Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 517.5+517.53

ТОЧНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ И НЕРАВЕНСТВА РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В. И. Данченко, Л. А. Семин

Аннотация. Получены точные квадратурные формулы для интегралов от рациональных функций комплексного переменного на окружностях, вещественной оси и ее сегментах. Найдены точные квадратурные формулы для подсчета L_2-норм рациональных функций на таких множествах. На основании квадратурных формул для рациональных функций и, в частности, для наипростейших дробей и многочленов получены точные неравенства разных метрик (типа неравенств С. М. Никольского).

DOI 10.17377/smzh.2016.57.205

Ключевые слова: точные квадратурные формулы для рациональных функций, наипростейшая дробь, неравенства разных метрик (типа неравенств С. М. Никольского).

1. Введение. Формулировка основных результатов

Точные квадратурные формулы для интегралов от рациональных функций на окружностях, вещественной оси и ее сегментах получены в [1–8]. Узлы в таких формулах строились, в основном, с помощью нулей синус-дроби Чебышева — Маркова (см. примечания в п. 1.3). В настоящей работе предлагаются точные квадратурные формулы иного типа: узлы в них не фиксированы и зависят от определенного вещественного параметра, причем каждый узел пробегает непрерывно всю область интегрирования при соответствующем изменении параметра. Это позволяет, в частности, выбирать один из узлов в любой наперед заданной точке области интегрирования. Квадратурные формулы с переменными узлами применяются далее как аппарат для получения неравенств разных метрик для рациональных функций и многочленов.

1.1. Пусть $r > 0$ и $\gamma_r := \{z : |z| = r\}$. Рассмотрим конечное множество на $\overline{\mathbb{C}}$ вида $\mathscr{Z}_n \cup \mathscr{Z}_n^*$, $n \in \mathbb{N}$, где

$$\mathscr{Z}_n := \{z_1, \dots, z_n\},\ \mathscr{Z}_n^* = \{z_1^*, \dots, z_n^*\} = \{r^2/\overline{z_1}, \dots, r^2/\overline{z_n}\},\ z_1 = 0,\ z_1^* = \infty, \quad (1)$$

причем множество $\mathscr{Z}_n$ лежит в круге $|z| < r$ (множество $\mathscr{Z}_n^*$ симметрично для $\mathscr{Z}_n$ относительно окружности γ_r). Считаем точки z_k попарно различными. При $z \in \mathbb{C}$ положим

$$B(z) = r^n \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{r^2 - z\overline{z_k}}, \quad \mu(z) = z\frac{B'(z)}{B(z)}, \quad \mu(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{r^2 - |z_k|^2}{|\zeta - z_k|^2}, \quad \zeta \in \gamma_r. \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке ДРПННиТ № 1.1348.2011, РФФИ (коды проектов 14–01–00510, 16–31–00252мол_а), Минобрнауки России (задание № 2014/13, № 1.574.2016/ФПМ) и в рамках Государственного задания ВлГУ № 2014/13 в сфере научной деятельности (тема 2868).

Важную роль при построении квадратурных узлов играют корни $\zeta_k(s,\varphi)$ уравнения $B^s(\zeta)=e^{i\varphi}$ относительно ζ при фиксированных $s\in\mathbb{N}$ и $\varphi\in\mathbb{R}$. Будем иногда называть их *точками насечки*. Очевидно, что при любых s и φ есть ровно sn различных точек насечки и все они лежат на γ_r. Кроме того, каждая точка $\zeta_k(s,\varphi)$ непрерывно пробегает окружность γ_r при фиксированном s и непрерывном изменении параметра φ от 0 до $2\pi ns$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть $s\in\mathbb{N}$ и R — рациональная функция, множество полюсов которой содержится в $\mathscr{Z}_n\cup\mathscr{Z}_n^*$, причем отличные от $z_1=0$ и $z_1^*=\infty$ полюсы имеют кратности не выше s, а в точках z_1 и z_1^* могут быть полюсы кратности не выше $s-1$. Тогда при всех $\varphi\in\mathbb{R}$ для точек насечки $\zeta_k=\zeta_k(s,\varphi)$, удовлетворяющих уравнению $B^s(\zeta)=e^{i\varphi}$, имеет место равенство*

$$\int\limits_{|\zeta|=r} R(\zeta)|d\zeta| = \frac{2\pi r}{s}\sum_{k=1}^{sn}\frac{R(\zeta_k)}{\mu(\zeta_k)}. \tag{3}$$

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 для точек насечки $\zeta_k=\zeta_k(2s,\varphi)$, удовлетворяющих уравнению $B^{2s}(\zeta)=e^{i\varphi}$, $\varphi\in\mathbb{R}$, имеет место равенство*

$$\|R\|^2_{L_2(\gamma_r)} = \int\limits_{\gamma_r}|R(\zeta)|^2|d\zeta| = \frac{\pi r}{s}\sum_{k=1}^{2sn}\frac{|R(\zeta_k)|^2}{\mu(\zeta_k)}. \tag{4}$$

При этом в отличие от теоремы 1 достаточно, чтобы сумма кратностей полюсов в точках $z_1=0$ и $z_1^*=\infty$ не превосходила $2s-1$. В частности, (4) справедливо для многочленов степени не выше $2s-1$ и функции μ (тогда $s=1$):

$$\|\mu\|^2_{L_2(\gamma_r)} = \pi r\sum_{k=1}^{2n}\mu(\zeta_k(2,\varphi)). \tag{5}$$

Примечание 1. Из теоремы 2 при тех же условиях на R получаются квадратурные формулы и для L_{2m}-норм ($m=2,3,\dots$):

$$\|R\|^{2m}_{L_{2m}(\gamma_r)} = \int\limits_{\gamma_r}|R(\zeta)|^{2m}|d\zeta| = \frac{\pi r}{ms}\sum_{k=1}^{2msn}\frac{|R(\zeta_k)|^{2m}}{\mu(\zeta_k)},\quad \zeta_k=\zeta_k(2ms,\varphi), \tag{6}$$

применением (4) к рациональным функциям $R^m(z)$ с заменой s на ms. Это же относится и к нижеследующим аналогичным формулам (7), (8), (10).

