Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 517.9+514.7

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ–ГРАФИКИ НА 4–МЕРНЫХ 2–СТУПЕНЧАТЫХ СУБЛОРЕНЦЕВЫХ СТРУКТУРАХ

М. Б. Карманова

Аннотация. Получены описания классов максимальных поверхностей-графиков на четырехмерных двуступенчатых сублоренцевых структурах. В частности, условия максимальности выведены в терминах сублоренцевой средней кривизны.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.210

Ключевые слова: сублоренцева структура, максимальная поверхность, сублоренцева средняя кривизна.

Рассматриваются пространственноподобные поверхности-графики на четырехмерной сублоренцевой структуре глубины 2, описанные в [1, 2], и выводятся уравнения максимальных (относительно нескольких видов сублоренцевых мер) поверхностей в классе графиков функций φ, определенных на группах Гейзенберга. В частности, доказывается, что если поверхность имеет максимальную «боксовую» сублоренцеву меру, то ее сублоренцева средняя кривизна равна нулю (см. теорему 22):

$$H_{SL}(x) = X\left\langle \frac{X\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}} \right\rangle(x) + Y\left\langle \frac{Y\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}} \right\rangle(x) = 0.$$

Если поверхность имеет максимальную *горизонтальную* сублоренцеву меру, то ее горизонтальная сублоренцева средняя кривизна равна нулю (см. теорему 35):

$$X\left\langle X\varphi \frac{\sqrt{1-(Y\varphi)^2}}{\sqrt{1-(X\varphi)^2}} \right\rangle(x) + Y\left\langle Y\varphi \frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2}}{\sqrt{1-(Y\varphi)^2}} \right\rangle(x) = 0,$$

где X, Y — базисные горизонтальные векторные поля на группе Гейзенберга. Отметим также теоремы 18 и 34 о формулах площади, представляющие независимый интерес.

Сублоренцева геометрия является неголономным обобщением геометрии Минковского (см., например, [3]), новым и малоизученным направлением. Статья [4] — одна из первых работ, в которых исследовались подобные структуры. В [5–10] получены описание и свойства достижимых множеств на классах сублоренцевых структур, а также исследованы геодезические [11] и выведены

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

© 2016 Карманова М. Б.

некоторые глобальные свойства структур [12]. Кроме того, сублоренцевы структуры изучались на группах $\mathbb{H}$-типа, в частности, исследовались геодезические и их связь с описанием движения релятивистской частицы в постоянном равномерном электромагнитном поле [13, 14]. Применение сублоренцевых структур к задачам физики описано в [15, 16].

Напомним основные определения и описание структуры.

Пусть X, Y, T, Z — векторные поля на $\mathbb{R}^4$, причем коммутаторы поля Z со всеми остальными нулевые, а для полей X, Y и T справедливы следующие соотношения:

$$[X,Y] = c_{XYZ}Z, \quad [X,T] = c_{XTZ}Z, \quad [Y,T] = c_{YTZ}Z, \tag{1}$$

где c_{XYZ}, c_{XTZ} и c_{YTZ} — константы.

Введем сублоренцеву норму на $\mathbb{R}^4$ с данным набором полей по аналогии с [3] следующим образом.

Определение 1. Пусть $p \in \mathbb{R}^4$ и $V(p) = xX(p) + yY(p) + tT(p) + zZ(p)$. Положим

$$\big(\mathbf{d}_\infty^{SL}(V)\big)^2 = \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2.$$

Тогда *сублоренцева норма* вектора $V = V(p)$ равна

$$\mathbf{d}_\infty^{SL}(V) = \begin{cases} \sqrt{\max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2}, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 > 0, \\ 0, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 = 0, \\ i\sqrt{|\max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2|}, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 < 0. \end{cases}$$

Определение 2 (см. [3]). Если норма вектора положительна, то он называется *пространственноподобным*, если нулевая, то — *светоподобным*, а если мнимая, то — *времениподобным*.

Определение 3 (см. [3]). Поверхность называется *пространственноподобной*, если ее касательные векторы только пространственноподобные. Если в каждой точке поверхности среди ее касательных векторов есть времениподобные, то поверхность называется *времениподобной*.

В силу результатов из [17] константы из соотношения (1) определяют групповую структуру и, следовательно, групповую операцию на $\mathbb{R}^4$ с данным набором полей такую, что поля X, Y, Z, T левоинвариантны относительно нее.

Определение 4 [1]. Пусть $v = \exp(xX + yY + tT + zZ)(w)$. Положим *сублоренцево расстояние* d_∞^{SL} равным

$$d_\infty^{SL}(v,w) = \begin{cases} \sqrt{\max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2}, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 > 0, \\ 0, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 = 0, \\ i\sqrt{|\max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2|}, & \max\{x^2, y^2, |z|\} - t^2 < 0. \end{cases}$$

Определение 5 [1]. *Шар* относительно d_∞^{SL} радиуса $r > 0$ с центром в точке v — это множество

$$\mathrm{Box}^{SL}(v,r) = \big\{w \in {}^s\mathbb{L} : \big(d_\infty^{SL}(w,v)\big)^2 < r^2\big\}.$$

Определение 6. Полученную структуру ($\mathbb{R}^4$ с набором полей $\{X, Y, Z, T\}$, нормой $\mathbf{d}_\infty^{SL}$, расстоянием d_∞^{SL} и групповой операцией) обозначим символом ${}^s\mathbb{L}$.

Далее в статье будем рассматривать следующие отображения. Пусть $\mathbb{H}$ — интегральное многообразие подрасслоения $\operatorname{span}\{X, Y, Z\}$, проходящее через $\mathbf{0} = (0,0,0,0)$. Из (1) вытекает, что это — группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1$. Рассмотрим функцию $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, где $\Omega \subset \mathbb{H}^1$ — область в $\mathbb{H}^1$, являющуюся липшицевой относительно квазиметрики d_∞ на группе Гейзенберга $\mathbb{H} = \mathbb{H}^1$. Напомним, что для $w = \exp(xX+yY+zZ)(v)$ имеем $d_\infty(w, v) = \max\{|x|, |y|, |z|^{1/2}\}$. Известно [18, 19], что липшицевы функции hc-дифференцируемы почти всюду на области определения: для почти всех v существует горизонтальный гомоморфизм $\mathscr{L}_v$ такой, что

$$|\varphi(w) - \mathscr{L}_v\langle w\rangle| = o(d_\infty(v, w)),$$

где $o(1) \to 0$ при $w \to v$. Далее в статье hc-дифференциал (или горизонтальный градиент) $\mathscr{L}_v$ отображения φ в точке v обозначен символом $\widehat{D}\varphi(v)$.

