Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 517.53/55

НОВЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСПРЯМЛЯЕМЫХ КРИВЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Д. Б. Кац

Аннотация. Вводятся новые метрические характеристики неспрямляемых кривых. Они допускают приложения в теории краевых задач для аналитических функций. В частности, с помощью этих характеристик получены более точные по отношению к имеющимся условия разрешимости задачи о скачке и задачи Римана в областях с неспрямляемыми границами.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.211

Ключевые слова: неспрямляемая кривая, метрическая характеристика, задача о скачке, задача Римана.

Введение

В последние десятилетия появилось много публикаций по фрактальным множествам. Если такое множество является кривой, то эта кривая неспрямляема. Поэтому многие публикации содержат определения и исследования различных метрических характеристик неспрямляемых кривых (см., например, [1–3]). В данной работе мы вводим новые характеристики такого рода. Они позволяют получить более точные, чем известные ранее, условия разрешимости краевой задачи Римана в областях с неспрямляемыми границами и ее частного случая — задачи о скачке.

В разд. 1 приводим необходимые в дальнейшем предварительные сведения. В разд. 2 вводим новые метрические характеристики — показатели Марцинкевича — и устанавливаем их свойства. В последующих секциях описываются приложения этих показателей в краевых задачах.

1. Предварительные сведения

Перед введением собственно новых характеристик опишем вкратце базовые понятия и историю вопроса.

Пусть Γ — компактное множество на $\mathbb{C}$, $0 < \nu \leq 1$. Функция f, заданная на Γ, *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* ν, если

$$\sup\left\{\frac{|f(t')-f(t'')|}{|t'-t''|^{\nu}} : t', t'' \in \Gamma,\ t' \neq t''\right\} := h_\nu(f,\Gamma) < \infty.$$

Множество всех таких функций обозначается через $H_\nu(\Gamma)$. Очевидно, это множество имеет структуру линейного пространства; норма

$$\|f\|_\nu := h_\nu(f,\Gamma) + \sup\{|f(t)| : t \in \Gamma\}$$

превращает это пространство в банахово.

Пусть Γ — компактное множество на $\mathbb{C}$ и $N(\varepsilon, \Gamma)$ — количество кругов диаметра ε в наименьшем наборе, покрывающем Γ. *Верхняя метрическая размерность кривой* Γ есть следующий предел (см. [1, 2, 4, 5]):

$$\overline{\mathrm{dm}}\Gamma := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon, \Gamma)}{-\ln \varepsilon}.$$

Данная размерность плоских кривых заключена на отрезке $[1, 2]$; для спрямляемой кривой она равна единице, а для неспрямляемой может быть больше.

Пусть Γ — простая замкнутая неспрямляемая кривая. Она разбивает $\mathbb{C}$ на конечную область (обозначим ее через D^+) и содержащую бесконечно удаленную точку область (обозначим ее через D^-). *Задачей о скачке* называют краевую задачу об отыскании голоморфной в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi(z)$, которая непрерывна в $\overline{D^+}$ и в $\overline{D^-}$ и предельные значения которой в точках $t \in \Gamma$ из областей D^+ и D^- связаны соотношением

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1}$$

Задача о скачке является частным случаем задачи Римана, решения которой на гладких (или хотя бы кусочно гладких) контурах хорошо известны (см., например, [6, 7]). Для неспрямляемого контура следующее условие разрешимости было получено в [8, 9].

Теорема A (см. [8, 9]). *Пусть Γ — простая замкнутая (вообще говоря, неспрямляемая) кривая на комплексной плоскости и $f \in H_\nu(\Gamma)$. Если*

$$\nu > \frac{1}{2}\overline{\mathrm{dm}}\Gamma, \tag{2}$$

то задача о скачке (1) *имеет решение.*

Известен пример (см. [9]), когда условие (2) нарушено и задача о скачке неразрешима. Есть и другой пример (см. [10]), когда она имеет решения, несмотря на нарушение условия (2). Именно с этим связаны попытки улучшить и уточнить данное условие путем введения новых метрических характеристик. Например, в [10–12] введены так называемые аппроксимационная и уточненная метрическая размерности. Доказано, что

(i) каждая из этих размерностей для кривой Γ не превосходит верхней метрической размерности данной кривой и известны кривые, для которых она строго меньше ее;

(ii) теорема A сохраняет силу при замене в условии (2) верхней метрической размерности любой из этих размерностей.