1.2. Из теорем 1 и 2 в некоторых случаях можно получить точные квадратурные формулы на множествах, которые являются образами окружностей при отображениях рациональными функциями. Сформулируем такой результат для отрезка $[-1,1]$. Пусть W_n — не пересекающееся с отрезком $[-1,1]$ конечное множество (попарно различных точек) вида

$$W_n=\{\infty,w_2,\dots,w_n\}\cup\{\overline{w_2},\dots,\overline{w_n}\},\ n\ge 2,\quad W_1=\{\infty\}$$

(кратность вещественных точек объединения не учитывается). При отображении Жуковского $w=(v+1/v)/2$ множеству W_n соответствует прообраз $V_\nu=\mathscr{Z}_\nu\cup\mathscr{Z}_\nu^*$ вида (1), содержащий 2ν различных точек с $\nu\le 2n-1$ (по-прежнему $z_1=0$, $z_1^*=\infty$). Положим (ср. с (2))

$$B_0(z)=\prod_{k=1}^{\nu}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z},\quad \mu_0(\zeta)=\zeta\frac{B_0'(\zeta)}{B_0(\zeta)}>0,\quad |\zeta|=1.$$

Теорема 3. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и R — рациональная функция, множество полюсов которой содержится в W_n, причем отличные от ∞ полюсы имеют кратности не выше s, а в бесконечно удаленной точке может быть полюс кратности не выше $s-1$. Тогда при каждом $\varphi \in \mathbb{R}$*

$$\int_{-1}^{1} \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{s}\sum_{k=1}^{s\nu}\frac{R(x_k(\varphi))}{\mu_0(\zeta_k(\varphi))}, \quad x_k = \frac{1}{2}\left(\zeta_k + \frac{1}{\zeta_k}\right), \tag{7}$$

$$\|R\|^2_{*,2} := \int_{-1}^{1} \frac{|R(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2s}\sum_{k=1}^{2s\nu}\frac{|R(\tau_k(\varphi))|^2}{\mu_0(\xi_k(\varphi))}, \quad \tau_k = \frac{1}{2}\left(\xi_k + \frac{1}{\xi_k}\right), \tag{8}$$

где $\nu \le 2n-1$, а $\zeta_k = \zeta_k(\varphi)$ и $\xi_k = \xi_k(\varphi)$ — точки насечки, удовлетворяющие соответственно уравнениям $B_0^s(\zeta) = e^{i\varphi}$ и $B_0^{2s}(\xi) = e^{i\varphi}$.

Примечание 2. При $\nu = 1$, $W_1 = \{\infty\}$, $\mu_0 \equiv 1$, $\varphi = \pi$ и при замене s на $2s$ точки насечки в (7) определяются из уравнения $\zeta^{2s} = -1$. В этом случае точки $x_k \in (-1,1)$ составляют двукратное множество нулей многочлена Чебышева $T_s(x)$. Отсюда получается известная квадратурная формула Гаусса — Чебышева (см., например, [9; 10, гл. 10]), точная на многочленах степени $\le 2s-1$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \approx \frac{\pi}{2s}\sum_{k=1}^{2s} f(x_k) = \frac{\pi}{s}\sum_{k=1}^{s} f(\lambda_k), \quad \lambda_k = \cos\frac{2k-1}{2s}\pi.$$

Сформулируем результат для действительной оси $\mathbb{R}$. Пусть множество $\mathscr{F}_n$ состоит из $2n$ различных точек, не лежащих на $\mathbb{R}$, и имеет вид

$$\mathscr{F}_n = \{z_1, z_2, \dots, z_n\} \cup \{\overline{z_1}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_n}\}, \quad z_k \in \mathbb{C}^+, \; z_k \ne \infty.$$

Положим

$$B_1(z) = \prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{z-\overline{z}_k}, \quad \mu_1(x) = \frac{1}{2i}\frac{B_1'(x)}{B_1(x)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{Im} z_k}{|x-\overline{z}_k|^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Теорема 4. *Пусть $s \in \mathbb{N}$. Тогда для любой правильной рациональной дроби R, полюсы которой принадлежат $\mathscr{F}_n$ и имеют кратности не выше s, при любом $\varphi \in (0, 2\pi)$*

$$\|R\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{\pi}{2s}\sum_{k=1}^{2sn}\frac{|R(x_k(\varphi))|^2}{\mu_1(x_k(\varphi))}, \quad \|\mu_1\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{2n}\mu_1(t_k(\varphi)), \tag{10}$$

где в первом равенстве $x_k(\varphi)$ — (вещественные) точки насечки, удовлетворяющие уравнению $B_1^{2s}(x) = e^{i\varphi}$, а во втором точки $t_k(\varphi)$ удовлетворяют уравнению $B_1^2(t) = e^{i\varphi}$.

Из квадратурных формул в разд. 3 получаются точные неравенства разных метрик (типа неравенств С. М. Никольского) для рациональных функций и многочленов. Например, из теоремы 2 следует

Теорема 5. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и рациональная функция R удовлетворяет условию теоремы 2 (конечные и отличные от $z_1 = 0$ полюсы имеют кратность не выше s, а в точках $z_1 = 0$ и $z_1^* = \infty$ сумма кратностей полюсов не превосходит $2s-1$). Тогда*

$$\frac{|R(\zeta)|^2}{\mu(\zeta)} \le \frac{s}{\pi r}\|R\|^2_{L_2(\gamma_r)} \quad \forall \zeta \in \gamma_r. \tag{11}$$

Неравенство (11) *точное: для любого* $\zeta_0 \in \gamma_r$ *найдется допустимая рациональная функция* $R(\zeta_0, \zeta)$, *для которой* (11) *обращается в равенство при* $\zeta = \zeta_0$. *В частности, существует рациональная функция* R^*, *для которой*

$$\|R^*\|^2_{L_\infty(\gamma_r)} = \frac{s}{\pi r} \|R^*\|^2_{L_2(\gamma_r)} \|\mu\|_{L_\infty(\gamma_r)}. \tag{12}$$

Кроме того,

$$\|R\|_{L_\infty(\gamma_r)} \leq \frac{s}{\pi r} \|R\|_{L_2(\gamma_r)} \|\mu\|_{L_2(\gamma_r)}. \tag{13}$$

Множитель перед произведением норм в (13) *нельзя уменьшить.*

1.3. Примечания и примеры. Подобные (3), (7) квадратурные формулы, основанные на различных интерполяционных тождествах (Бернштейна, Чебышева — Маркова и др.), на вещественной оси и окружности, были получены многими авторами (см. работы [1–9, 11, 12] и библиографию в них). Результаты, близкие по форме к теоремам 1–3, получены в работах В. Н. Русака, Е. А. Ровбы, К. А. Смотрицкого, Е. В. Дирвука, Г. Мина. Например, для рациональной функции $R(z)$, полюсы которой лежат на множестве вида W_n и имеют кратности ≤ 2 (в бесконечно удаленной точке допускается простой полюс), имеем [3]

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi \widetilde{\sum_{k=1}^{m+1}} \frac{R(t_k)}{\lambda_n(t_k)}, \quad \lambda_n(x) := \sum_{z_k^{-1} \in W_n} \frac{\sqrt{1-z_k^2}}{1 - x z_k}, \tag{14}$$

где m — число различных точек множества W_n, тильда означает, что первое и последнее слагаемые следует разделить на 2, действительная часть радикалов берется положительной, а в качестве узлов $t_2, \ldots, t_m$ берутся нули синус-дроби Чебышева — Маркова

$$N_m(x) = \frac{\sin \nu_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{где } \nu_m(x) = \sum_{z_k^{-1} \in W_n} \arccos \frac{x - z_k}{1 - z_k x},$$

и дополняются точками $t_1 = -1$, $t_{m+1} = 1$ (формулы с двумя фиксированными узлами ± 1 называются *квадратурными формулами типа Лобатто*).

