества $B_{p,1}$, $B_{p,2}$, $B_{p,3}$, $C_{p,1}$, $C_{p,2}$, $C_{p,3}$ являются алгебрами и $B_{p,1} \subset B_{p,2} \subset B_{p,3} \subset B(L_p(\mu))$, $C_{p,1} \subset C_{p,2} \subset C_{p,3}$, $C_{p,1} \subset B_{p,1}$, $C_{p,2} \subset B_{p,2}$, $C_{p,3} \subset B_{p,3}$. Кроме того, $B_{p,1}$ и $C_{p,1}$ являются правыми идеалами алгебры $B(L_p(\mu))$.

Теорема 2.1. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда $B_{p,1}$ — замкнутый правый идеал алгебры $B(L_p(\mu))$.*

Доказательство. Пусть $Q_n \in B_{p,1}$ $(n = 1, 2, \dots)$, $Q \in B(L_p(\mu))$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|Q_n - Q\| = 0$. Покажем, что $Q \in B_{p,1}$. Для любого $e \subset X$, $0 < \mu e < \infty$, при $n \to \infty$ имеем

$$\sup_{\|f\|_p \le 1} \|(P_e Q - P_e Q_n) f\|_1 \le (\mu e)^{\frac{1}{q}} \|Q - Q_n\| \to 0,$$

где $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_p(\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. По теореме 1.2 все операторы $P_e Q_n : L_p(\mu) \to L_1(\mu)$ компактны. Следовательно, оператор $P_e Q : L_p(\mu) \to L_1(\mu)$ компактен. Значит, $Q \in B_{p,1}$. $\square$

Определение 2.4. Число β называется *существенным значением функции* $b \in L_0(X, \mu)$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mu\{s \mid s \in X, |b(s) - \beta| < \varepsilon\} > 0.$$

Теорема 2.2 [10]. *Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $B_{p,3}$ — банахова алгебра, не совпадающая с алгеброй $B(L_p(\mu))$. Кроме того, для любого оператора $\tau f = af + Kf$, $f \in L_p(\mu)$, из $B_{p,3}$ имеет место неравенство*

$$\|a\|_\infty \le \|\tau\| \tag{2}$$

и каждое существенное значение функции $\overline{a(s)}$ принадлежит предельному спектру сопряженного оператора τ^*.

Эта теорема является объединением теоремы 3 и ее следствий 1.2 из [10] (в [10] алгебра $B_{p,3}$ обозначена через $L_{p,1}$).

Теорема 2.3. *Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $B_{p,2}$ — банахова алгебра, не совпадающая ни с $B_{p,1}$, ни с $B_{p,3}$.*

Доказательство. Пусть $M_n \in B_{p,2}$ $(n = 1, 2, \dots)$, $M \in B(L_p(\mu))$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|M_n - M\| = 0$. Тогда $M_n f = \alpha_n f + L_n f$, $f \in L_p(\mu)$, где $L_n \in B_{p,1}$. По теореме 2.2 (неравенство (2)) $|\alpha_n - \alpha_m| \le \|M_n - M_m\|$. Отсюда

$$\|L_n - L_m\| \le |\alpha_n - \alpha_m| + \|M_n - M_m\| \le 2\|M_n - M_m\|.$$

Следовательно, существуют α и $L \in B(L_p(\mu))$ такие, что $\alpha_n \to \alpha$ и $\|L_n - L\| \to 0$. По теореме 2.1 $L \in B_{p,1}$, поэтому оператор $M = \lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n 1 + L_n) = \alpha 1 + L$ принадлежит $B_{p,2}$.

Так как $1 \in B_{p,2} \setminus B_{p,1}$, то $B_{p,2} \ne B_{p,1}$. Покажем, что $B_{p,2} \ne B_{p,3}$. Возьмем множество e положительной меры с дополнением ce положительной меры и рассмотрим оператор $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_p(\mu)$. Имеем $P_e \in B_{p,3}$. Докажем, что $P_e \notin B_{p,2}$. Предположим противное. Тогда $P_e = \beta 1 + K$, где $K \in B_{p,1}$. Если $\beta = 0$, то $P_e = K$, что в силу неатомичности меры μ невозможно. Если $\beta = 1$, то $P_{ce} = -K$, что также невозможно. Пусть $\beta \ne 0$, $\beta \ne 1$. Спектр оператора P_e есть множество $\{0; 1\}$. Следовательно, оператор $P_e - \beta 1$ имеет обратный $(P_e - \beta 1)^{-1} \in B(L_p(\mu))$. Поэтому $K^{-1} \in B(L_p(\mu))$. Но тогда оператор $1 = KK^{-1}$ компактен по мере, что также невозможно. $\square$

Теорема 2.4 [11]. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда $C_{p,1}$ — замкнутый правый идеал алгебры $B(L_p(\mu))$.*