Определим действие отображения-графика φ_Γ на $v \in \mathbb{H}$ как

$$v \mapsto \exp(\varphi(v)T)(v).$$

Опишем «дифференциальные» свойства графика φ_Γ. Сначала напомним

Определение 7 [20, 21]. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — однородная группа Ли, $E \subset \mathbb{G}$, $\psi : E \to \widetilde{\mathbb{G}}$, а функция $\mathfrak{d} : \psi(E) \times \widetilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{R}_+$ является квазиметрикой. Отображение ψ *полиномиально hc-дифференцируемо* в точке $x \in E$ относительно $\mathfrak{d}$, если существует отображение $\mathscr{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такое, что

1) $\mathfrak{d}(\psi(w), \mathscr{L}_x\langle w\rangle) = o(d_\infty(x, w))$, $E \ni w \to x$;

2) $\mathscr{L}_x(w) = \theta_{\psi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(w)$; L_x — оператор с полиномиальными по $\{w_j\}_{j=1}^N$ коэффициентами, где $w = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^N w_j X_j\right)(x)$, N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$.

Отображение $\mathscr{L}_x$ называется *полиномиальным hc-дифференциалом* отображения ψ в точке x и обозначается символом $\widehat{D}_P\psi(x)$.

Здесь θ_v — экспоненциальное отображение относительно точки v, действующее из окрестности нуля евклидова пространства в окрестность точки v однородной группы Ли:

$$(w_1, \dots, w_N) \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^N w_i X_i\right)(v).$$

Теорема 8 [20, 21] (см. также [1]). *Отображение-график φ_Γ липшицева в субримановом смысле отображения φ полиномиально hc-дифференцируемо почти всюду, а именно в точках hc-дифференцируемости φ. В качестве $\mathfrak{d}$ используется квазиметрика d_∞.*

Определение 9 [1]. Фиксируем $u \in \mathbb{H}$. Заданные в окрестности точки $\varphi_\Gamma(u)$ поля $\widetilde{X}^u = X + 2\varphi(u)F_{13}^4 Z$ и $\widetilde{Y}^u = Y + 2\varphi(u)F_{23}^4 Z$ образуют вместе с полями T и Z *адаптированное касательное расслоение на ${}^s\mathbb{L}$ в точке u.*

Замечание 10. Полиномиальный hc-дифференциал $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(u)$ отображения-графика φ_Γ в точке u, переводящий точку $\exp(v_1X + v_2Y + v_4Z)(u)$ в точку $\exp(\tilde{v}_1\widetilde{X}^u + \tilde{v}_2\widetilde{Y}^u + \tilde{v}_3T + \tilde{v}_4Z)(\varphi(u))$, в базисе $\{\widetilde{X}^u, \widetilde{Y}^u, T, Z\}$ имеет вид

$$\tilde{v}_1 = v_1, \quad \tilde{v}_2 = v_2, \quad \tilde{v}_3 = \widehat{D}\varphi(v)\langle v_1, v_2\rangle, \quad \tilde{v}_4 = v_4 + \widehat{D}\varphi(v)\langle v_1, v_2\rangle\big(F_{13}^4 v_1 + F_{23}^4 v_2\big).$$

В этом случае в качестве $\mathfrak{d}$ используется функция

$$\tilde{d}^u_\infty(q,p)=\max\{|q_1|,|q_2|,|q_3|,|q_4|^{1/2}\}\ \text{ для } q=\exp(q_1\widetilde{X}^u+q_2\widetilde{Y}^u+q_3T+q_4Z)(p).$$

Расширим понятие пространственноподобной поверхности для случая поверхностей-образов недифференцируемых в классическом смысле отображений, лежащих в ${}^s\mathbb{L}$.

Определение 11 (см. [3]). Пусть $v\in {}^s\mathbb{L}$. Множество $\{\exp(xX+yY+tT+zZ)(v):\max\{x^2,y^2,|z|\}-t^2=0\}$ называется *световым конусом* в точке v.

Определение 12 [1]. Поверхность $S\subset {}^s\mathbb{L}$ называется *пространственно-подобной*, если для любой ее точки $v\in S$ существует $r_0>0$ такое, что пересечение пересечение $S_v\cap B(v,r)$, где S_v — полиномиальное приближение S в точке v, за исключением точки v лежит строго вне светового конуса с центром в v для любого $r\le r_0$ (т. е. лежит в множестве $\{\exp(xX+yY+tT+zZ)(v):\max\{x^2,y^2,|z|\}-t^2>0\}$). Здесь B — шар в (суб)римановой (квази)метрике.

В [1] доказано, что если длина горизонтального градиента $\widehat{D}\varphi$ всюду не превосходит $1-c$, где $c>0$, то поверхность-график $\varphi_\Gamma(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{H}$, пространственноподобна (относительно адаптированного базиса). Это свойство играет ключевую роль в выводе аппроксимативных свойств поверхностей-графиков на сублоренцевых структурах и доказательстве формул площади для сублоренцевых мер.

Прежде чем изучать случай основной горизонтальной сублоренцевой ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$-меры, изучим характер следующей вспомогательной «боксовой» сублоренцевой меры, являющейся адаптацией лоренцева случая на субримановы структуры.

Определение 13 [19]. Пусть Ω — область в $\mathbb{H}$, а $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$. Отображение φ *принадлежит классу* C^1_H, если горизонтальные производные $X\varphi$ и $Y\varphi$ существуют всюду на Ω и непрерывны.

Известно [19], что отображения класса C^1_H непрерывно hc-дифференцируемы всюду.

Следствие 14. *Если φ принадлежит классу C^1_H, то отображение-график φ_Γ непрерывно полиномиально hc-дифференцируемо всюду.*

Определение 15 [2]. Пусть Ω — область в $\mathbb{H}$, а $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ — отображение класса C^1_H такое, что $1-(X\varphi(y))^2-(Y\varphi(y))^2\ge s>0$ для всех $y\in\Omega$. Определим *функцию множеств для* $S\subset\varphi_\Gamma(\Omega)$ следующим образом:

$$\left({}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}\right)_\delta(S)=8\inf\biggl\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{\sqrt{1-(X\varphi(y_j))^2-(Y\varphi(y_j))^2}}{\sqrt{1+(X\varphi(y_j))^2+(Y\varphi(y_j))^2}}r_j^4:$$
$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\mathrm{Box}(x_j,r_j)\supset S,\ x_j=\varphi_\Gamma(y_j),\ x_j\in S,\ r_j<\delta,\ j\in\mathbb{N}\biggr\}.$$

Положим ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}(S)=\lim\limits_{\delta\to0}\left({}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}\right)_\delta(S)$.