Таким образом, ясно, что переход к этим характеристикам уточняет теорему A. Однако на практике оказалось, что точное вычисление данных характеристик затруднительно.

Итак, верхняя метрическая размерность не дает необходимой точности для оценки разрешимости задачи о скачке, а упомянутые выше аппроксимационная и уточненная метрическая размерности крайне трудны в вычислении. В связи с этим возникает потребность в создании новых метрических характеристик неспрямляемых кривых, лишенных этих недостатков.

2. Показатели Марцинкевича

Пусть Γ — замкнутая жорданова кривая, разбивающая комплексную плоскость на конечную область D^+ и бесконечную область D^-. В дальнейшем предполагаем, что эта кривая неспрямляема, но имеет нулевую площадь. С любой конечной областью D свяжем интеграл

$$I_p(D) = \iint\limits_D \frac{dxdy}{\operatorname{dist}^p(z,\Gamma)}, \quad z = x + iy.$$

Очевидно, что при $p = 0$ этот интеграл конечен и равен площади D. При больших p он может оказаться бесконечным. Далее, введем в рассмотрение область D^*, равную $D^- \cap \{z : |z| < r\}$, где r настолько велико, что Γ полностью содержится в этом круге.

Определение 1. Будем называть величины

$$\mathfrak{m}^+(\Gamma) = \sup\{p : I_p(D^+) < \infty\}, \quad \mathfrak{m}^-(\Gamma) = \sup\{p : I_p(D^*) < \infty\}$$

внутренним и *внешним показателями Марцинкевича кривой* Γ, а величину

$$\mathfrak{m}(\Gamma) = \max\{\mathfrak{m}^+(\Gamma), \mathfrak{m}^-(\Gamma)\}$$

(*абсолютным*) *показателем Марцинкевича* этой кривой.

Предлагаемое название связано с тем, что характеризация свойств множества через поведение некоторых интегралов по дополнению этого множества, содержащих $\operatorname{dist}(z,\Gamma)$, восходит к работам Марцинкевича (см., например, [13]).

Опишем некоторые свойства этих показателей.

Прежде всего отметим, что они сохраняются при движениях и преобразовании подобия контура Γ; в этом легко убедиться, делая соответствующие замены переменных в интеграле $I_p(D)$.

Менее тривиальные свойства показателей Марцинкевича описывает

Теорема 1. *Внутренний и внешний показатели Марцинкевича любой замкнутой кривой* Γ *удовлетворяют неравенствам*

$$1 \geq \mathfrak{m}^+(\Gamma) \geq 2 - \overline{\operatorname{dm}}\Gamma, \quad 1 \geq \mathfrak{m}^-(\Gamma) \geq 2 - \overline{\operatorname{dm}}\Gamma.$$

Если кривая Γ *спрямляема, то ее внутренний и внешний показатели Марцинкевича равны* 1.

Доказательство. Рассмотрим разбиение Уитни области D^+. Как известно [13], оно состоит из бинарных квадратов Q, удовлетворяющих оценке $\operatorname{diam} Q \leq \operatorname{dist}(Q,\Gamma) \leq C \operatorname{diam} Q$, где C — абсолютная константа.

Для квадрата Q со стороной 2^{-n} из этого разбиения получаем

$$\iint\limits_Q \frac{dxdy}{(\operatorname{dist}(z,\Gamma))^p} \leq \frac{2^{-2n}}{(2^{-n})^p}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{D^+} \frac{dxdy}{(\operatorname{dist}(z,\Gamma))^p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} w_n 2^{n(p-2)},$$

где w_n — число квадратов со стороной 2^{-n}, входящих в разбиение Уитни. Как известно (см. [9]), $w_n \leq 2^{nd}$ при достаточно больших n, где d — любое число, большее верхней метрической размерности. Поэтому последний интеграл оценивается сверху рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n(p-2+d)}$. Он сходится, если $p - 2 + d < 0$, т. е.