Теорема 2.5. *Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $C_{p,3}$ — банахова алгебра с единицей, не совпадающая с алгеброй $B(L_p(\mu))$.*

Доказательство. Имеем $C_{p,3} \subset B_{p,3}$, и по теореме 2.2 $B_{p,3} \neq B(L_p(\mu))$. Докажем замкнутость $C_{p,3}$. Пусть $T_n \in C_{p,3}$ $(n = 1, 2, \dots)$, $T \in B(L_p(\mu))$ и $\|T_n - T\| \to 0$. Далее, $T_n = A_n + Q_n$, где $Q_n \in C_{p,1}$, $A_n f = a_n f$, $f \in L_p(\mu)$, $a_n \in L_\infty(\mu)$. По теореме 2.2 (неравенство (2)) для любых m, n получим $\|a_n - a_m\|_\infty \leq \|T_n - T_m\|$. Отсюда $\|Q_n - Q_m\| \leq \|a_n - a_m\|_\infty + \|T_n - T_m\| \leq 2\|T_n - T_m\|$. Следовательно, найдутся $a \in L_\infty(\mu)$ и $Q \in B(L_p(\mu))$ такие, что $\|a_n - a\|_\infty \to 0$ и $\|Q_n - Q\| \to 0$. В силу теоремы 2.4 $Q \in C_{p,1}$. Значит, оператор $Tf = af + Qf$, $f \in L_p(\mu)$, принадлежит $C_{p,3}$. □

Теорема 2.6. *Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $C_{p,2}$ — банахова алгебра с единицей, не совпадающая ни с $C_{p,1}$, ни с $C_{p,3}$.*

Доказательство. Из включения $C_{p,2} \subset C_{p,3}$ и доказательства предыдущей теоремы вытекает замкнутость $C_{p,2}$. Из $1 \in C_{p,2}$ и $1 \notin C_{p,1}$ следует, что $C_{p,2} \neq C_{p,1}$. Покажем, что $C_{p,2} \neq C_{p,3}$. Оператор P_e из доказательства теоремы 2.3 принадлежит $C_{p,3}$, но не принадлежит $B_{p,2} \supset C_{p,2}$. Значит, $C_{p,2} \neq C_{p,3}$. □

Теорема 2.7 [11]. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда $\overline{I}_{p,1} = C_{p,1}$ (здесь и далее черта означает замыкание по операторной норме).*

Теорема 2.8. *Пусть $1 < p < \infty$ и мера μ не имеет атомов. Тогда $\overline{I_{p,1} \cup I_{p,2}} = C_{p,2}$, $\overline{I}_{p,3} = C_{p,3}$.*

Доказательство. Имеем $I_{p,3} \subset C_{p,3}$. Значит, $\overline{I}_{p,3} \subset \overline{C}_{p,3} = C_{p,3}$. Пусть $T \in C_{p,3}$. Тогда $T = A + Q$, где $Af = af$, $f \in L_p(\mu)$, $a \in L_\infty(\mu)$, $Q \in C_{p,1}$. По предыдущей теореме найдутся $Q_n \in I_{p,1}$ такие, что $\|Q_n - Q\| \to 0$. Следовательно, $T_n = A + Q_n \in I_{p,3}$ и $\|T_n - T\| \to 0$. Поэтому $T \in \overline{I}_{p,3}$ и $C_{p,3} \subset \overline{I}_{p,3}$. Значит, $\overline{I}_{p,3} = C_{p,3}$. Равенство $\overline{I_{p,1} \cup I_{p,2}} = C_{p,2}$ доказывается аналогично. □

В заключение параграфа рассмотрим некоторые свойства интегральных операторов 1-го, 2-го и 3-го родов.

1. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда $I_{p,1} \subset I_{p,1} \cup I_{p,2} \subset I_{p,3}$, и если мера μ не имеет атомов, то $I_{p,1} \neq I_{p,2} \neq I_{p,3}$.

Действительно, $1 \in I_{p,2} \setminus I_{p,1}$ и $P_e \in I_{p,3} \setminus I_{p,2}$, где P_e — оператор из доказательства теоремы 2.3.

2. Множество $I_{p,1}$ не является алгеброй: в [12; 13, теорема I.4.18] В. Д. Степанов для любого $1 < p < \infty$ построил интегральный оператор свертки в $L_p(-\infty, \infty)$, квадрат которого не является интегральным оператором. В [14; 7, теорема I.8.2] построены два компактных интегральных оператора из $B(L_2(0,1))$, произведение которых не является интегральным оператором. В [15; 16, § 5, теорема 8] построен компактный интегральный оператор $S \in B(L_2(0,1))$, квадрат которого не является интегральным оператором, а $S^3 = 0$. Эти результаты дают отрицательный ответ на вопрос, поставленный Халмошем и Сандером [9, задача 11.8]. Задача об условиях интегральности произведения двух интегральных операторов и более общая задача об условии интегральности операторных произведений, в которых один или несколько сомножителей — интегральные операторы, изучались в [16].