Замечание 16 [2]. Мы рассматриваем каждое слагаемое r_j^4 с множителем $\frac{\sqrt{1-(X\varphi(y_j))^2-(Y\varphi(y_j))^2}}{\sqrt{1+(X\varphi(y_j))^2+(Y\varphi(y_j))^2}}$, чтобы учесть сублоренцеву структуру меры в субримановых шарах.

Для корректного задания меры ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$ не требуется сужать область определения (в отличие от случаев, когда множество покрывается сублоренцевыми шарами, см. [1]), достаточно потребовать выполнение условия $1-(X\varphi(y))^2-(Y\varphi(y))^2\geq s>0$ для всех $y\in\Omega$.

Далее будем рассматривать такие отображения φ, длина горизонтального градиента $\widehat{D}\varphi$ которых строго отделена от единицы:

$$|\widehat{D}\varphi(v)\langle\exp(w_1X+w_2Y+w_4Z)(v)\rangle|=|w_1X\varphi+w_2Y\varphi| \\ \leq(1-c)\max\{|w_1|,|w_2|\},\quad c>0. \quad (2)$$

Заметим, что это условие обеспечивает корректное определение меры ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$ (достаточно рассмотреть $w_1=w_2$ и $w_1=-w_2$).

Свойство 17 [2]. *Функция $\Phi:\Omega\supset A\mapsto{}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}(\varphi_\Gamma(A))$ обладает следующими свойствами:*

1) *абсолютно непрерывна относительно меры $\mathscr{H}^3$ на $\mathbb{H}$,*

2) *аддитивна на отдаленных шарах.*

С помощью определения 15 и рассуждений из [21] (ср. [1]) нетрудно получить следующий результат (см. также обзор в [2]).

Теорема 18 [2]. *Пусть $\mathbb{H}=\mathbb{H}^1$ — группа Гейзенберга, $\varphi:\mathbb{H}\to\mathbb{R}$ — отображение класса C^1_H, причем*

$$|\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1,w_2\rangle|\leq(1-c)\max\{|w_1|,|w_2|\},\quad \mathrm{Lip}_{SR}(\varphi)\leq 1-c,\quad c>0.$$

Сублоренцева (боксовая) ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$-мера образа открытого множества $\varphi_\Gamma(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{H}$, вычисляется по формуле

$$\int\limits_{\Omega}\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi(v)|^2}\,d\mathscr{H}^4(v)=\int\limits_{\varphi_\Gamma(\Omega)}d\,{}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}(y). \quad (3)$$

Опишем поверхности-графики в ${}^s\mathbb{L}$, имеющие максимальную ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$-меру. Прежде всего напомним основные определения.

Определение 19 (см. [21]). Пусть $\varphi,\psi\in C^1_H(\mathscr{U},\mathbb{R})$, $\mathscr{U}\subset\mathbb{H}$. *Вариацией* φ называется функция $\varphi_{\varepsilon,\psi}=\varphi+\varepsilon\psi$, где $\varepsilon>0$ достаточно мало.

Отметим, что $\varphi_{\varepsilon,\psi}$ принадлежит классу $C^1_H(\mathscr{U},\mathbb{R})$ и $\widehat{D}\varphi_{\varepsilon,\psi}(x)=\widehat{D}\varphi(x)+\varepsilon\widehat{D}\psi(x)$ всюду.

Для функции $\psi\in C^1_H(\mathbb{H},\mathbb{R})$ введем величину (см. [21])

$$\|\psi\|_m=\biggl(\int\limits_{\Omega}(d_\infty(\mathbf{0},\psi(x))^m+|\widehat{D}\psi(x)|^m)\,d\mathscr{H}^4(x)\biggr)^{\frac{1}{m}},\quad m\in\mathbb{N}.$$

Определение 20 (см. [21]). Область $\Omega\subset\mathbb{H}$ называется *горизонтально достижимой*, если любую ее внутреннюю точку можно соединить с граничной точкой кривой, составленной из конечного числа интегральных линий горизонтальных векторных полей.

Если область Ω горизонтально достижима, то для произвольной функции $\psi\in C^1_H(\Omega,\mathbb{R})$ введем величину

$$\|\psi\|_{H,m}=\biggl(\int\limits_{\Omega}|\widehat{D}\psi(x)|^m\,d\mathscr{H}^4(x)\biggr)^{\frac{1}{m}},\quad m\in\mathbb{N}.$$

Свойство 21 (см. [21]). *Величина $\|\cdot\|_m$ является нормой, кроме того, нормой является и $\|\cdot\|_{H,m}$, если Ω горизонтально достижима. Неотрицательность, симметричность и неравенство треугольника следуют непосредственно из определения. Также из определения следует, что если $\|\psi\|_m = 0$, то $\psi = 0$ почти всюду.*

Аналогичное утверждение справедливо и для $\|\cdot\|_{H,m}$ в силу свойств области Ω.

Далее рассмотрим область с гладкой границей $\Omega \subset \mathbb{H}$. Пусть $\varphi \in C^1_H(\mathscr{U}, \mathbb{R})$, $\mathscr{U} \supset \Omega$, и $\gamma = \varphi_\Gamma(\partial\Omega)$.

Теорема 22. (I) *Для того чтобы поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ имела максимальную ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$-меру в классе всех поверхностей $\chi_\Gamma(\Omega)$ таких, что $\chi_\Gamma|_{\partial\Omega} = \gamma$, где $\chi = \varphi + \varepsilon\psi$, $\psi \in C^1_H(\mathscr{V}, \mathbb{R})$, $\mathscr{V} \subset \mathbb{H}$, $\mathscr{V} \supset \Omega$, причем*

$$|\widehat{D}\chi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \leq (1-c)\max\{|w_1|, |w_2|\} \text{ для всех } v, \quad \mathrm{Lip}_{SR}(\chi) \leq 1-c, \quad c > 0,$$

необходимо, чтобы

$$\int\limits_\Omega \frac{\langle \widehat{D}\varphi(x), \widehat{D}\psi(x)\rangle}{\sqrt{1 - |\widehat{D}\varphi(x)|^2}}\, d\mathscr{H}^4(x) = 0 \tag{4}$$

для любого отображения $\psi \in C^1_H(\mathscr{T}, \mathbb{R})$, $\mathscr{T} \subset \mathbb{H}$, $\mathscr{T} \supset \Omega$, такого, что $\psi|_{\partial\Omega} = 0$.