при $p < 2 - d$. Отсюда следует, что этот интеграл конечен, если $p < 2 - \overline{\mathrm{dm}}\Gamma$. Аналогично рассматривается интеграл по D^*. Итак, доказаны неравенства

$$\mathfrak{m}^+(\Gamma) \ge 2 - \overline{\mathrm{dm}}\Gamma, \quad \mathfrak{m}^-(\Gamma) \ge 2 - \overline{\mathrm{dm}}\Gamma.$$

Отметим, что в разбиения Уитни областей D^+, D^* могут войти и квадраты со стороной больше единицы. Но в силу свойств этого разбиения их число конечно и на сходимость возникающего ряда они не влияют.

Чтобы доказать оценку $1 \ge \mathfrak{m}^+(\Gamma)$, достаточно убедиться, что интеграл $\iint\limits_{D^+} \mathrm{dist}^{-1}(z,\Gamma)\, dxdy$ бесконечен. Для этого фиксируем горизонтальную прямую, пересекающую область D^+. Она содержит интервал $\lambda \subset D^+$ с концами $z_1 = x_1 + iy_0$ и $z_2 = x_2 + iy_0$ на кривой Γ, $x_1 < x_2$. Для $x_1 < x < x_2$ положим $\varphi(x) = \max\{y < y_0 : x + iy \in \Gamma\}$; эта функция полунепрерывна сверху и поэтому измерима. Обозначим $\Delta = \{x + iy \in D^+ : x_1 < x < x_2,\ \varphi(x) < y < y_0\}$. Тогда

$$\iint\limits_{D^+} \frac{dxdy}{\mathrm{dist}(z,\Gamma)} \ge \iint\limits_{\Delta} \frac{dxdy}{\mathrm{dist}(z,\Gamma)} \ge \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{y_0} \frac{dy}{y - \varphi(x)},$$

но последний интеграл равен ∞, что и завершает доказательство.

Неравенство $\mathfrak{m}^-(\Gamma) \ge 1$ доказывается аналогично.

Равенство единице показателей Марцинкевича спрямляемой кривой вытекает из того, что у такой кривой равна единице верхняя метрическая размерность (см., например, [1]).

Теорема доказана.

Конечно, из этой теоремы следует неравенство

$$1 \ge \mathfrak{m}(\Gamma) \ge 2 - \overline{\mathrm{dm}}\Gamma.$$

Построим примеры, показывающие, что

(а) показатель Марцинкевича неспрямляемой кривой может быть меньше единицы;

(б) существует неспрямляемая кривая Γ, показатель Марцинкевича которой (внутренний или внешний) строго больше $2 - \overline{\mathrm{dm}}\Gamma$;

(в) существует неспрямляемая кривая Γ, для которой $\mathfrak{m}^+(\Gamma) \ne \mathfrak{m}^-(\Gamma)$.

Кроме того, увидим, что показатели Марцинкевича могут быть точно вычислены для довольно непростой кривой.

Пример 1. Возьмем квадрат $Q = \{x, y : 0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 0\}$. Разобьем его сторону $\{0 \le x \le 1,\ y = 0\}$ на участки I_n от 2^{-n} до 2^{-n+1}, где n меняется от 1 до $+\infty$. Каждый из этих участков разобьем на $2^{[n\beta]}$ равных частей, где $[n\beta]$ — целая часть $n\beta$. Обозначим точки деления участка I_n через x_{nj}, j — номер в порядке убывания. Присоединим к квадрату Q прямоугольники $p_{nj} = \{x, y : x_{nj} - C_n \le x \le x_{nj},\ 0 \le y \le 2^{-n}\}$. Величину C_n определим равенством $C_n = \frac{1}{2} a_n^{\alpha}$, где a_n — расстояние между точками деления на отрезке I_n, т. е. $2^{-n-[n\beta]}$. Границу полученной области D^+ обозначим через Γ.