Множества $I_{p,1} \cup I_{p,2}$ и $I_{p,3}$, по-видимому, также не являются алгебрами. Покажем это в случае $p = 2$.

Теорема 2.9. *Подмножества $I_{2,1} \cup I_{2,2}$ и $I_{2,3}$ алгебры $B(L_2(0,1))$ не являются алгебрами.*

Доказательство. Рассмотрим упоминавшийся выше интегральный оператор $S \in B(L_2(0,1))$, квадрат которого не является интегральным оператором, а $S^3 = 0$. Имеем $S \in I_{2,3}$. Покажем, что $S^2 \notin I_{2,3}$. Предположим противное. Тогда $S^2 f = af + Lf$, $f \in L_2(0,1)$, $a \in L_\infty(0,1)$, L — интегральный оператор. Так как $S^3 = 0$, спектральный радиус оператора S^2 равен 0. Следовательно, спектр оператора S^2 есть $\{0\}$. Значит, спектр $(S^2)^*$ также $\{0\}$. Отсюда по теореме 2.2 получим $a(s) = 0$ для почти всех $s \in [0,1]$. Таким образом, $S^2 = L$ — интегральный оператор, что противоречит неинтегральности оператора S^2.

Аналогично доказывается, что множество $I_{2,1} \cup I_{2,2}$ не является алгеброй. □

3. Необходимые и достаточные условия представимости линейных операторов в интегральной форме найдены в 1970-х гг. С. И. Ждановым [17], А. В. Бухваловым [18], Л. Лесснером [19]. Характеристику интегральных операторов 3-го рода дает приводимая ниже теорема 2.10. Используемое в формулировке этой теоремы понятие модуля оператора см. в [20, с. 46].

Теорема 2.10 [10]. *Пусть $1 < p < \infty$, мера μ конечна и не имеет атомов. Оператор $T \in B(L_p(\mu))$ принадлежит $I_{p,3}$ тогда и только тогда, когда найдется интегральный оператор $Z : L_p(\mu) \to L_0(\mu)$ с неотрицательным ядром такой, что для любого множества $e \in X$ положительной меры оператор $P_e T P_{X \setminus e}$ регулярен как оператор из $L_p(\mu)$ в $L_0(\mu)$ и $|P_e T P_{X\setminus e}| \le Z$.*

Эта теорема для $p = 2$ доказана в [21]. Для $1 < p < \infty$ доказательство аналогично.

3. Характеристические свойства компактных по мере, почти компактных и интегральных операторов 1-го, 2-го и 3-го родов в L_2

Определение 3.1. Интегральный оператор $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ называется *карлемановским*, если его ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию Карлемана [22]

$$\int\limits_X |K(s,t)|^2 \, d\mu(t) < \infty$$

для почти всех $s \in X$.

Имеет место следующий критерий.

Теорема 3.1 [23; 7]. *Для того чтобы линейный оператор $K : D_K \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ был карлемановским интегральным оператором, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\Lambda \in L_0(\mu)$ такая, что для любого $f \in D_K$ при почти всех $s \in X$ выполнялось неравенство $|Kf(s)| \le \Lambda(s)\|f\|$ (здесь и далее $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(\mu)$).*

Из этой теоремы непосредственно следует лемма о правом умножении, играющая важную роль в теории карлемановских интегральных операторов.

Лемма [24]. *Пусть $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — карлемановский интегральный оператор, $H \in B(L_2(\mu))$. Тогда TH — карлемановский интегральный оператор.*

Доказательство. Для любого $f \in D_{TH}$ при почти всех $s \in X$ имеем

$$|THf(s)| \leq \Lambda(s)\|Hf\| \leq \Lambda(s)\|H\|\|f\|. \quad \square$$

Лемма о правом умножении впервые была сформулирована и доказана (другим методом) в [24].

Определение 3.2. Обозначим через K_1 совокупность всех карлемановских интегральных операторов из $B(L_2(\mu))$. Через K_2 обозначим множество операторов из $B(L_2(\mu))$, представимых в виде $\alpha 1 + L$, где L — произвольный оператор из K_1 и α — произвольное число. Через K_3 обозначим совокупность всех операторов из $B(L_2(\mu))$ вида $af + Lf$, $f \in L_2(\mu)$, где a — произвольная функция из $L_\infty(\mu)$ и L — произвольный оператор из K_1.

Из леммы о правом умножении непосредственно следует, что множества K_1, K_2, K_3 являются алгебрами. Как показывает теорема 2.9, в отличие от алгебр K_1, K_2, K_3 множества $I_{2,1}$, $I_{2,2}$, $I_{2,3}$ интегральных операторов 1-го, 2-го и 3-го родов, введенные в определении 2.1, не являются алгебрами.