(II) *Пусть $\max\{|X\varphi|, |Y\varphi|\} \leq \frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{2}}$, $c > 0$, всюду на $\mathscr{V}$. Если существует константа $K > 0$ такая, что*

$$\int\limits_\Omega |\widehat{D}\psi(x)|^2\, d\mathscr{H}^4(x) \geq K\|\psi\|_4^2, \tag{5}$$

и выполнено соотношение (4), *то на отображении φ функционал площади достигает максимального в классе отображений вида $\varphi + \varepsilon\psi$, где для ψ справедливо* (5), *значения в его окрестности.*

(III) *Пусть Ω — область с гладкой границей, а отображение φ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции. Тогда для того чтобы поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ имела максимальную ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$-меру в классе всех поверхностей $\chi_\Gamma(\Omega)$ таких, что $\chi_\Gamma|_{\partial\Omega} = \gamma$, где $\chi = \varphi + \varepsilon\psi$, $\psi \in C^1_H(\mathscr{V}, \mathbb{R})$, $\mathscr{V} \subset \mathbb{H}$, $\mathscr{V} \supset \Omega$, и всюду верно*

$$|\widehat{D}\chi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \leq (1-c)\max\{|w_1|, |w_2|\}, \quad \mathrm{Lip}_{SR}(\chi) \leq 1-c, \quad c > 0,$$

необходимо, чтобы почти всюду выполнялось соотношение

$$X\Big\langle \frac{X\varphi}{\sqrt{1 - |\widehat{D}\varphi|^2}} \Big\rangle(x) + Y\Big\langle \frac{Y\varphi}{\sqrt{1 - |\widehat{D}\varphi|^2}} \Big\rangle(x) = 0. \tag{6}$$

(IV) *Пусть область Ω горизонтально достижима и $\max\{|X\varphi|, |Y\varphi|\} \leq \frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{2}}$, $c > 0$, всюду. Тогда необходимое условие экстремума* (4) *достаточно для отображений вида $\varphi + \varepsilon\psi$, где $\|\psi\|_{H,2} \geq L\|\psi\|_{H,4}$, $L > 0$. В частности, в условиях п.* (III) *условие* (6) *достаточно.*

Доказательство. Схема доказательства аналогична приведенной в [21].

(I) Для вывода необходимого условия достаточно рассмотреть вариацию $\varphi_{\varepsilon,\psi}$ и ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$-меру соответствующей поверхности как функцию параметра ε. Разлагая в ряд Тейлора функцию $f(\varepsilon) = \sqrt{1 - (x_1 + \varepsilon z_1)^2 - (x_2 + \varepsilon z_2)^2}$ вблизи точки 0, непосредственно можно проверить, что функционал площади дифференцируем для любого φ относительно норм $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_{H,2}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&|f(\varepsilon)-f(0)-f'(0)\varepsilon| \le \frac{\varepsilon^2}{2}|f''(\tilde\varepsilon)| \\
&\le \frac{\varepsilon^2}{2}\left|\frac{-(z_1^2+z_2^2)(1-(x_1+\tilde\varepsilon z_1)^2-(x_2+\tilde\varepsilon z_2)^2)-(x_1z_1+\tilde\varepsilon z_1^2+x_2z_2+\tilde\varepsilon z_2^2)^2}{(1-(x_1+\tilde\varepsilon z_1)^2-(x_2+\varepsilon z_2)^2)^{\frac32}}\right| \\
&\quad\le \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{|z_1^2+z_2^2||1-(x_1+\tilde\varepsilon z_1)^2-(x_2+\tilde\varepsilon z_2)^2|+|x_1z_1+\tilde\varepsilon z_1^2+x_2z_2+\tilde\varepsilon z_2^2|^2}{(1-(x_1+\tilde\varepsilon z_1)^2-(x_2+\tilde\varepsilon z_2)^2)^{\frac32}} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \le \varepsilon^2|z_1^2+z_2^2|\cdot K,
\end{aligned}
$$

где $\tilde\varepsilon\in(0,\varepsilon)$, так как знаменатель строго отделен от нуля. Кроме того, поскольку мера множества Ω конечна, в силу неравенства Гёльдера функционал площади дифференцируем и относительно норм $\|\cdot\|_3$, $\|\cdot\|_4$ (а также $\|\cdot\|_{H,3}$, $\|\cdot\|_{H,4}$). Поэтому равенство нулю первой вариации, или соотношение (4), является необходимым условием экстремума функционала площади.

(II) Это утверждение — переформулировка следующего условия сильной положительности второй вариации функционала площади: *если у дважды дифференцируемого функционала F, определенного на нормированном пространстве, первая вариация в точке ζ^* равна нулю, а вторая вариация в этой точке сильно положительна, т. е. существует $K>0$ такое, что $|\delta^2F(\zeta^*,\delta\zeta)|\ge K\|\delta\zeta\|^2$, то в точке ζ^* функционал F имеет минимум.* Непосредственно с помощью разложения в ряд Тейлора функции $f(\varepsilon)=\sqrt{1+\sum\limits_{j=1}^n(x_j+\varepsilon z_j)^2}$ вблизи точки 0 проверяется, что функционал площади дважды дифференцируем для любого φ относительно нормы $\|\cdot\|_4$ (и $\|\cdot\|_{H,4}$). Действительно,

$$
\begin{aligned}
&\left|f(\varepsilon)-f(0)-f'(0)\varepsilon-\frac{f''(0)}{2}\varepsilon^2\right| \le \frac{\varepsilon^3}{6}|f'''(\tilde\varepsilon)| \\
&= \frac{\varepsilon^3}{6}\bigl(-(z_1^2+z_2^2)(1-(x_1+\tilde\varepsilon z_1)^2-(x_2+\tilde\varepsilon z_2)^2)-(x_1z_1+\tilde\varepsilon z_1^2+x_2z_2+\tilde\varepsilon z_2^2)^2\bigr) \\
&\qquad\quad \times 3(x_1z_1+\tilde\varepsilon z_1^2+x_2z_2+\tilde\varepsilon z_2^2)(1-(x_1+\tilde\varepsilon z_1)^2-(x_2+\tilde\varepsilon z_2)^2)^{-\frac52} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \le \varepsilon^4K_1|z_1^2+z_2^2|^2+\varepsilon^3K_2(|z_1|+|z_2|)|z_1^2+z_2^2|, \qquad (7)
\end{aligned}
$$