Формула (7) дополняет формулу (14) в следующем смысле. Несмотря на внешнее сходство, эти формулы различаются: множества узлов и весов в них имеют разную природу. Кроме того, важно, что узлы в (7) в отличие от (14) переменные и каждый узел $\zeta_k(\varphi)$ непрерывно пробегает (дважды) отрезок $[-1, 1]$ при изменении φ от 0 до $2\pi s\nu$. Это существенно используется далее в неравенствах разных метрик.

Примерно тем же отличаются формулы (3) и (7) от формул В. Н. Русака, Н. В. Гриба, Н. К. Филипповой [6, 7] на отрезке, а также от формул, полученных ими в случае окружности для тригонометрических рациональных функций.

Отметим еще, что в [13] получены сходные с (10) квадратурные формулы для L_2-норм так называемых наипростейших дробей (НД) порядка n:

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} (z - z_k)^{-1}. \tag{15}$$

Именно, если все z_k принадлежат $\mathbb{C}^+$ и $x_k = x_k(\varphi)$ — точки насечки, удовлетворяющие уравнению $B_1^2(x) = e^{i\varphi}$ $(k = \overline{1, 2n})$, то

$$\|\rho_n\|_2^2 = \pi \sum_{k=1}^{2n} \frac{(\operatorname{Re} \rho_n(x_k))^2}{\mu_1(x_k)} = \pi \sum_{k=1}^{2n} \mu_1(x_k), \quad \mu_1(x) = \operatorname{Im} \rho_n(x). \tag{16}$$

Примеры. Приведем два примера применения (8) и (10). Если взять $R(x) = (z-i)^{-s}$, то при $s = \overline{1,6}$ имеем

$$\|R\|^2_{*,2} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}\left(|R(1)|^2 + \frac{8}{5}|R(\sqrt{3/5})|^2 + \frac{8}{7}|R(\sqrt{1/7})|^2 + \frac{1}{2}|R(0)|^2\right).$$

Положим $a = 2+\sqrt{3}$, $b = 2-\sqrt{3}$. Для любой правильной рациональной дроби R с полюсами кратности не выше 3, расположенными в точках $\pm i$, из (10) получим

$$\|R\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{\pi}{3}(|R(1)|^2 + |R(-1)|^2 + 2a(|R(a)|^2 + |R(-a)|^2) + 2b(|R(b)|^2 + |R(-b)|^2)).$$

2. Доказательство теорем 1–4

Доказательство теоремы 1. Сначала проведем доказательство в случае простых полюсов z_k, т. е. при $s = 1$. В этом случае по условию точки 0 и ∞ не могут быть полюсами дроби R. Пусть

$$R(z) = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{z - z_k} + \frac{\beta_k}{r^2 - z\overline{z_k}}\right), \quad F(z) := \frac{R(z)}{B(z) - e^{i\varphi}}.$$

По теореме Коши о вычетах имеем

$$\int\limits_{|\zeta|=r} R(\zeta)|d\zeta| = -ir\int\limits_{|\zeta|=r} R(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} = -ir\int\limits_{|\zeta|=r}\sum_{k=2}^{n}\frac{\beta_k}{r^2 - \zeta\overline{z_k}}\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{2\pi}{r}\sum_{k=2}^{n}\beta_k. \tag{17}$$

Рассмотрим разложение на простейшие дроби функции $F(z)$. Она имеет простые полюсы в точках насечки ζ_k $(k = 1,\dots,n)$ и в точках $\mathscr{Z}_n$ и устранимые особенности в точках $\mathscr{Z}_n^*$. Поэтому разложение с учетом (2) и равенства $B(\zeta_k) = e^{i\varphi}$ имеет вид

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{R(\zeta_k)}{B'(\zeta_k)(z-\zeta_k)} - \sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha_k e^{-i\varphi}}{z - z_k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-i\varphi}\zeta_k R(\zeta_k)}{\mu(\zeta_k)(z-\zeta_k)} - \sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha_k e^{-i\varphi}}{z - z_k}. \tag{18}$$

После подстановки $z = 0$ в (18) с учетом $B(0) = 0$, $R(0) \neq \infty$ находим

$$F(0) = R(0)e^{-i\varphi} = e^{-i\varphi}\sum_{k=1}^{n}\frac{R(\zeta_k)}{\mu(\zeta_k)} - e^{-i\varphi}\sum_{k=2}^{n}\frac{\alpha_k}{z_k} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=2}^{n}\frac{\beta_k}{r^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{R(\zeta_k)}{\mu(\zeta_k)}.$$

Отсюда и из (17) получаем (3) при $s = 1$ и $R(\infty) = 0$.

К разобранному случаю сводится общий случай кратных полюсов, отличных от $z_1 = 0$ и $z_1^* = \infty$. Действительно, пусть $R(z)$ — рациональная функция, полюсы которой лежат на $\mathscr{Z}_n \cup \mathscr{Z}_n^*$, отличны от z_1 и z_1^* и имеют кратности не выше s. При $\nu = 1, 2, \dots$ рассмотрим последовательность множеств $\mathscr{Z}(\nu) := \{z_{\nu;k,j}\}$ $(j = \overline{1,s}, k = \overline{1,n})$ из попарно различных точек со свойствами $\lim\limits_{\nu\to\infty} z_{\nu;k,j} \to z_k$, $z_{\nu;1,1} = z_1 = 0$. Тогда для функций $B(\nu; z)$ и $\mu(\nu; z)$ вида (2), построенных по множествам $\mathscr{Z}(\nu) \cup \mathscr{Z}^*(\nu)$, при $\nu \to \infty$ имеем $B(\nu;\zeta) \to B^s(\zeta)$ и $\mu(\nu;\zeta) \to s\mu(\zeta)$ равномерно на γ_r. Кроме того, найдется последовательность правильных рациональных функций $R(\nu;\zeta)$ с простыми отличными от z_1 и z_1^* полюсами, лежащими на $\mathscr{Z}(\nu) \cup \mathscr{Z}^*(\nu)$, для которой $R(\nu;\zeta) \to R(\zeta)$ равномерно на окружности γ_r. Поэтому, применив уже доказанное к $R(\nu;\zeta)$, $B(\nu;\zeta)$, $\mu(\nu;\zeta)$, предельным переходом при $\nu \to \infty$ получим (3) для случая кратных отличных от $z_1 = 0$ и $z_1^* = \infty$ полюсов.