В алгебре $B(L_2(\mu))$ имеется естественная инволюция $J : T \to T^*$. Однако ее подмножества K_1, K_2, K_3, $I_{2,1}$, $I_{2,2}$, $I_{2,3}$ и введенные в определениях 2.2, 2.3 множества $B_{2,1}$, $B_{2,2}$, $B_{2,3}$, $C_{2,1}$, $C_{2,2}$, $C_{2,3}$ не инвариантны относительно этой инволюции, как показывает следующий

Пример. Пусть $\{w_n\}$ — ортонормированный базис в $L_2(0,1)$, состоящий из функций Уолша, $\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из $(0,1)$ с положительными мерами. Определим оператор $T_1 \in B(L_2(0,1))$ равенством

$$T_1 f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, w_n) \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{me_n}}, \quad f \in L_2(0,1),$$

где m — мера Лебега. Оператор T_1 принадлежит множеству K_1, самому узкому из всех перечисленных выше подмножеств, в то время как сопряженный оператор T_1^* не принадлежит самому широкому $B_{2,3}$.

Доказательство. Так как e_n $(n = 1, 2, \dots)$ попарно не пересекаются, T_1 — карлемановский интегральный оператор, т. е. $T_1 \in K_1$.

Покажем, что $T_1^* \notin B_{2,3}$. Предположим противное. Тогда найдутся $a \in L_\infty[0,1]$ и компактный по мере оператор $M \in B(L_2(0,1))$ такие, что $T_1^* f = af + Mf$, $f \in L_2(0,1)$. Так как $\|T_1 f\| = \|f\|$ для всех $f \in L_2(0,1)$, нуль не принадлежит предельному спектру оператора T_1. Поэтому по теореме 2.2 нуль не является существенным значением функции a. Значит, $\frac{1}{a} \in L_\infty[0,1]$, и $\frac{1}{a}M$ — компактный по мере оператор из $B(L_2(0,1))$. Имеем $\frac{1}{a}T_1^* = 1 + \frac{1}{a}M$,

$$\frac{1}{a} w_n = \frac{1}{a} T_1^* \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{me_n}} = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{me_n}} + \frac{1}{a} M \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{me_n}}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

По теореме 1.2 $\left\|\frac{1}{a} M \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{me_n}}\right\|_1 \to 0$. Кроме того, $\|\chi_{e_n}/\sqrt{me_n}\|_1 \to 0$. С другой стороны, $\left\|\frac{1}{a} w_n\right\|_1 = \left\|\frac{1}{a}\right\|_1 \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$. $\square$

Перейдем к описанию унитарных моделей введенных выше операторов.

Определение 3.3. Будем говорить, что число λ *принадлежит предельному спектру* $\sigma_c(H)$ оператора H в $L_2(\mu)$, если в области определения оператора H найдется ортонормированная последовательность $\{h_n\}$ такая, что $\|(H - \lambda 1)h_n\| \to 0$.

В 1935 г. Дж. фон Нейман [25] доказал следующий фундаментальный результат.

Теорема 3.2. *Пусть T — самосопряженный оператор в $L_2(a,b)$ и $0 \in \sigma_c(T)$. Тогда T унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору.*

На несамосопряженные операторы этот результат был обобщен автором [26, 27] и Вайдманом [28].

Теорема 3.3. *Пусть T — плотно определенный в сепарабельном пространстве $L_2(\mu)$ замыкаемый линейный оператор и $0 \in \sigma_c(T^*)$. Тогда T унитарно эквивалентен карлемановскому интегральному оператору.*

Следствие 1. *Пусть $L_2(\mu)$ — сепарабельное пространство, $T \in B(L_2(\mu))$ и $\bar{\lambda} \in \sigma_c(T^*)$. Тогда T унитарно эквивалентен оператору $\lambda 1 + L$, где L — карлемановский интегральный оператор.*

Следствие 2. *Пусть $L_2(\mu)$ — комплексное сепарабельное пространство, $T \in B(L_2(\mu))$. Тогда T унитарно эквивалентен оператору из K_2.*

Следствие 2 непосредственно вытекает из следствия 1, так как предельный спектр $\sigma_c(T^*)$ непуст.

Отметим, что утверждения теоремы 3.3 и следствия 1 справедливы и в случае, когда $L_2(\mu)$ — вещественное пространство.