где $\tilde\varepsilon\in(0,\varepsilon)$. Вторая вариация равна

$$
\delta^2S(\varphi,\varepsilon\psi)=\int\limits_\Omega \frac{-|\widehat D\varepsilon\psi(x)|^2+\varepsilon^2(X_1\varphi(x)X_2\psi(x)-X_1\psi(x)X_2\varphi(x))^2}{(1-|\widehat D\varphi(x)|^2)^{\frac32}}\,d\mathscr{H}^4(x),
$$

где

$$
S=S(\varphi)=\int\limits_\Omega\sqrt{1-|\widehat D\varphi(v)|^2}\,d\mathscr{H}^4(v)
$$

— функционал площади поверхности. В силу предположения на длину горизонтального градиента имеем $\max\{|X\varphi|,|Y\varphi|\}\le\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt2}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&(X\varphi(x)Y\psi(x)-X\psi(x)Y\varphi(x))^2\le 2((X\varphi(x)Y\psi(x))^2+(X\psi(x)Y\varphi(x))^2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times(1-c)((Y\psi(x))^2+(X\psi(x))^2)=(1-c)|\widehat D\psi(x)|^2.
\end{aligned}
$$

Следовательно, величина $\delta^2 S(\varphi,\varepsilon\psi)$ отрицательна, и

$$\delta^2 S(\varphi,\varepsilon\psi) \le \int\limits_{\Omega} \frac{-c|\widehat{D}\varepsilon\psi(x)|^2}{(1-|\widehat{D}\varphi(x)|^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\mathscr{H}^4(x).$$

Функционал площади S имеет максимум тогда и только тогда, когда $-S$ имеет минимум. Тогда условие сильной положительности второй вариации функционала $-S$ переписывается как

$$\delta^2(-S(\varphi,\varepsilon\psi)) = -\delta^2 S(\varphi,\varepsilon\psi) \ge \int\limits_{\Omega} \frac{c|\widehat{D}\varepsilon\psi(x)|^2}{(1-|\widehat{D}\varphi(x)|^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\mathscr{H}^4(x) \ge L\|\varepsilon\psi\|_4^2,$$

или

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|\widehat{D}\varepsilon\psi(x)|^2}{(1-|\widehat{D}\varphi(x)|^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\mathscr{H}^4(x) \ge K\|\varepsilon\psi\|_4^2.$$

Отметим, что здесь рассматриваются норма $\|\cdot\|_4$ (и $\|\cdot\|_{H,4}$) ввиду наличия слагаемого $\varepsilon^4 K_1\big|z_1^2+z_2^2\big|^2$ в соотношении для дифференцируемости (7). Для слагаемого $\varepsilon^3 K_2(|z_1|+|z_2|)\big|z_1^2+z_2^2\big|$ остается применить неравенство Гёльдера.

Кроме того, для сильной положительности второй вариации функционала $-S$ достаточно условия

$$\int\limits_{\Omega} |\widehat{D}\varepsilon\psi(x)|^2\, d\mathscr{H}^4(x) \ge K\|\varepsilon\psi\|_4^2.$$

(III) Учитывая, что $\psi|_{\partial\Omega}=0$, получаем из результатов п. (I), что

$$0 = \int\limits_{\Omega} \frac{\langle \widehat{D}\varphi(x), \widehat{D}\psi(x)\rangle}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi(x)|^2}}\, d\mathscr{H}^4(x) = \int\limits_{\Omega} \psi(x)\cdot X\Big\langle \frac{X\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x)\, d\mathscr{H}^{\nu}(x) + \int\limits_{\Omega} \psi(x)\cdot Y\Big\langle \frac{Y\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x)\, d\mathscr{H}^{\nu}(x).$$

Отсюда следует, что, в частности, это справедливо и для всех гладких функций ψ, поэтому

$$X\Big\langle \frac{X\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x) + Y\Big\langle \frac{Y\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x) = 0$$

почти всюду.

(IV) Для отображений, изучаемых в п. (IV), достаточно рассматривать норму $\|\cdot\|_H$. Очевидно, что

$$\int\limits_{\Omega} |\widehat{D}\psi(x)|^2\, d\mathscr{H}^4(x) = \Bigg(\sqrt{\int\limits_{\Omega} |\widehat{D}\psi(x)|^2\, d\mathscr{H}^4(x)}\Bigg)^2 = \|\psi\|_{H,2}^2 \ge L^2\|\psi\|_{H,4}^2.$$

Поэтому условие (4), а, в предположениях п. (III), условие (6), является достаточным. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что полученное условие

$$X\Big\langle \frac{X\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x) + Y\Big\langle \frac{Y\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\Big\rangle(x) = 0$$

аналогично и выведенному в [3] для геометрии Минковского, и установленному в [20, 21] для графиков минимальной площади, а также выражению, полученному в [22] и прочих работах для других классов минимальных поверхностей. Поэтому доказанная теорема позволяет ввести

Определение 23. Пусть Ω — область с гладкой границей, а отображение φ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции. *Сублоренцевой средней кривизной* поверхности-графика $\varphi_\Gamma(\Omega)$ в точке x называется

$$H_{SL}(\varphi,x) = X\left\langle \frac{X\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi(x)|^2}}\right\rangle(x) + Y\left\langle \frac{Y\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi(x)|^2}}\right\rangle(x).$$

Из результатов работы выводим

Предложение 24. *Пусть Ω — горизонтально достижимая область с гладкой границей, а отображение φ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции и, кроме того, $\max\{|X\varphi|,|Y\varphi|\} \leq \frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{2}}$, $c>0$, всюду. Тогда максимальные (в классе поверхностей, определяемых отображениями вида $\varphi+\varepsilon\psi$, где для ψ выполнено условие $\|\psi\|_{H,2} \geq L\|\psi\|_{H,4}$, $L>0$) поверхности — это поверхности нулевой сублоренцевой средней кривизны почти всюду.*

Пример 25. Рассмотрим группу Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ с полями X, Y, Z (без ограничения общности будем считать, что $\mathbb{H}^1$ как множество точек совпадает с $\mathbb{R}^3$, а единица группы — с точкой $(0,0,0)$) и достроим к ее структуре (в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$) еще одно горизонтальное векторное поле T, линейно независимое с X, Y, Z (например, как в [21]). Полученную группу обозначим символом $\widetilde{\mathbb{H}}^1$.