Для завершения доказательств (3) и (4) понадобится

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1 *при* $\zeta_k = \zeta_k(s,\varphi)$ *справедливо равенство*

$$S(Q) := \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{sn} \frac{Q(\zeta_k)}{\mu(\zeta_k)} = q_0, \quad \text{где } Q(z) := \sum_{j=1-s}^{s-1} q_j z^j,\ q_j \in \mathbb{C}. \tag{19}$$

Действительно, при $\sigma_j(z) = z^j$ и отрицательных $j \geq 1-s$ по аналогии с (18) находим

$$\frac{\sigma_j(z)}{B^s(z) - e^{i\varphi}} + \frac{\sigma_j(z)}{e^{i\varphi}} = \frac{e^{-i\varphi}}{s}\sum_{k=1}^{n\,s} \frac{\zeta_k \sigma_j(\zeta_k)}{\mu(\zeta_k)(z-\zeta_k)},$$

где предел при $z \to 0$ от левой части равен нулю (так как $z_1 = 0$ является нулем порядка $s > |j|$ для B^s). Отсюда при $z \to 0$ получаем, что сумма $S(\sigma_j)$ равна нулю. Для положительных j также $\overline{S(\sigma_j)} = r^{2j} S(\sigma_{-j}) = 0$. Аналогично разложением дроби $(B^s(z) - e^{i\varphi})^{-1}$ получается равенство $S(\sigma_0) = 1$.

Интеграл в (3) от степеней $\sigma_j(z)$, $1-s \leq j \leq s-1$, $j \neq 0$, равен нулю, поэтому из (19) следует, что добавление к R линейной комбинации таких степеней не изменяет обе части равенства (3). Для константы $\sigma_0 = 1$ обе части равны $2\pi r$. Этим завершается доказательство (3). $\square$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим функцию $R_0(z) = R(z)\overline{R(z)}$. При $z = \zeta \in \gamma_r$ имеем

$$R_0(\zeta) = |R(\zeta)|^2 = R(\zeta)\overline{R(\zeta)} = R(\zeta)\overline{R}(\bar\zeta) = R(\zeta)\overline{R}(r^2/\zeta),$$

где $\overline{R}(\cdot)$ означает операцию сопряжения коэффициентов функции R. Считая теперь ζ свободной переменной на $\mathbb{C}$, получаем R_0 как функцию от ζ в виде

$$R_0(\zeta) = P_m(\zeta) + Q_\nu(1/\zeta) + R_1(\zeta),$$

где P_m и Q_ν — многочлены, степени m и ν которых не превосходят суммы кратностей полюсов функции R в точках $z_1 = 0$ и $z_1^* = \infty$, т. е. $m \leq 2s-1$, $\nu \leq 2s-1$, R_1 — правильная рациональная дробь, ненулевые полюсы которой лежат на множестве $\mathscr{Z}_n \cup \mathscr{Z}_n^* \setminus \{\infty\}$ и имеют кратность не выше $2s$. Применив теорему 1 с заменой s на $2s$, получим формулу (3) для R_1. Эта же формула верна и для многочленов P_m и Q_ν. Это следует из леммы 2 (где s заменяется на $2s$) и из теоремы о среднем: $\int_{\gamma_r} P_m(z)|dz| = 2\pi r P_m(0)$, $\int_{\gamma_r} Q_\nu(z)|dz| = 2\pi r Q_\nu(0)$. $\square$

Доказательство теоремы 3. При $x \in [-1,1]$ сделаем замену Жуковского:

$$x = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = \cos t,\ \zeta = e^{it}, \quad \sqrt{1-x^2} = |\sin t|, \quad dx = -\sin t\, dt. \tag{20}$$

Учитывая, что при обходе точки ζ единичной окружности точка x пробегает отрезок $[-1,1]$ дважды, получим

$$2\int_{-1}^{1} \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\gamma_1} R_0(\zeta)|d\zeta|, \quad \text{где } R_0(z) := R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right). \tag{21}$$

Отличные от $z_1 = 0$ и $z_1^* = \infty$ полюсы рациональной дроби $R_0(z)$ имеют кратность не выше s, а в точках $z_1 = 0$ и $z_1^* = \infty$ могут быть полюсы кратности не выше $s-1$. Поэтому утверждение теоремы 3 следует из квадратурных формул (3) и (4) с заменой n на ν:

$$2\int_{-1}^{1}\frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{2\pi}{s}\sum_{k=1}^{s\nu}\frac{R_0(\zeta_k)}{\mu(\zeta_k)},\quad 2\|R\|_{*,2}^2=\frac{\pi}{s}\sum_{k=1}^{2s\cdot\nu}\frac{|R_0(\zeta_k)|^2}{\mu(\zeta_k)}.$$

Доказательство теоремы 4. Для удобства доказательства будем считать $z_1=i$. При замене $x=-i(\zeta+1)(\zeta-1)^{-1}$, $x\in\mathbb{R}$, $\zeta\in\gamma_1$, получаем

$$\|R\|_{L_2(\mathbb{R})}^2=2\int_{\gamma_1}|R_0(\zeta)|^2\,|d\zeta|,\quad R_0(\zeta)=\frac{1}{\zeta-1}R\left(i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right),\quad \zeta=\frac{x-i}{x+i},\tag{22}$$

где R_0 — рациональная дробь, полюсы которой лежат на симметричном относительно γ_1 множестве

$$\{\xi_k\}\cup\{\xi_k^*\},\quad \text{где } \xi_k=\frac{z_k-i}{z_k+i},\ k=1,\dots,n,$$

и во всех точках, отличных от $\xi_1^*=\infty$, имеют кратность не выше s, а кратность полюса в точке $\xi_1^*=\infty$, как видно из (22), не выше $s-1$. В точке $z=1$ устранимая особенность (так как $R(\infty)=0$ по условию). Следовательно, R_0 удовлетворяет условиям теоремы 2. Легко проверить, что при указанной замене для произведений Бляшке (2) и (9) имеем связь $B(\zeta)=A\cdot B_1(x)$, т. е.

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{\zeta-\xi_k}{1-\zeta\overline{\xi_k}}=A\prod_{k=1}^{n}\frac{x-z_k}{x-\overline{z_k}},\quad \text{где } A:=\prod_{k=1}^{n}\frac{i-\overline{z_k}}{i+z_k}.$$

Отсюда с учетом (2) и (9) находим

$$\mu(\zeta)=\zeta\frac{B'(\zeta)}{B(\zeta)}=\zeta\frac{B_1'(x)}{B_1(x)}\frac{2i}{(1-\zeta)^2}=-\frac{4\zeta}{(1-\zeta)^2}\,\mu_1(x).$$

Наконец, учитывая (22) и (4), получаем (10):

$$2\|R_0\|_{L_2(\gamma_1)}^2=\frac{2\pi r}{s}\sum_{k=1}^{2sn}\frac{|R_0(\zeta_k)|^2}{\mu(\zeta_k)}=\frac{\pi}{2s}\sum_{k=1}^{2sn}\frac{|R(x_k)|^2}{\mu_1(x_k)},\quad x_k=-i\frac{\zeta_k+1}{\zeta_k-1}.$$

3. Неравенства разных метрик для рациональных функций и многочленов

Неравенства разных метрик для алгебраических и тригонометрических многочленов хорошо известны. Они восходят к работам Джексона [14] и С. М. Никольского [15]. Дальнейшее развитие эта тематика получила благодаря работам Н. К. Бари, С. Б. Стечкина, В. В. Арестова, Л. В. Тайкова, Сегё, Зигмунда, П. Л. Ульянова, М. К. Потапова, Борвейна, А. Ф. Тимана, И. И. Ибрагимова, Дж. И. Мамедханова и многих других авторов (все источники здесь невозможно перечислить, ограничимся ссылкой на работы [16–22] и на соответствующую библиографию в них; см. также ссылки ниже). В качестве примера приведем неравенство для алгебраических многочленов P_n степени $\le n$ на ограниченном промежутке $E\subset\mathbb{R}$:

$$\|P_n\|_{L_p(E)}\le C(E,p,r)n^{2(\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}\|P_n\|_{L_r(E)},\quad \infty\ge p>r\ge 1.\tag{23}$$

Сходные неравенства верны и для тригонометрических многочленов, причем в случае вещественных многочленов и $E = [-\pi, \pi]$ множитель 2 в показателе степени можно заменить единицей и положить $C(E, p, r) = 2$ (см. [15, 17]).