Теорема 3.4. *Пусть мера μ сепарабельна и не имеет атомов. Тогда каждый оператор из $B_{2,3}$, $C_{2,3}$, $I_{2,3}$, $B_{2,2}$, $C_{2,2}$, $I_{2,2}$ унитарно эквивалентен оператору из K_2.*

Доказательство. Если $L_2(\mu)$ — комплексное пространство, то справедливость теоремы вытекает из следствия 2. Пусть $L_2(\mu)$ — вещественное пространство. Так как все перечисленные в теореме множества содержатся в $B_{2,3}$, достаточно доказать теорему для операторов из $B_{2,3}$. Пусть $T \in B_{2,3}$. Тогда $Tf = af + Lf$, $f \in L_2$, где $a \in L_\infty(\mu)$ и $L \in B_{2,1}$. Пусть λ — какое-нибудь существенное значение функции a. По теореме 2.2 $\lambda \in \sigma_c(T^*)$ и в силу следствия 1 теоремы 3.3 оператор T унитарно эквивалентен оператору $\lambda 1 + C$, где $C \in K_1$. $\square$

Теорема 3.5. *Пусть мера μ сепарабельна и не является чисто атомической. Тогда каждый оператор из $B_{2,1}$, $C_{2,1}$, $I_{2,1}$ унитарно эквивалентен оператору из K_1.*

Доказательство. Пусть $e \subset X$, $0 < \mu e < \infty$, и в e нет атомов меры μ. Возьмем произвольный оператор $T \in B_{2,1} \supset C_{2,1} \supset I_{2,1}$. В силу теоремы 1.2 оператор $P_e T : L_2(\mu) \to L_1(\mu)$ компактен. Следовательно, $T^* P_e : L_\infty(\mu) \to L_2(\mu)$ компактен. Рассмотрим равномерно ограниченную ортонормированную систему $\{\varphi_n\}$ функций, носители которых содержатся в e. Тогда $\|T^*\varphi_n\| = \|T^* P_e \varphi_n\| \to 0$. Значит, $0 \in \sigma_c(T^*)$, и по теореме 3.3 оператор T унитарно эквивалентен оператору из K_1. $\square$

Рассмотрим еще одну задачу о характеристических свойствах операторов, восходящую к [24]. В этой работе было введено понятие сильного карлемановского интегрального оператора.

Определение 3.4 [24]. Оператор $T \in B(L_2(\mu))$ называется *сильным карлемановским интегральным оператором*, если для любого унитарного оператора $U \in B(L_2(\mu))$ оператор UTU^{-1} также является карлемановским интегральным оператором.

Характеристические свойства таких операторов устанавливает следующая

Теорема 3.6 [24]. *Пусть мера μ не чисто атомическая. Для того чтобы оператор $T \in B(L_2(\mu))$ был сильным карлемановским оператором, необходимо и достаточно, чтобы T был интегральным оператором Гильберта — Шмидта, т. е. его ядро $K(s,t)$ удовлетворяло условию Гильберта — Шмидта*

$$\int\limits_X \int\limits_X |K(s,t)|^2 \, d\mu(t) d\mu(s) < \infty.$$

Если обозначить через K_1^s совокупность всех сильных карлемановских интегральных операторов из $B(L_2(\mu))$, а через C_2 — множество всех интегральных операторов Гильберта — Шмидта из $B(L_2(\mu))$, то теорема 3.6 допускает краткую запись: $K_1^s = C_2$. По аналогии с определением 3.4 дадим

Определение 3.5. Пусть $F \subset B(L_2(\mu))$. Оператор $T \in F$ назовем *сильным F-оператором*, если $UTU^{-1} \in F$ для любого унитарного оператора $U \in B(L_2(\mu))$. Множество всех сильных F-операторов обозначим через F^s.

Пусть C — множество всех компактных операторов из $B(L_2(\mu))$, $\widetilde{C}$ — совокупность операторов вида $\alpha 1 + L$, где α — произвольное число, L — произвольный оператор из C. Через C_2 обозначим совокупность всех интегральных операторов Гильберта — Шмидта из $B(L_2(\mu))$, через $\widetilde{C}_2$ — множество операторов вида $\alpha 1 + H$, где α — произвольное число, H — произвольный оператор из C_2.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3.7. *Пусть мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов. Тогда $B_{2,3}^s = B_{2,2}^s = C_{2,3}^s = C_{2,2}^s = \widetilde{C}$.*

Теорема 3.8. *Пусть мера μ σ-конечна, сепарабельна и не является чисто атомической. Тогда $B_{2,1}^s = C_{2,1}^s = C$.*

Теорема 3.9. *Пусть мера μ σ-конечна, сепарабельна и не является чисто атомической. Тогда $I_{2,1}^s = K_1^s = C_2$.*

Теорема 3.10. *Пусть мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов. Тогда $I_{2,3}^s = K_3^s = (I_{2,1} \cup I_{2,2})^s = K_2^s = \widetilde{C}_2$.*

Перейдем к доказательству этих теорем.

Доказательство теоремы 3.7. Покажем, что $B_{2,3}^s \subset \widetilde{C}$. Так как мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов, в силу теоремы 3 из [29, с. 170] об изоморфизме пространств с мерами можно считать, что $L_2(\mu)$ есть $L_2(0,1) := L_2$ и μ — мера Лебега.