В [8, 9] доказано, что $\overline{\mathrm{dm}}\Gamma = \frac{2\beta}{\beta+1}$ при $\alpha = 1$. Точно так же вычисляется $\overline{\mathrm{dm}}\Gamma$ при $\alpha > 1$, и она тоже равна $\frac{2\beta}{\beta+1}$, т. е. не зависит от α. Интеграл $\iint\limits_{D^+} \frac{dxdy}{\mathrm{dist}^p(z,\Gamma)}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд из величин

$$2^{[n\beta]} \cdot 2^{-n} \cdot (C_n)^{1-p} \asymp 2^{n\beta - n - n(1+\beta)\alpha(1-p)},$$

т. е. ряд сходится при условии $\beta - 1 - (1+\beta)\alpha(1-p) < 0 \Leftrightarrow 1 - p > \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha} \Leftrightarrow p < 1 - \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha}$. Отсюда

$$\mathfrak{m}^+(\Gamma) = 1 - \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha}.$$

При $\alpha = 1$ получаем

$$\mathfrak{m}^+(\Gamma) = 1 - \frac{\beta-1}{\beta+1} = \frac{2}{\beta+1} = 2 - \frac{2\beta}{\beta+1} = 2 - \overline{\mathrm{dm}}\Gamma.$$

При $\alpha > 1$ имеем

$$2 - \mathfrak{m}^+(\Gamma) = 1 + \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha} < 1 + \frac{\beta-1}{\beta+1} = \frac{2\beta}{\beta+1} = \overline{\mathrm{dm}}\Gamma,$$

т. е. $\mathfrak{m}^+(\Gamma) > 2 - \overline{\mathrm{dm}}(\Gamma)$. Теперь найдем $\mathfrak{m}^-(\Gamma)$. Интеграл $\iint\limits_{D^*} \frac{dxdy}{\mathrm{dist}^p(z,\Gamma)}$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{[n\beta]} \cdot 2^{-n} \cdot b_n^{1-p},$$

где $b_n = a_n - c_n$. Отсюда $\mathfrak{m}^-(\Gamma) = \frac{2}{\beta+1}$ при любом α. Таким образом, при $\alpha > 1$

$$\mathfrak{m}^+(\Gamma) = 1 - \frac{\beta-1}{(\beta+1)\alpha} > 1 - \frac{\beta-1}{\beta+1} = \frac{2}{\beta+1} = \mathfrak{m}^-(\Gamma).$$

Пример 2. Если в предыдущем примере сделать столбцы «толстыми», а промежутки между ними «тонкими», то внешний и внутренний показатели Марцинкевича поменяются местами, т. е. $\mathfrak{m}^+(\Gamma) < \mathfrak{m}^-(\Gamma)$.

Пример 3. Пусть заданы k пар положительных чисел $\alpha_j \geq 1$, $\beta_j \geq 1$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Для каждой из них построим область D_j^+, как в примере 1, и положим $D = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \{D_j^+ + j - 1\}$ (имеются в виду параллельные переносы на $j-1$ единиц вдоль вещественной оси), $\Gamma = \partial D$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{m}^+(\Gamma)$ есть наименьшее из чисел $1 - \frac{\beta_j - 1}{(\beta_j+1)\alpha_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, а $\mathfrak{m}^-(\Gamma)$ — наименьшее из чисел $\frac{2}{\beta_j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

3. Задача о скачке и показатели Марцинкевича

Докажем условие разрешимости задачи о скачке (1) в терминах показателей Марцинкевича.

Теорема 2. *Пусть Γ — простая замкнутая (вообще говоря, неспрямляемая) кривая на комплексной плоскости и $f \in H_\nu(\Gamma)$. Если выполнено условие*

$$\nu > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}(\Gamma), \tag{3}$$

то задача о скачке (1) имеет решение.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\mathfrak{m}(\Gamma) = \mathfrak{m}^+(\Gamma)$. Согласно [13, гл. VI, § 2.2, теорема 3] существует непрерывная функция $u(z)$ на $\mathbb{C}$ класса $C^\infty(\mathbb{C}\setminus\Gamma)$ такая, что $u|_\Gamma = f$.