Некоторые неравенства разных метрик для НД (15) были получены на подмножествах $\mathbb{R}$ в [23–25]. Приведем одно такое неравенство при $\infty \geq p > r > 1$:

$$\|\rho_n\|^q_{L_p(\mathbb{R})} \leq A(p,r)\,\|\rho_n\|^s_{L_r(\mathbb{R})}\,, \quad \text{где } p^{-1} + q^{-1} = 1,\ r^{-1} + s^{-1} = 1. \tag{24}$$

Отметим, что в отличие от (23) неравенство (24) нелинейно относительно сравниваемых норм и не зависит от n. Другим отличительным свойством неравенств для НД является то, что они содержательны и на бесконечных промежутках действительной оси, и при произвольном соотношении между p и r (при $p < r$ они также не являются тривиальными и не следуют из неравенства Гёльдера даже на конечных промежутках) [23].

В работах В. Ю. Протасова, И. Р. Каюмова, А. В. Каюмовой, В. И. Данченко [13, 25–30] получены оценки другого типа. В этих работах L_p-нормы для НД в основном оценивались посредством специальных сумм, явно зависящих от полюсов z_k. Например, в [26] показано, что

$$\|\rho_n\|_{L_p(\mathbb{R})} \geq \gamma_p \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\operatorname{Im} z_k|^{p-1}} \right)^{1/p}, \quad p > 1,$$

с определенным точным множителем γ_p, зависящим лишь от p. В [13] показано, что если все z_k принадлежат $\mathbb{C}^+$, то при $1 < p < 3$ имеем двустороннюю оценку

$$\|\rho_n\|^p_{L_p(\mathbb{R})} \cos\frac{\pi(p-2)}{2} \leq 2\pi \operatorname{Im}\left(e^{-i\frac{\pi(p-2)}{2}} \sum_{k=1}^{n} \rho_n^{p-1}(\overline{z_k}) \right) \leq \|\rho_n\|^p_{L_p(\mathbb{R})}.$$

Возникает интерес к распространению неравенств типа (24) на другие метрики и множества. Некоторые результаты в этом направлении получены в [31]. Ниже получены некоторые точные оценки sup-норм рациональных функций и, в частности, многочленов и наипростейших дробей через их интегральные нормы в случае окружностей, прямых и их сегментов.

3.1. Случай окружности. Докажем теорему 5, а затем получим некоторые неравенства для многочленов.

3.1.1. Доказательство теоремы 5. Выбрав в (4) параметр φ так, чтобы в точке насечки $\zeta_1 = \zeta_1(2s, \varphi)$ функция $|R(\zeta)|^2/\mu(\zeta)$ принимала наибольшее значение, получим (11):

$$\max_{\zeta \in \gamma_r} \frac{|R(\zeta)|^2}{\mu(\zeta)} = \frac{|R(\zeta_1)|^2}{\mu(\zeta_1)} \leq \frac{s}{\pi r} \|R\|^2_{L_2(\gamma_r)}.$$

Далее, из неравенства Коши — Буняковского и (4) имеем

$$\sum_{k=1}^{2sn} |R(\zeta_k)| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{2sn} \frac{|R(\zeta_k)|^2}{\mu(\zeta_k)}} \sqrt{\sum_{k=1}^{2sn} \mu(\zeta_k)} = \frac{s}{\pi r} \|R\|_{L_2(\gamma_r)} \|\mu\|_{L_2(\gamma_r)},$$

где $\zeta_k = \zeta_k(2s, \varphi)$, откуда, выбрав в (4) параметр φ так, чтобы в точке $\zeta_1 = \zeta_1(2s, \varphi)$ функция $|R(\zeta)|$ принимала наибольшее значение, получим (13).

Конечно, выбор в сумме (4) лишь одного слагаемого может значительно огрублять оценки, особенно когда слагаемые незначительно отличаются друг от друга. Тем не менее оценка (11) точная на классе допустимых рациональных функций. Покажем, например, что равенство в (11) достигается на рациональных функциях вида

$$R(z)=R(s,n,\varphi;z)=\frac{B^s(z)-e^{i\varphi}B^{-s}(z)}{z-\zeta_1},\quad \zeta_1=\zeta_1(2s,\varphi), \tag{25}$$

где B — произведение Бляшке из (2). Очевидно, что функция R удовлетворяет условиям теоремы 2 и, следовательно, для нее справедливо равенство (4). С другой стороны, во всех точках насечки, отличных от ζ_1, имеем $R(\zeta_k)=0$, $k\neq 1$. Это означает (см. (4)), что функция $|R(\zeta)|^2/\mu(\zeta)$ принимает наибольшее значение в точке ζ_1 и в (11) получается равенство. Для доказательства (12) достаточно дополнительно потребовать, чтобы при соответствующем φ в точке $\zeta_1=\zeta_1(2s,\varphi)$ функция μ принимала наибольшее значение. $\square$

В дополнение к теореме 5 заметим, что норма μ в (13) легко подсчитывается:

$$\begin{aligned}\|\mu\|^2_{L_2(\gamma_r)}&=r^2\int\limits_{\gamma_r}|B'(\zeta)|^2|d\zeta|=-ir^2\int\limits_{\gamma_r}|B'(\zeta)|\frac{B'(\zeta)}{B(\zeta)}\,d\zeta=-ir\int\limits_{\gamma_r}\zeta\left(\frac{B'(\zeta)}{B(\zeta)}\right)^2d\zeta\\&=2\pi r\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}_{z_k} z\left(\frac{B'(z)}{B(z)}\right)^2=2\pi r\left(n^2+2\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{z_k\overline{z_j}}{r^2-z_k\overline{z_j}}\right).\end{aligned}\tag{26}$$

Отсюда следует, например, что множитель перед произведением норм в (13) нельзя уменьшить. Действительно, при $R\equiv\mu$, $n\geq 2$ и $s=1$ из (13) и (26) имеем

$$\|\mu\|_{L_\infty(\gamma_r)}\leq\frac{1}{\pi r}\|\mu\|^2_{L_2(\gamma_r)}=2n^2+4\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{z_k\overline{z_j}}{r^2-z_k\overline{z_j}}, \tag{27}$$

а здесь, как легко проверить, при вещественном $z_2\nearrow r$ и прочих фиксированных полюсах отношение левой и правой частей стремится к единице. Отметим еще, что если все полюсы R лежат во внешности кольца $K_\varepsilon=\{z:\varepsilon r<|z|<r/\varepsilon\}$, $\varepsilon\in(0,1)$, то, оценив $\mu(\zeta)$ сверху величиной $n(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$, из (11) получим

$$\|R\|_{L_\infty(\gamma_r)}\leq\sqrt{\frac{ns}{\pi r}\,\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\|R\|_{L_2(\gamma_r)},\quad z_k\notin K_\varepsilon.$$

3.1.2. Неравенства для многочленов. Квадратурный метод позволяет единообразно получить ряд неравенств для тригонометрических и алгебраических многочленов. Приведем некоторые оценки.