Пусть $T \in B_{2,3}^s$. Тогда $T = A + Q$, где $Af = af$, $f \in L_2$, $a \in L_\infty(0,1)$, $Q \in B_{2,1}$. В силу теоремы 1.2 оператор $Q : L_2 \to L_1$ компактен (такие операторы будем называть далее $\langle 2,1 \rangle$-*компактными*).

Выберем в доказательстве теоремы 3 из [10] $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ и рассмотрим ортонормированную систему $\{f_n\}$ из этого доказательства. Имеем

$$\|(\overline{a(s)} - \bar{\alpha}) f_n\| \le \frac{1}{n}, \quad \|Q^* f_n\| \le \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда $\|(T^* - \bar{\alpha} 1) f_n\| \le \frac{2}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Положим $K = T - \alpha 1$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|K^* f_n\|^2 < \infty$. Введем оператор Гильберта — Шмидта

$$\Gamma f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n) K^* f_n, \quad f \in L_2.$$

Так как $K^* f_n - \Gamma f_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$, то $\operatorname{im}(K - \Gamma^*) := (K - \Gamma^*)L_2 \subseteq F^\perp$, где $F^\perp$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке последовательности $\{f_n\}$. Определим унитарный оператор W в L_2 равенствами

$$Wf_n^\perp = r_n, \quad Wf_n = u_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $\{f_n^\perp\}$ — ортонормированный базис в $F^\perp$, $\{r_n\}$ — ортонормированная последовательность функций Радемахера, $\{u_n\} = \{w_n\} \setminus \{r_n\}$, $\{w_n\}$ — ортонормированный базис Уолша в $L_2(0,1)$. Тогда

$$\operatorname{im}[W(K - \Gamma^*)W^{-1}] \subseteq WF^\perp = R, \tag{3}$$

где R — замкнутая линейная оболочка последовательности $\{r_n\}$. По условию теоремы $WTW^{-1} = A_1 + Q_1$, где $A_1 f = a_1 f$, $f \in L_2$, $a_1 \in L_\infty$, Q_1 — $\langle 2,1\rangle$-компактный оператор в L_2. Тогда $WKW^{-1} = A_1 + Q_1 - \alpha 1$. Так как

$$W(K^* - \Gamma)W^{-1}u_n = W(K^* - \Gamma)f_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то

$$W\Gamma W^{-1}u_n = WK^*W^{-1}u_n = \bar{a}_1 u_n - \bar{\alpha} u_n + Q_1^* u_n, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Но $\|W\Gamma W^{-1}u_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, $\|Q_1^* u_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, так как $Q_1^* : L_\infty \to L_2$ — компактный оператор, $\{u_n\}$ — равномерно ограниченная ортонормированная последовательность. Следовательно, $\|(\overline{a_1(s)} - \bar{\alpha})u_n(s)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что $a_1(s) = \alpha$ для п. в. $s \in [0,1]$. Предположим противное. Тогда найдутся $\beta > 0$ и $e \subset [0,1]$ такие, что $\mu e > 0$ и $|a_1(s) - \alpha| \geq \beta$ для всех $s \in e$. Имеем $\|(\overline{a_1(s)} - \bar{\alpha})u_n\| \geq \beta\sqrt{\mu e}$, что противоречит $\|(\overline{a_1(s)} - \bar{\alpha})u_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$WKW^{-1} = A_1 - \alpha 1 + Q_1 = Q_1.$$

В силу (3) $\operatorname{im} W(K - \Gamma^*)W^{-1} \subseteq R$. Тогда $\operatorname{im}(Q_1 - W\Gamma^* W^{-1}) \subseteq R$. Таким образом, оператор $Q_2 = Q_1 - W\Gamma^* W^{-1}$ $\langle 2,1\rangle$-компактен и принимает значения в R. Покажем, что Q_2 — компактный оператор. Пусть $\{\psi_n\}$ — произвольная слабо сходящаяся к 0 последовательность. Тогда $\{Q_2\psi_n\}$ сходится к 0 по норме $L_1(0,1)$. Так как $\{Q_2\psi_n\} \subset R$, в силу следствия из неравенства Хинчина [8, предложение 4.5.7]

$$\|Q_2\psi_n\| \leq 8\|Q_2\psi_n\|_1,$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма в $L_1(0,1)$. Отсюда $\|Q_2\psi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ и, стало быть, Q_2 — компактный оператор. Тогда Q_1 — компактный оператор. Но $WTW^{-1} = \alpha 1 + Q_1$, поэтому $T = \alpha 1 + L$, где $L = W^{-1}Q_1 W$ — компактный оператор. Таким образом, $T \in \widetilde{C}$ и $B^s_{2,3} \subset \widetilde{C}$. Доказательство завершается с помощью следующих цепочек включений:

$$\widetilde{C} = \widetilde{C}^s \subset C^s_{2,2} \subset C^s_{2,3} \subset B^s_{2,3} \subset \widetilde{C}, \quad \widetilde{C} = \widetilde{C}^s \subset B^s_{2,2} \subset B^s_{2,3} \subset \widetilde{C}. \quad \square$$

Доказательство теоремы 3.8 содержится в первой части доказательства теоремы 1 из работы [30], где использовалось лишь то, что T — сильный компактный по мере оператор.