Если $f \epsilon H_\nu(\Gamma)$, то

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{C}{\mathrm{dist}^{1-\nu}(z,\Gamma)}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{C}{\mathrm{dist}^{1-\nu}(z,\Gamma)}$$

(см. [13]). Поэтому

$$\iint\limits_{D^+} \left|\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right|^p dxdy \le C \iint\limits_{D^+} \frac{dxdy}{(\mathrm{dist}(z,\Gamma))^{p(1-\nu)}}.$$

Если внутренний показатель Марцинкевича кривой Γ есть m, то последний интеграл сходится при $p(1-\nu) < m$, т. е. при $p < \frac{m}{1-\nu}$. Потребуем, чтобы

$$\frac{m}{1-\nu} > 2, \tag{4}$$

т. е. $\frac{\mathfrak{m}^+(\Gamma)}{2} > 1-\nu$ и $\nu > 1 - \frac{\mathfrak{m}^+(\Gamma)}{2}$. Тогда интегральный член выражения

$$\Phi(z) = \chi(z)u(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{D^+} \frac{\partial u}{\partial \bar\zeta} \frac{d\zeta d\bar\zeta}{\zeta - z}, \tag{5}$$

где $\chi(z)$ — характеристическая функция области D^+, непрерывен во всей плоскости при $\nu > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}^+(\Gamma)$, т. е.

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma,$$

и функция Φ — решение задачи о скачке.

Пусть $\mathfrak{m}(\Gamma) = \mathfrak{m}^-(\Gamma)$ и Γ полностью лежит в круге $K_1 = \{z : |z| < r_1\}$, $r > r_1$, $K = \{z : |z| < r\}$. Пусть $\omega(z)$ — функция класса C^∞, равная 1 в K_1 и нулю вне K. Положим $D^* = D^- \cap K$, $u^* = u\omega$. Тогда производная $\frac{\partial u^*}{\partial \bar z}$ интегрируема в D^* в степени $p > 2$ при условии $\nu > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}^-(\Gamma)$ и функция

$$\Phi^*(z) = -u^*(z)\chi^*(z) + \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_{D^*} \frac{\partial u^*}{\partial \bar\zeta} \frac{d\zeta d\bar\zeta}{\zeta - z}$$

будет решением той же задачи о скачке. Теорема доказана.

Итак, задача о скачке разрешима, если выполнено хотя бы одно из условий $\nu > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}^+(\Gamma)$, $\nu > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}^-(\Gamma)$. Из примеров, построенных в разд. 2, следует, что установленное в последней теореме условие разрешимости задачи о скачке менее ограничительно (вообще говоря), чем условие (2).

При условиях теоремы можно получить и некоторую дополнительную информацию о свойствах построенных в них решений задачи о скачке. Хорошо известно (см., например, [14]), что для компактного D интеграл $\iint\limits_D \frac{\phi(\zeta)d\zeta d\bar\zeta}{\zeta - z}$ представляет собою функцию гёльдеровского класса $H_{1-\frac{2}{p}}(\mathbb{C})$, если его плотность ϕ интегрируема в D в степени $p > 2$. В рассматриваемом случае p есть любое число, удовлетворяющее одному из неравенств

$$p(1-\nu) < \mathfrak{m}^+(\Gamma), \quad p(1-\nu) < \mathfrak{m}^-(\Gamma).$$

Поэтому решения задачи о скачке, построенные в последней теореме, удовлетворяют в замыканиях областей D^+ и D^- условию Гёльдера с любым показателем, не превосходящим $1 - \frac{2(1-\nu)}{\mathfrak{m}(\Gamma)}$. Кроме того, эти решения обращаются в нуль в бесконечно удаленной точке.