Пусть $T_{s-1}(t)$ — тригонометрический многочлен степени не выше $s-1$ с комплексными коэффициентами. Пусть $p>0$ и $m=m(p)$ — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $2m\geq p$ (т. е. $p/2\leq m<1+p/2$). Тогда

$$\|T_{s-1}\|_{L_\infty[0,2\pi]}\leq\alpha(p)s^{\frac{1}{p}}\,\|T_{s-1}\|_{L_p[0,2\pi]},\quad \text{где } \alpha(p)=\left(\frac{m}{\pi}\right)^{1/p}<\frac{11}{10}. \tag{28}$$

Аналогичное неравенство справедливо для алгебраического многочлена P_{2s-1} степени не выше $2s-1$ с комплексными коэффициентами:

$$\|P_{2s-1}\|_{L_\infty(\gamma_r)}\leq\alpha(r,p)s^{\frac{1}{p}}\|P_{2s-1}\|_{L_p(\gamma_r)},\quad \text{где } \alpha(r,p)=\left(\frac{m}{\pi r}\right)^{1/p}. \tag{29}$$

Для доказательства (28) рассмотрим рациональную функцию $R(z) = \sum\limits_{k=1-s}^{s-1} \sigma_k z^k$ такую, что $T_{s-1}(t) = R(e^{it})$. В этом случае функция R имеет два полюса $z_1 = 0$ и $z_1^* = \infty$, сумма кратностей которых не превосходит $2s-2$. Поэтому из примечания 1 к теореме 2 при $n=1$, $r=1$ и $B(z) \equiv z$, $\mu(e^{it}) \equiv 1$ получается

$$\sum_{k=1}^{2sm} |T_{s-1}(t_k)|^{2m} = \frac{sm}{\pi} \|T_{s-1}\|^{2m}_{L_{2m}[0,2\pi]},$$

где $t_k = t_k(\varphi) = \arg \zeta_k(\varphi)$, а $\zeta_k(\varphi)$ — корни уравнения $z^{2sm} = e^{i\varphi}$. Выбрав φ так, чтобы в точке t_1 функция $|T_{s-1}|$ принимала наибольшее значение, при $2m-2 < p \le 2m$ получим

$$\begin{aligned}\|T_{s-1}\|^{2m}_{L_\infty[0,2\pi]} = |T_{s-1}(t_1)|^{2m} \le \frac{sm}{\pi} \|T_{s-1}\|^{2m}_{L_{2m}[0,2\pi]} \\ \le \frac{sm}{\pi} \|T_{s-1}\|^{p}_{L_p[0,2\pi]} \|T_{s-1}\|^{2m-p}_{L_\infty[0,2\pi]},\end{aligned}$$

откуда следует оценка (28). Неравенство (29) получается аналогично из (6) при $R(z) = P_{2s-1}(z)$, $n=1$, $B(z) \equiv z$, $\mu(z) \equiv 1$.

Замечания о точности. Первое неравенство типа (28) для вещественных тригонометрических многочленов получено в [20] (с множителем $\alpha(p) = 2$). При $p=1$ ($m=1$) поведение наилучшего множителя $\alpha^*(1)$ в (28) для вещественных многочленов изучали С. Б. Стечкин и Л. В. Тайков. Ими показано, что $\alpha^*(1) = c/\pi + o(1)$ при $s \to \infty$ с некоторым $0.53 < c < 0.59$ (см. [32]).

На самом деле неравенство (28) справедливо в классе $\mathscr{T}_s$ многочленов T_s степени $\le s$, которые при $z = e^{it}$ имеет вид $\sum\limits_{k=1-s}^{s} \sigma_k z^k$ или $\sum\limits_{k=-s}^{s-1} \sigma_k z^k$, $\sigma_k \in \mathbb{C}$ (так как сумма кратностей полюсов в обоих случаях не превосходит $2s-1$). В классе $\mathscr{T}_s$ неравенство (28) точно при $p=2$ ($m=1$); например, легко проверяется, что при $\alpha(2) = \pi^{-1/2}$ оно достигается на многочленах

$$T_s^*(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{s-1} \cos kt + e^{sti} = 1 + \sum_{k=1}^{s-1} (z^k + z^{-k}) + z^s, \quad z = e^{it}.$$

В этом случае левая и правая части в (28) равны $T_s^*(0) = 2s$.

При $p=2$ ($m=1$) точным является и неравенство (29), в данном случае экстремален многочлен $P^*_{2s-1}(z) = (z^{2s} - r^{2s})(z-r)^{-1}$.

Приведем еще одно неравенство, получающееся из (3) при $n=1$, $r=1$ и $\mu(e^{it}) \equiv 1$ для вещественных неотрицательных тригонометрических многочленов:

$$\|T_{s-1}\|_{L_\infty[0,2\pi]} \le \frac{s}{2\pi} \|T_{s-1}\|_{L_1[0,2\pi]}. \tag{30}$$

3.2. Случай отрезка. Пусть $R(z) = P_{s-1}(z)$ — алгебраический многочлен с комплексными коэффициентами степени не выше $s-1$, $p>0$ и $m = m(p)$ — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $2m \ge p$. Тогда аналогично (28) и (29) из (8) (при $n=1$, $\mu_0(e^{it}) \equiv 1$) с учетом примечания 1 к теореме 2 получаем[1)]

$$\|P_{s-1}\|_{L_\infty([-1,1])} \le \beta(p) s^{1/p} \left(\int\limits_{-1}^{1} \frac{|P_{s-1}(x)|^p}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \right)^{1/p}, \quad \text{где } \beta(p) = \left(\frac{2m}{\pi}\right)^{1/p} < \frac{6}{5}. \tag{31}$$

Это неравенство точное по порядку s [33]. Более того, при $p = 2$ ($m = 1$) существуют вещественные многочлены $P^*_{s-1}(x)$, для которых

$$|P^*_{s-1}(1)| = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}} \|P^*_{s-1}\|_{*,2}, \tag{32}$$

т. е. (31) превращается в равенство с множителем $\tilde{\beta}(p) = \beta(p)/\sqrt{2}$. Такое равенство выполняется, например, для многочленов $P^*_{s-1}(x)$, которые при замене (20) принимают вид

$$P^*_{s-1}(x) = C \frac{1}{\zeta^{s-1}} \frac{\zeta^{2s}-1}{\zeta^2-1}, \quad x = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right). \tag{33}$$