Пусть ℓ — интегральная линия поля T, начинающаяся в единице группы. Построим отображение $\varphi:\Omega\to\widetilde{\mathbb{H}}^1$, где $\Omega\subset\mathbb{H}^1$ таково, что выполняется $|y|<1$ для любой точки $(x,y,z)\in\Omega$, со значениями на ℓ следующим образом:

$$\varphi(x,y,z) = \exp\left(\left(z-\frac{xy}{2}\right)T\right)(\mathbf{0})$$

(здесь (x,y,t) — декартовы координаты точки). Предположим, что на группе Гейзенберга поля имеют вид

$$X = \partial_x - \frac{y}{8}\partial_z, \quad Y = \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z, \quad Z = \partial_z.$$

Тогда $X\varphi = -\frac{5}{8}y$, $Y\varphi = 0$ и $1-|\widehat{D}\varphi|^2 = 1-\frac{25}{64}y^2$. Заметим, что на Ω выполняется $|X\varphi|^2 \leq \frac{1-7/32}{2}$. Отсюда следует, что сублоренцева средняя кривизна H_{SL} графика

$$\varphi_\Gamma(x,y,z) = \exp\left(\left(z-\frac{xy}{2}\right)T\right)(x,y,z)$$

равна нулю для всех точек $\mathbb{H}^1$:

$$H_{SL}(\varphi,v) = X\left\langle \frac{X\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\right\rangle(v) + Y\left\langle \frac{Y\varphi}{\sqrt{1-|\widehat{D}\varphi|^2}}\right\rangle(v)$$
$$= \left(\partial_x - \frac{y}{2}\partial_z\right)\left\langle \frac{-y}{\sqrt{1-\frac{25}{64}y^2}}\right\rangle = 0$$

при всех $v = (x, y, z) \in \mathbb{H}^1$. Кроме того, так как $|X\varphi| \leq \frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{2}}$, $c > 0$, для отображений вида $\varphi + \varepsilon\psi$, где $\|\psi\|_{H,2} \geq L\|\psi\|_{H,4}$, полученное условие на сублоренцеву среднюю кривизну является достаточным условием максимальности ${}^{SL}\mathscr{H}^4_{\mathrm{Box}}$-меры на поверхности $\varphi_\Gamma(\Omega)$.

Перейдем к основному результату статьи — формуле для вычисления горизонтальной сублоренцевой меры ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$. Введем необходимые определения.

Определение 26 (см. [1]). Пусть $v, w \in {}^s\mathbb{L}$ таковы, что $w = \exp(x\widetilde{X}^v + y\widetilde{Y}^v + tT + zZ)(\varphi_\Gamma(v))$. Положим

$$\tilde{d}^{SLH}_\infty(\varphi_\Gamma(v), w) = \begin{cases} \max\{\sqrt{\max\{x^2, y^2\} - t^2}, \sqrt{|z|}\}, & \max\{x^2, y^2\} - t^2 \geq 0 \text{ или } |z| \neq 0, \\ i\sqrt{|\max\{x^2, y^2\} - t^2|}, & \max\{x^2, y^2\} - t^2 < 0 \text{ и } |z| = 0. \end{cases}$$

Шар в $\tilde{d}^{SLH}_\infty$ — это множество

$$\mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r) = \{w \in {}^s\mathbb{L} : (\tilde{d}^{SLH}_\infty)^2(\varphi_\Gamma(v), w) < r^2\},$$

где $(\tilde{d}^{SLH}_\infty)^2 = \max\{\max\{x^2, y^2\} - t^2, |z|\}$.

Предложение 27. *Если горизонтальный градиент φ не превосходит $1 - c$ для некоторого $c > 0$, то существует $0 < L < \infty$ такое, что локально справедливо неравенство*

$$\frac{1}{L} d_\infty(v, w) \leq \tilde{d}^{SLH}_\infty(\varphi_\Gamma(v), \varphi_\Gamma(w)) \leq L d_\infty(v, w).$$

Замечание 28. Прообраз шара $\mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r)$ при отображении

$$(x, y, t, z) \mapsto \exp(x\widetilde{X}^v + y\widetilde{Y}^v + tT + zZ)(\varphi_\Gamma(v))$$

равен декартову произведению множества $\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : |\max\{x^2, y^2\} - t^2| < r^2\}$ и интервала $(-r^2, r^2)$.

Определение 29 [1]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{H}$ — открытое множество и $\varphi \in C^1_H(\Omega, \mathbb{R})$. Пусть $\mathrm{Lip}(\varphi) \leq 1 - c$, $c > 0$. Фиксируем $\delta_0 > 0$ и рассмотрим точку $p \in \Omega$ и ее окрестность $\mathscr{U} \subset \Omega$, на которой величина $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости не превосходит такого $\varepsilon > 0$, что $\partial\,\mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r) \cap \varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ лежит в σr-окрестности множества $\partial\,\mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(\varphi_\Gamma(v), r) \cap \widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle$ для некоторого малого $\sigma > 0$ и всех $v \in \mathscr{U}$ и $r < \delta_0$. Пусть $S \subset \varphi_\Gamma(\mathscr{U})$ и $\delta \in (0, \delta_0)$. Положим

$$({}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma)_\delta(S) = 8 \inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^4 : \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(x_j, r_j) \supset S,\ x_j \in S,\ r_j < \delta,\ j \in \mathbb{N}\Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества S и ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma(S) = \lim\limits_{\delta\to 0} ({}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma)_\delta(S)$.

Определение 30 [1]. Для каждой точки $x \in \varphi_\Gamma(\Omega)$ рассмотрим окрестность $\mathscr{U}(\varphi_\Gamma^{-1}(x)) \subset \Omega$, на которой для величины $o(1)$ из определения hc-дифференцируемости выполнены условия определения 29. Рассмотрим такое $\delta > 0$, чтобы любой шар в $\mathbb{H}$ радиуса $r < L\delta$ полностью лежал хотя бы в одной такой окрестности, где L — константа из неравенства

$$\frac{1}{L} d_\infty(v, w) \leq \tilde{d}^{SLH}_\infty(\varphi_\Gamma(v), \varphi_\Gamma(w)) \leq L d_\infty(v, w).$$

Так как можно без ограничения общности рассматривать компактные подмножества Ω, величина δ строго отделена от нуля. Определим функцию множества на $\varphi_\Gamma(\Omega)$ следующим образом:

$$\left({}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma\right)_\delta(S) = 8\inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} r_j^4 : \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(x_j,r_j)\cap\varphi_\Gamma\big(\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x_j)\right)\big)\supset S,\ x_j\in S,\ r_j<\delta,\ j\in\mathbb{N}\Big\},$$

где в силу выбора $\delta>0$ окрестность $\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x_j)\right)$ содержит $\varphi_\Gamma^{-1}\big(\mathrm{Box}^{SLH}_\Gamma(x_j,r_j)\big)$. Далее определение ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$ на $\varphi_\Gamma(\Omega)$ повторяет определение 29.