Обсудим единственность решения задачи о скачке. Пусть Φ_1 и Φ_2 — какие-то два ее решения в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ в замыканиях областей D^+ и D^-, $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$. Непосредственно из краевого условия (1) следует, что функция $\Psi(z)$ непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}$ и голоморфна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$. Кроме того, она удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ в окрестности кривой Γ. Как установил Е. П. Долженко [15], такая функция будет голоморфной в точках кривой Γ, если $\mu > \operatorname{dmh}\Gamma - 1$, где $\operatorname{dmh}\Gamma$ — размерность Хаусдорфа кривой Γ (см., например, [5]). Но тогда она голоморфна в замкнутой комплексной плоскости, т. е. постоянна. С учетом приведенных выше результатов получаем

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и*

$$\operatorname{dmh}\Gamma < \mu < 1 - \frac{2(1-\nu)}{\mathfrak{m}(\Gamma)}.$$

Тогда решение задачи о скачке (1) *в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ в замыканиях областей D^+ и D^-, единственно с точностью до аддитивной постоянной.*

Условия этого следствия подразумевают, что фигурирующее в нем неравенство выполнимо, т. е. его крайняя правая часть превосходит левую.

Если искать решение задачи о скачке среди функций, обращающихся в нуль в бесконечно удаленной точке, то при выполнении условий следствия 1 ее решение единственно.

4. Краевая задача Римана

Применим полученные результаты к решению краевой задачи Римана на неспрямляемой кривой, используя известные приемы решения этих задач на кусочно гладких контурах (см. [6, 7]).

Сначала рассмотрим однородную задачу

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in \Gamma, \tag{6}$$

в классе функций, исчезающих в бесконечности и удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ в областях $D^\pm$. Пусть $G \in H_\nu(\Gamma)$ не обращается в нуль. Пусть $\kappa = (2\pi)^{-1}[\arg G]_\Gamma$, где $[\arg G]_\Gamma$ — приращение $\arg G$ при однократном обходе Γ против часовой стрелки. Зафиксируем точку $z_0 \in D^+$. Ясно, что для функции $G_0(t) = (t - z_0)^{-\kappa}G(t)$ величина $[\arg G_0]_\Gamma$ равна 0, поэтому функцию $f(t) = \ln G_0(t)$ можем выбрать непрерывной. Тогда при условии (3) задача о скачке $\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = f(t)$, $t \in \Gamma$, будет иметь решение, построенное ранее. Это решение удовлетворяет в $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$ условию Гёльдера с показателем $\mu < 1 - \frac{2(1-\nu)}{\mathfrak{m}(\Gamma)}$.

Пусть $X(z) = e^{\Psi(z)}$ при $z \epsilon D^+$ и $X(z) = (z - z_0)^{-\kappa}e^{\Psi(z)}$ при $z \in D^-$. Ясно, что

$$\frac{X^+(t)}{X^-(t)} = (t - z_0)^{\kappa}e^{\Psi^+(t)-\Psi^-(t)} = G(t), \quad t \in \Gamma,$$

т. е. функция $X(z)$ удовлетворяет краевому условию (6). Кроме того, она удовлетворяет в $\overline{D^+}$ и в любой конечной части $\overline{D^-}$ условию Гёльдера с тем же показателем μ и не обращается в нуль в конечной части плоскости. В точке ∞ она ведет себя, как $z^{-\kappa}$. В [6, 7] эта функция называется *канонической*.

Пусть $\Phi(z)$ — любое решение задачи (6). Тогда для функции $P(z) = \frac{\Phi(z)}{X(z)}$ на Γ имеем

$$P^+(t) = \frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} = \frac{G(t)\Phi^-(z)}{G(t)X^-(z)} = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} = P^-(t).$$

Если $\Phi(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера с тем же показателем μ и $\mu > \operatorname{dmh}\Gamma - 1$, то в силу теоремы Долженко функция $P(z)$ голоморфна в точках Γ.

Итак, функция $P(z)$ голоморфна в конечной части плоскости и ведет себя, как z^{κ} в точке ∞. Поэтому $P(z)$ — алгебраический многочлен степени не выше κ при $\kappa \geq 0$ и $P(z) \equiv 0$ при $\kappa < 0$. Получили следующий результат.