Такие многочлены существуют, это многочлены Якоби $P^*_{s-1}(x) = P^{(1/2,1/2)}(x)$ (см., например, [36]), удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$(x^2-1)y''(x) + 3xy'(x) + (1-s^2)y(x) = 0. \tag{34}$$

Действительно, при замене (33) для функции $Y(\zeta)(\zeta^2-1)^{-1} = y(x)$ уравнение (34), как несложно проверить, преобразуется к уравнению Эйлера

$$\zeta^2 Y''(\zeta) - \zeta Y'(\zeta) + (1-s^2)Y(\zeta) = 0,$$

общее решение которого имеет вид $\zeta^{1-s}(c_1\zeta^{2s} + c_2)$. Значит, для полиномиального решения имеем $c_2 = -c_1$ и тем самым (33) выполняется. В этом случае применим (8) с $\varphi = 0$. Точки насечки ξ_k определяются как корни уравнения $\zeta^{2s} = 1$, поэтому в сумме (8) остается только два равных ненулевых слагаемых $|P^*_{s-1}(\pm 1)|^2$. Отсюда следует (32).

Отметим, что в неравенстве вида (31) для вещественных многочленов и L_p с весом Якоби $(1-x)^{1+d}(1+x)^d$, $d > 0$, В. В. Арестову и М. В. Дейкаловой удалось найти экстремальный многочлен [33].

3.3. Случай действительной оси. Аналогично теореме 5 из (10) получается

Теорема 6. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и правильная рациональная дробь R удовлетворяет условию теоремы 4 (полюсы не лежат на $\mathbb{R}$ и имеют кратности не выше s). Тогда*

$$\frac{|R(x)|^2}{\mu_1(x)} \le \frac{2s}{\pi} \|R\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Это неравенство точное: для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ найдется допустимая рациональная функция $R(x_0, x)$, для которой оно обращается в равенство при $x = x_0$. В частности, существует рациональная функция R^*, для которой

$$\|R^*\|^2_{L_\infty(\mathbb{R})} = \frac{2s}{\pi} \|R^*\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \|\mu_1\|_{L_\infty(\mathbb{R})}.$$

[1)] Неравенства такого типа хорошо известны (см., например, [33–35]). Авторам не известны такие неравенства с более точными константами для комплексных многочленов.

Кроме того,

$$\|R\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \frac{2s}{\pi}\|R\|_{L_2(\mathbb{R})}\|\mu_1\|_{L_2(\mathbb{R})}, \quad \|\mu_1\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \frac{2}{\pi}\|\mu_1\|^2_{L_2(\mathbb{R})}. \tag{35}$$

В (35) *множитель* $2/\pi$ *уменьшить нельзя, это проверяется на рациональных функциях* $R(z) \equiv \mu_1(z)$ *с парой простых полюсов.*

Экстремальные рациональные функции R^* в теореме 6 строятся, как и в теореме 5 (см. (25)). Заметим, что $\mu_1(x) = \operatorname{Im}\rho_n(x)$ для НД (15) с $z_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C}^+$, так что если взять $R = \rho_n$ и $s = 1$, то из (35) получается

$$\|\rho_n\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \frac{2}{\pi}\|\rho_n\|_{L_2(\mathbb{R})}\|\operatorname{Im}\rho_n\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

что уточняет сходный результат из [23], где вместо $\operatorname{Im}\rho_n$ было ρ_n. Отметим еще, что по теореме Коши о вычетах имеем (см., например, [13])

$$2^{-1}\|\rho_n\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \|\mu_1\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \pi\sum_{k,m=1}^{n}\frac{y_k + y_m}{(x_k - x_m)^2 + (y_k + y_m)^2}.$$

3.4. Неравенство разных метрик для НД. Пусть $R(z)$ — рациональная функция, все полюсы которой лежат во внешности окружности γ_r и $R(\infty) = 0$. Для НД (15) с полюсами, лежащими внутри γ_r, положим

$$\rho(z) = \rho_n(z) + R(z). \tag{36}$$

Докажем вспомогательное предложение о разделении особенностей. Для краткости всюду ниже в этом разделе применяем обозначение $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L_p(\gamma_r)}$.

Лемма 2. *На окружности* γ_r, $r > 0$, *независимо от порядка* $n \ge 1$ *выполнено неравенство*

$$\|\rho_n\|_\infty \le 3\eta\ln(r\eta + 1), \quad \text{где } \eta := \|\rho\|_\infty. \tag{37}$$

Доказательство. Достаточно установить (37) в случае $r = 1$; общий случай получается заменой $\rho(z)$ на $r\rho(rz)$. Имеем

$$1 \le n \le \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1}|\rho(\zeta)|\,|d\zeta| \le \eta, \quad |\rho_n'(z)| \le \frac{\eta}{2\pi}\int_{\gamma_1}\frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2} = \frac{\eta}{|z|^2 - 1} \tag{38}$$

при $|z| > 1$. Будем для удобства считать $z_1 = 1 - \varepsilon \in (0,1)$. Пусть $z = \theta > 1$. Из предыдущего неравенства получаем

$$|\rho_n(z)| \le \eta\int_{|z|}^{\infty}\frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{\eta}{2}\ln\frac{|z| + 1}{|z| - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\theta - z_1} \le \frac{\eta}{2}\ln\frac{\theta + 1}{\theta - 1}. \tag{39}$$

Итак, разность

$$v(\eta, \varepsilon; \theta) = \frac{\eta}{2}\ln\frac{\theta + 1}{\theta - 1} - \frac{1}{\theta - 1 + \varepsilon}$$

должна быть положительной при всех $\theta > 1$. Отсюда следует, что $\varepsilon > (2\eta^2)^{-1}$. Действительно, при $\varepsilon = (2\eta^2)^{-1}$, подставив $\theta = 1 + \eta^{-3}$ в $v(\eta, \varepsilon; \theta)$, получим, как легко проверить, отрицательное значение при всех $\eta \ge 1$ (из (38) следует, что всегда $\eta \geq n \geq 1$). Итак, $1 - |z_1| \geq (2\eta^2)^{-1}$. То же верно для любого полюса z_k. Отсюда и из (39) при любом z, $|z| > 1$, и $\zeta = z/|z|$ приходим к оценке

$$|\rho_n(\zeta)| \leq |\rho_n(z)| + |\rho_n(z) - \rho_n(\zeta)| \leq \frac{\eta}{2}\ln\frac{|z|+1}{|z|-1} + |z-\zeta|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|z-z_k||\zeta - z_k|}$$
$$\leq \frac{\eta}{2}\ln\frac{|z|+1}{|z|-1} + |z-\zeta| n \cdot 2\eta^2 \cdot 2\eta^2 \leq \frac{\eta}{2}\ln\frac{|z|+1}{|z|-1} + 4\eta^5(|z|-1).$$

Если взять $|z| = 2^{-1}\eta^{-2}\sqrt{1+4\eta^4}$, то отсюда получим неравенство (37). $\square$