Приведем короткое доказательство теоремы 3.8 в случае, когда мера μ конечна. Пусть $T \in B^s_{2,1} \supset C^s_{2,1}$. По теореме 3.7 получим $T = \alpha 1 + K$, где $K \in C$ — компактный оператор. Отсюда $\sigma_c(T^*) = \{\bar{\alpha}\}$. Кроме того, по теореме 2.2 имеем

$0 \in \sigma_c(T^*)$. Значит, $\alpha = 0$ и $T = K \in C$. Таким образом, $C_{2,1}^s \subset B_{2,1}^s \subset C$. Так как $C = C^s \subset C_{2,1}^s \subset B_{2,1}^s$, то $C_{2,1}^s = B_{2,1}^s = C$. $\square$

Доказательство теоремы 3.9. Равенство $I_{2,1}^s = C_2$ было установлено в [30, теорема 1]. Отсюда и из $C_2 = C_2^s \subset K_1^s \subset I_{2,1}^s$ следует $K_1^s = C_2$. $\square$

Другое доказательство утверждения $I_{2,1}^s = C_2$ приведено в [9].

Доказательство теоремы 3.10. Достаточно показать, что $I_{2,3}^s = \widetilde{C}_2$. Пусть $T \in I_{2,3}^s$. Из $I_{2,3}^s \subset B_{2,3}^s$ и теоремы 3.7 следует, что $T = \alpha 1 + K$, где $K \in C$. Отсюда $\sigma_c(T^*) = \{\bar{\alpha}\}$. Поскольку $T \in I_{2,3}$, то $Tf = af + Lf$, $f \in L_2(\mu)$, где $a \in L_\infty(\mu)$ и $L \in I_{2,1}$. Из равенства $\sigma_c(T^*) = \{\bar{\alpha}\}$ и теоремы 2.2 получим $a(s) = \alpha$ для почти всех $s \in X$. Значит, $T = \alpha 1 + L$, поэтому $L = K \in C$. Для любого унитарного оператора $U \in B(L_2(\mu))$ имеем $UTU^{-1} = \alpha 1 + ULU^{-1}$. Так как $UTU^{-1} \in I_{2,3}$, то $UTU^{-1}f = bf + Mf$, $f \in L_2(\mu)$, где $b \in L_\infty(\mu)$ и $M \in I_{2,1}$. Отсюда подобно предыдущему $b(s) = \beta$ для п. в. $s \in X$ и $\sigma_c(UT^*U^{-1}) = \{\bar{\beta}\}$. Значит, $UTU^{-1} = \beta 1 + M$. Но $\{\bar{\alpha}\} = \sigma_c(T^*) = \sigma_c(UT^*U^{-1}) = \{\bar{\beta}\}$. Таким образом, $\alpha = \beta$ и $ULU^{-1} = M$. Следовательно, $L \in I_{2,1}^s$. По теореме 3.9 $L \in C_2$, так что $T \in \widetilde{C}_2$ и $I_{2,3}^s \subset \widetilde{C}_2$. Отсюда и из $\widetilde{C}_2 = \widetilde{C}_2^s \subset I_{2,3}^s$ получаем $I_{2,3}^s = \widetilde{C}_2$. $\square$

Рассмотрим еще три важных класса операторов.

Определение 3.6. Интегральный оператор в $L_2(\mu)$ назовем *ахиезеровским*, если его ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию Ахиезера [31]: существует функция $\Lambda \in L_0(\mu)$ такая, что $|K(s,t)| \le \Lambda(s)\Lambda(t)$ для $(\mu \times \mu)$-почти всех $(s,t) \in X \times X$. Совокупность всех ахиезеровских интегральных операторов из $B(L_2(\mu))$ обозначим через A_1. Через A_2 обозначим множество всех операторов вида $\alpha 1 + H$, где α — произвольное число, H — произвольный оператор из A_1. Через A_3 обозначим совокупность всех операторов, представимых в виде $af + Gf$, $f \in L_2(\mu)$, где a — произвольная функция из $L_\infty(\mu)$, G — произвольный оператор из A_1. Согласно определению 3.5 через A_1^s, A_2^s, A_3^s обозначим классы всех сильных A_1-, A_2-, A_3-операторов соответственно.