Теорема 3. *Пусть в задаче (6) коэффициент $G(t)$ не обращается в нуль и удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\nu > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}(\Gamma)$, а μ удовлетворяет условию*

$$\operatorname{dmh}\Gamma - 1 < \mu < 1 - \frac{2(1-\nu)}{\mathfrak{m}(\Gamma)}. \tag{7}$$

Тогда при $\kappa < 0$ задача имеет в указанном выше классе только нулевое решение, а при $\kappa \geq 0$ любое решение имеет вид $P(z)X(z)$, где P — алгебраический многочлен степени не выше κ.

Перейдем к неоднородной задаче

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma. \tag{8}$$

На неспрямляемой кривой ее решение можно получить по формуле

$$\Phi_0(z) = \phi(z) - \frac{X(z)}{2\pi i} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial\phi}{\partial\bar{\zeta}} \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{X(\zeta)(\zeta - z)}, \tag{9}$$

в которой $\phi(z)$ либо $\phi_1(z) = u(z)\chi^+(z)$, где $u(z)$ — продолжение Уитни функции g с Γ на всю комплексную плоскость, а $\chi^+(z)$ — характеристическая функция области D^+, либо $\phi_2(z) = u(z)\chi^-(z)\omega_0(z)$, где $\chi^-(z) = \chi^+(z) - 1$, а ω_0 — гладкая (т. е. имеющая производные всех порядков) функция с компактным носителем, равная 1 на Γ. Повторяя предыдущие шаги, убеждаемся, что Φ_0 имеет скачок $\frac{g(t)}{X^+(t)}$ на Γ при условии (8). С использованием теоремы Долженко получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть в задаче (8) функции $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем ν, удовлетворяющим условию $\nu > 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{m}(\Gamma)$, и $G(t)$ не обращается в нуль. Если решение ищется в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ в $\overline{D^+}$ и $\overline{D^-}$, причем показатель μ удовлетворяет условию (7), то*

при $\kappa \geq 0$ общее решение имеет вид

$$\Phi_0 + PX,$$

где P — произвольный алгебраический многочлен степени не выше κ;

при $\kappa = -1$ функция Φ_0 есть единственное решение;

при $\kappa < -1$ задача имеет $-\kappa - 1$ условий разрешимости и ее единственное решение в этом случае есть Φ_0.

Мы не выписываем здесь условия разрешимости, которые легко получаются путем разложения интеграла из формулы (9) в степенной ряд в точке ∞.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tricot C.* Curves and fractal dimension. New York etc.: Springer-Verl., 1995.
2. *Falconer K. J.* Fractal geometry. Chichester, UK: Wiley & Sons, 2003.
3. *Käenmäki A., Lerhbäck J., Vuorinen M.* Dimension, Whitney covers, and tubular neighborhoods // Indiana Univ. Math. J. 2013. V. 62, N 6. P. 1861–1889.
4. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-Энтропия и емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. С. 3–86.
5. *Mattila P.* Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: Fractals and rectifiability. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. (Cambridge Stud. Adv. Math.; V. 44).
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1962.
8. *Кац Б. А.* Краевая задача Римана на неспрямляемой жордановой кривой // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 4. С. 789–792.
9. *Кац Б. А.* Задача Римана на замкнутой жордановой кривой // Изв. вузов. Математика. 1983. № 4. С. 68–80.
10. *Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Kats B. A.* Integration over non-rectifiable curves and Riemann boundary value problems // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 380, N 1. P. 177–187.
11. *Кац Б. А.* Метрические характеристики неспрямляемых дуг и задача о скачке // Уч. записки Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2008. Т. 150, кн. 1. С. 56–64.
12. *Kats B. A.* The refined metric dimension with applications // Comput. Methods Funct. Theory. 2007. N 1. P. 77–89.
13. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойств функций. М.: Мир, 1973.
14. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
15. *Долженко Е. П.* О «стирании» особенностей аналитических функций // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 4. С. 135–142.

Статья поступила 10 марта 2015 г.

Кац Давид Борисович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
katzdavid89@gmail.com