Заметим, что в силу свойств выбираемых окрестностей $\mathscr{U}\left(\varphi_\Gamma^{-1}(x_j)\right)$, $j\in\mathbb{N}$, а именно аппроксимируемости образа отображения-графика образом его полиномиального дифференциала, определение ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$-меры на $\varphi_\Gamma(\Omega)$ не зависит от способа выбора окрестностей.

Свойство 31 [2]. *Мера* ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$ *на* $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$, *где* $\mathscr{U}$ *— достаточно малая окрестность, совпадает с мерой*

$$8\lim_{\delta\to0}\inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2(y_j)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(y_j)}}{\sqrt{1+(X\varphi(y_j))^2+(Y\varphi(y_j))^2}}r_j^4 : \bigcup_{j\in\mathbb{N}}\mathrm{Box}(x_j,r_j)\supset S,\ x_j=\varphi_\Gamma(y_j),\ x_j\in S,\ r_j<\delta,\ j\in\mathbb{N}\Big\}.$$

Действительно, достаточно рассмотреть производные обеих мер по $\mathscr{H}^3$ в произвольной точке $v\in\mathscr{U}$ на образе полиномиального hc-дифференциала $\widehat{D}_P\varphi_\Gamma(v)\langle\mathscr{U}\rangle$, а затем применить рассуждения для получения выражения из [1], где показано асимптотическое равенство сублоренцевых мер на образе полиномиального hc-дифференциала и на $\varphi_\Gamma(\mathscr{U})$.

Определение 32. *Световым конусом* называется множество

$$\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^4 y_jX_j\right)(v) : \max\left\{y_1^2,y_2^2\right\}-y_3^2=0\right\}.$$

Подчеркнем, что в этом случае на четвертую координату (как на соответствующую подрасслоению без направлений с отрицательным квадратом длины) нет никаких ограничений.

Определение 33. Поверхность S *пространственноподобна*, если для любой ее точки $v\in S$ существует $r_0>0$ такое, что пересечение $S_v\cap B(v,r)\cap\exp(H_1{}^s\mathbb{L})(v)$, где S_v — полиномиальное приближение S в точке v, за исключением точки v лежит строго вне светового конуса с центром в v для любого $r\le r_0$, т. е. является подмножеством

$$\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^3 y_jX_j\right)(v) : \max\left\{y_1^2,y_2^2\right\}-y_3^2>0\right\},$$

где

$$\exp(H_1{}^s\mathbb{L})(v)=\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^3 y_jX_j\right)(v) : (y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3\right\}.$$

Заметим, что в определении 33 также нет ограничений на четвертую координату (как на соответствующую подрасслоению без направлений с отрицательным квадратом длины). Ограничения вводятся только на горизонтальные направления, так как только по одному из них квадрат длины отрицателен.

Теорема 34 [1]. *Пусть $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ — отображение класса C^1_H, причем всюду верно*

$$|\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \le (1-c)\max\{|w_1|, |w_2|\}, \quad \mathrm{Lip}_{SR}(\varphi) \le 1-c, \quad c > 0.$$

Тогда поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{H}$, пространственноподобна в смысле определения 33 (относительно адаптированного базиса) и его горизонтальная сублоренцева ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$-мера вычисляется по формуле

$$\int\limits_\Omega \sqrt{1-(X\varphi)^2(v)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(v)}\, d\mathscr{H}^4(v) = \int\limits_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d\ {}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma(y).$$

Далее рассмотрим область с гладкой границей $\Omega \subset \mathbb{H}$. Пусть $\varphi \in C^1_H(\mathscr{W}, \mathbb{R})$, $\mathscr{W} \supset \Omega$, и $\gamma = \varphi_\Gamma(\partial\Omega)$. Применяя рассуждения, аналогичные представленным в доказательстве теоремы 22, получаем следующий результат.

Теорема 35. (I) *Для того чтобы поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ имела максимальную ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$-меру в классе всех поверхностей $\chi_\Gamma(\Omega)$ таких, что $\chi_\Gamma|_{\partial\Omega} = \gamma$, где $\chi = \varphi + \varepsilon\psi$, $\psi \in C^1_H(\mathscr{V}, \mathbb{R})$, $\mathscr{V} \subset \mathbb{H}$, $\mathscr{V} \supset \Omega$, причем всюду выполняется*

$$|\widehat{D}\chi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \le (1-c)\max\{|w_1|, |w_2|\}, \quad \mathrm{Lip}_{SR}(\chi) \le 1-c, \quad c > 0,$$

необходимо, чтобы

$$\int\limits_\Omega \frac{X\varphi(x)X\psi(x)(1-(Y\varphi)^2(x)) + Y\varphi(x)Y\psi(x)(1-(X\varphi)^2(x))}{\sqrt{1-(X\varphi)^2(x)}\sqrt{1-(Y\varphi)^2(x)}}\, d\mathscr{H}^4(x) = 0 \tag{8}$$

для любого отображения $\psi \in C^1_H(\mathscr{T}, \mathbb{R})$, $\mathscr{T} \subset \mathbb{H}$, $\mathscr{T} \supset \Omega$, такого, что $\psi|_{\partial\Omega} = 0$.

(II) *Если существует константа $K > 0$ такая, что*

$$\int\limits_\Omega |\widehat{D}\psi(x)|^2\, d\mathscr{H}^4(x) \ge K\|\psi\|_6^2, \tag{9}$$

и выполнено соотношение (8), то на отображении φ функционал площади $\varphi \mapsto {}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma(\varphi_\Gamma(\Omega))$ достигает максимального в классе отображений вида $\varphi + \varepsilon\psi$, где для ψ справедливо (9), значения в его окрестности.