Напомним, что оператор из $B(L_2(\mu))$ называется *ядерным*, если он является произведением двух интегральных операторов Гильберта — Шмидта из $B(L_2(\mu))$. Класс всех ядерных операторов из $B(L_2(\mu))$ обозначим через C_1. Через $\widetilde{C}_1$ обозначим множество всех операторов $\alpha 1 + D$, где α — произвольное число, D — произвольный оператор из C_1.

Теорема 3.11. *Пусть мера μ сепарабельна, σ-конечна и не имеет атомов. Тогда $A_1^s = C_1$.*

Эта теорема доказана в [30, теорема 2].

Теорема 3.12. *Пусть мера μ конечна, сепарабельна и не имеет атомов. Тогда $A_3^s = A_2^s = \widetilde{C}_1$.*

Эта теорема доказывается с помощью теоремы 3.11 так же, как теорема 3.10 доказывается с помощью теоремы 3.9.

Замечание 1. Условие неатомичности меры μ, фигурирующее в большинстве теорем этого параграфа, существенно: нетрудно проверить, что когда мера μ чисто атомическая и сепарабельная, класс $(A_1 \cap K_1)^s$, самый узкий из всех рассмотренных в § 3, совпадает с $B(L_2(\mu))$.

Замечание 2. Все результаты статьи, за исключением следствия 2 теоремы 3.3, справедливы и для операторов в вещественных $L_p(\mu)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
2. *Schachermayer W., Weis L.* Almost compactness and decomposability of integral operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81, N 4. P. 595–599.
3. *Коротков В. Б.* Компактные по мере, почти компактные операторы и линейные функциональные уравнения в L_p // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 610–619.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
5. *Коротков В. Б., Степанов В. Д.* О некоторых свойствах интегральных операторов свертки // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1979. С. 64–68.
6. *Коротков В. Б.* О регулярной и компактной факторизации интегральных операторов в L_p // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 5. С. 601–606.
7. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
8. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.
9. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. М.: Наука, 1985.
10. *Коротков В. Б.* Об одной алгебре линейных непрерывных операторов // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 310–314.
11. *Weis L.* Integral operators and changes of density // Indiana Univ. Math. J. 1982. V. 31, N 1. P. 83–96.
12. *Степанов В. Д.* Об одной проблеме Халмоша и Сандера // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 2. С. 296–298.
13. *Степанов В. Д.* Некоторые вопросы теории интегральных операторов свертки. Владивосток: Дальнаука, 2000.
14. *Коротков В. Б.* К задачам Халмоша — Сандера об интегральных операторах в L_2 // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 3. С. 214–216.
15. *Коротков В. Б.* О неинтегральности резольвент Фредгольма некоторых интегральных операторов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 905–907.
16. *Коротков В. Б.* Введение в алгебраическую теорию интегральных операторов. Владивосток: Колорит, 2000.
17. *Жданов С. И.* О некоторых вопросах общей теории линейных систем // Оптимизация. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1973. Вып. 12. С. 52–76.
18. *Бухвалов А.В.* Об интегральном представлении линейных операторов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1974. Т. 47. С. 4–14.
19. *Lessner L.* A lattice theoretic characterization of an integral operator // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 53, N 2. P. 391–395.
20. *Бухвалов А.В.* Приложения методов теории порядково ограниченных операторов к теории операторов в пространствах L^p // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, № 6. С. 37–83.
21. *Коротков В. Б.* Об интегральных операторах третьего рода // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 1063–1066.
22. *Carleman T.* Sur les équations intégrales singulières a noyau réel et symétrique. Uppsala: A.-B. Lundequistska Bokhandeln, 1923.
23. *Коротков В. Б. Об интегральных операторах с ядрами Карлемана* // Докл. АН СССР. 1965. Т. 165, № 4. С. 748–751.
24. *Misra B., Speiser D., Targonski G.* Integral operators in the theory of scattering // Helv. Phys. Acta. 1963. V. 36, N 7. P. 963–980.
25. *Neumann J. von.* Charakterisierung des Spectrums eines Integraloperators // Actual. scient. et industr. Paris: Hermann, 1935. V. 229. P. 38–55.
26. *Коротков В. Б.* О характеристических свойствах интегральных операторов с ядрами карлемановского типа // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 1. С. 103–127.
27. *Коротков В. Б.* Классификация и характеристические свойства карлемановских операторов // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 6. С. 1274–1277.
28. *Weidmann J.* Carlemanoperatoren // Manuscripta Math. 1970. V. 2, N 1. P. 1–38.
29. *Халмош П.* Теория меры. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
30. *Коротков В. Б.* О сильных интегральных операторах // Мат. заметки. 1974. Т. 16, № 6. С. 907–912.

31. *Ахиезер Н. И.* Интегральные операторы с ядрами Карлемана // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2, № 5. С. 93–132.

Статья поступила 30 мая 2015 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090