Пусть $\mathscr{Z} = \{z_1, \ldots, z_n\} \cup \{0\}$, где z_k — полюсы НД (15) (лежат внутри γ_r). Для удобства доказательства следующей теоремы будем считать, что точки z_k попарно различны (общий случай сводится к этому предельным переходом «слияния полюсов», например, как это делалось при доказательстве теоремы 1). Для числа ν точек множества $\mathscr{Z}$ имеем $\nu \leq n+1$. Пусть $R(z)$ — рациональная функция с $R(\infty) = 0$, все полюсы которой лежат на $\mathscr{Z}^*$ и имеют кратность не выше s. Тогда верна

Теорема 7. *Для рациональной функции* (36) *справедливы неравенства* (*обозначение:* $\eta = \|\rho\|_\infty$)

$$\frac{\eta^2}{6r\eta\ln(1+\eta) - (n-1)} \leq \frac{s}{\pi r}\|\rho\|_2^2, \quad \frac{\eta}{\ln(1+\eta)} \leq \frac{6s}{\pi}\|\rho\|_2^2. \tag{40}$$

В частности, при $R(z) \equiv 0$

$$\max_{|\zeta|=r}\frac{|\rho_n(\zeta)|^2}{2r|\rho_n(\zeta)| - (n-1)} \leq \frac{1}{\pi r}\|\rho_n\|_2^2, \quad \|\rho_n\|_\infty \leq \frac{2}{\pi}\|\rho_n\|_2^2. \tag{41}$$

Доказательство. По множеству $\mathscr{Z}$ определим, как в (2), функции B и μ. При $|\zeta| = r$ с учетом (2) и (37) имеем

$$\mu(\zeta) \leq 1 + \mathrm{Re}(2\zeta\rho_n(\zeta)) - n, \quad \mu(\zeta) \leq 6r\eta\ln(1+\eta) - n + 1, \tag{42}$$

откуда, учитывая (4), при соответствующем выборе φ (как в п. 3.1.1) получаем

$$\frac{\eta^2}{6r\eta\ln(1+\eta) - n + 1} \leq \sum_{k=1}^{2ns}\frac{|\rho(\zeta_k)|^2}{\mu(\zeta_k)} = \frac{s}{\pi r}\|\rho\|_2^2, \quad \frac{\eta}{\ln(1+\eta)} \leq \frac{6s}{\pi}\|\rho\|_2^2.$$

Если $R(z) \equiv 0$, то можно воспользоваться (4) с $s = 1$ и первым неравенством в (42). Тогда при соответствующем выборе φ и $\zeta_k = \zeta_k(1, \varphi)$ получается (41). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ровба Е. А.* Квадратурные формулы интерполяционно-рационального типа // Докл. АН Беларуси. 1996. Т. 40, № 3. С. 42–46.
2. *Min G.* Lobatto-type quadrature formula in rational spaces // J. Comput. Appl. Math. 1998. V. 94. P. 1–12.
3. *Ровба Е. А., Смотрицкий К. А.* Рациональное интерполирование в нулях синус-дробей Чебышева — Маркова // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 5. С. 11–15.
4. *Ровба Е. А.* Интерполяционные рациональные операторы типа Фейера и Валле-Пуссена // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 3. С. 114–121.
5. *Ровба Е. А., Дирвук Е. В.* Рациональная квази-интерполяция Эрмита — Фейера // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2014. № 3. С. 33–37.

6. *Русак В. Н., Гриб Н. В.* Рациональная интерполяция и квадратурные формулы для периодических функций // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2011. № 2. С. 102–105.

7. *Русак В. Н., Филиппова Н. К.* Квадратурные формулы для несобственных интегралов, точные на рациональных функциях // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2005. № 1. С. 6–10.

8. *Дирвук Е. В., Смотрицкий К. А.* Рациональные квадратурные формулы типа Радо // Изв. НАН Беларуси. Сер. 1. 2014. № 1. С. 87–91.

9. *Осипенко К. Ю.* О наилучших и оптимальных квадратурных формулах на классах ограниченных аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, № 1. С. 79–99.

10. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967.

11. *Старовойтов А. П.* О рациональной интерполяции с фиксированными полюсами // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1983. № 6. С. 105–106.

12. *Ермолаева Л. Б.* Об одной квадратурной формуле // Изв. вузов. Математика. 2000. № 3. С. 25–28.

13. *Данченко В. И.* О сходимости наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 7. С. 53–66.

14. *Jackson D.* Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. V. 39, N 12. P. 889–906.

15. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.

16. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.

17. *Бари Н. К.* Обобщение неравенства А. А. Маркова и С. Н. Бернштейна // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 2. С. 159–176.

18. *Арестов В. В.* О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 4. С. 539–547.

19. *Конягин С. В.* Оценки производных от многочленов // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 5. С. 1116–1118.

20. *Borwein P., Erdélyi T.* Polynomials and polynomial inequalities. New York: Springer-Verl., 1995.

21. *Ибрагимов И. И., Мамедханов Дж. И.* О неравенствах типа С. М. Никольского // Тр. МИАН. 1987. Т. 180. С. 118–119.

22. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.

23. *Данченко В. И., Додонов А. Е.* Оценки L_p-норм наипростейших дробей // Изв. вузов. Математика. 2014. № 6. С. 9–19.

24. *Данченко В. И.* Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 63–80.

25. *Данченко В. И.* О скорости приближения к действительной оси полюсов нормированных логарифмических производных полиномов // Докл. АН. 1993. Т. 330, № 1. С. 15–16.

26. *Протасов В. Ю.* Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта // Изв. РАН. Сер. мат. 2009. Т. 73, № 2. С. 123–140.

27. *Каюмов И. Р.* Интегральные оценки наипростейших дробей // Изв. вузов. Математика. 2012. № 4. С. 33–45.

28. *Каюмов И. Р.* Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 10. С. 87–98.

29. *Каюмов И. Р.* Необходимое условие сходимости наипростейших дробей в L_p // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 1. С. 149–152.

30. *Каюмова А. В.* Сходимость рядов простых дробей в L_p // Уч. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. 2012. Т. 154, № 1. С. 208–213.

31. *Danchenko V. I., Danchenko D. Ya.* Nikolskii type inequalities for simple partial fractions // Комплексный анализ и его приложения: матер. VII Петрозаводск. междунар. конф. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014. С. 33–37.

32. *Тайков Л. В.* О наилучшем приближении ядер Дирихле // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 6. С. 116–121.

33. *Арестов В. В., Дейкалова М. В.* Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной Евклидовой сфере // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 34–47.

34. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Т. 2.
35. *Labelle G.* Concerning polynomials on the unit interval // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 20, N 2. P. 321–326.
36. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

Статья поступила 24 марта 2015 г.

Данченко Владимир Ильич,
Владимирский гос. университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых,
кафедра функционального анализа и его приложений,
ул. Горького, 87, Владимир 600000

Семин Лев Андреевич
Владимирский гос. университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых,
кафедра физики и прикладной математики,
ул. Горького, 87, Владимир 600000
vdanch2012@yandex.ru