(III) *Пусть Ω — область с гладкой границей, а отображение φ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции. Тогда для того, чтобы поверхность $\varphi_\Gamma(\Omega)$ имела максимальную ${}^{SLH}\mathscr{H}^4_\Gamma$-меру в классе всех поверхностей $\chi_\Gamma(\Omega)$ таких, что $\chi_\Gamma|_{\partial\Omega} = \gamma$, где $\chi = \varphi + \varepsilon\psi$, $\psi \in C^1_H(\mathscr{V}, \mathbb{R})$, $\mathscr{V} \subset \mathbb{H}$, $\mathscr{V} \supset \Omega$, $\|\chi - \varphi\| \le \kappa$, $\kappa > 0$, причем всюду*

$$|\widehat{D}\chi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \le (1-c)\max\{|w_1|, |w_2|\}, \quad \mathrm{Lip}_{SR}(\chi) \le 1-c, \quad c > 0,$$

необходимо, чтобы

$$X\left\langle X\varphi\frac{\sqrt{1-(Y\varphi)^2}}{\sqrt{1-(X\varphi)^2}}\right\rangle(x) + Y\left\langle Y\varphi\frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2}}{\sqrt{1-(Y\varphi)^2}}\right\rangle(x) = 0. \tag{10}$$

(IV) *Пусть область* Ω *горизонтально достижима. Тогда необходимое условие экстремума* (8) *достаточно для отображений вида* $\varphi + \varepsilon\psi$, *где* $\|\psi\|_{H,2} \geq L\|\psi\|_{H,6}$, $L > 0$. *В частности, в условиях п.* (III) *условие* (10) *достаточно.*

Подчеркнем, что в п. (II) рассматривается норма $\|\cdot\|_6$ (вместо $\|\cdot\|_4$), так как функционал площади дважды дифференцируем относительно $\|\cdot\|_6$ (что нетрудно проверить с помощью непосредственных вычислений и оценки максимальной степени слагаемых $\varepsilon X\psi$ и $\varepsilon Y\psi$).

По аналогии с определением 23 введем понятие горизонтальной сублоренцевой средней кривизны.

Определение 36. Пусть Ω — область с гладкой границей, а отображение φ таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции. *Горизонтальной сублоренцевой средней кривизной* поверхности-графика $\varphi_\Gamma(\Omega)$ в точке x называется

$$H_{SLH}(\varphi, x) = X\left\langle X\varphi\frac{\sqrt{1-(Y\varphi)^2}}{\sqrt{1-(X\varphi)^2}}\right\rangle(x) + Y\left\langle Y\varphi\frac{\sqrt{1-(X\varphi)^2}}{\sqrt{1-(Y\varphi)^2}}\right\rangle(x).$$

Отображение, описанное в примере 25, также является примером поверхности нулевой горизонтальной сублоренцевой средней кривизны.

Предложение 37. *Пусть* Ω *— горизонтально достижимая область с гладкой границей, а отображение* φ *таково, что его вторые горизонтальные производные — измеримые функции, и, кроме того, всюду* $|\widehat{D}\varphi(v)\langle w_1, w_2\rangle| \leq (1 - c)\max\{|w_1|, |w_2|\}$, $\mathrm{Lip}_{SR}(\varphi) \leq 1 - c$, $c > 0$. *Тогда максимальные* (*в классе поверхностей, определяемых отображениями вида* $\varphi + \varepsilon\psi$, *где для* ψ *выполнено условие* $\|\psi\|_{H,2} \geq L\|\psi\|_{H,6}$, $L > 0$) *поверхности — это поверхности нулевой горизонтальной сублоренцевой средней кривизны почти всюду.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карманова М. Б.* Формула площади графиков на 4-мерных 2-ступенчатых сублоренцевых структурах // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 1068–1091.
2. *Карманова М. Б.* Площадь графиков на четырехмерных двуступенчатых сублоренцевых структурах // Докл. АН. 2015. Т. 463, № 4. С. 387–390.
3. *Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского // http://www.uchimsya.info/maxsurf.pdf.
4. *Берестовский В. Н., Гичев В. М.* Метризованные левоинвариантные порядки на топологических группах // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 4. С. 1–34.
5. *Grochowski M.* Reachable sets for the Heisenberg sub-Lorentzian structure on $\mathbb{R}^3$. An estimate for the distance function // J. Dyn. Control Syst. 2006. V. 12, N 2. P. 145–160.
6. *Grochowski M.* Properties of reachable sets in the sub-Lorentzian geometry // J. Geom. Phys. 2009. N 7. P. 885–900.
7. *Grochowski M.* Normal forms and reachable sets for analytic Martinet sub-Lorentzian structures of Hamiltonian type // J. Dyn. Control Syst. 2011. N 1. P. 49–75.
8. *Grochowski M.* Reachable sets for contact sub-Lorentzian metrics on $\mathbb{R}^3$. Application to control affine systems with the scalar input // J. Math. Sci. 2011. V. 177, N 3. P. 383–394.
9. *Grochowski M.* The structure of reachable sets for affine control systems induced by generalized Martinet sub-Lorentzian metrics // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2012. N 4. P. 1150–1177.
10. *Grochowski M.* The structure of reachable sets and geometric optimality of singular trajectories for certain affine control systems in $\mathbb{R}^3$. The sub-Lorentzian approach // J. Dyn. Control Syst. (to appear).
11. *Grochowski M.* Geodesics in the sub-Lorentzian geometry // Bull. Polish Acad. Sci. Math. 2002. N 2. P. 161–178.

12. *Grochowski M.* Some remarks on the global sub-Lorentzian geometry // Anal. Math. Phys. (to appear).
13. *Korolko A., Markina I.* Nonholonomic Lorentzian geometry on some H-type groups // J. Geom. Anal. 2009. V. 19, N 4. P. 864–889.
14. *Korolko A., Markina I.* Geodesics on H-type quaternion groups with sub-Lorentzian metric and their physical interpretation // Complex Anal. Oper. Theory. 2010. V. 4, N 3. P. 589–618.
15. *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Уравнения движения заряженной частицы в пятимерной модели общей теории относительности с неголономным четырехмерным пространством скоростей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. № 1. С. 62–70.
16. *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. № 3. С. 68–80.
17. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas // Anal. Math. Phys. Basel: Birkhäuser, 2009. P. 233–335.
18. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. (2). 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
19. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry: Contemp. Math. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
20. *Карманова М. Б.* Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 3. С. 259–264.
21. *Карманова М. Б.* Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
22. *Garofalo N., Pauls S. D.* The Bernstein problem in the Heisenberg group // http://arxiv.org/pdf/math/0209065v2.pdf.

Статья поступила 25 января 2015 г.

Карманова Мария Борисовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru