Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 517.18

ПОЛИЭЛЕМЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ

Ф. Н. Гарифьянов

Аннотация. Рассматриваются линейные уравнения для функций, аналитических в плоскости с разрезами по «половине» границы четырехугольника. Предложен метод регуляризации, сводящий их к уравнению с суммарным и разностным ядром. Указаны приложения к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.204

Ключевые слова: равносильная регуляризация, задача Карлемана, проблема моментов для целых функций экспоненциального типа.

Введение. Пусть D — четырехугольник с вершинами t_j, $j = \overline{1,4}$, и сторонами l_j, перечисленными в порядке обхода положительно ориентированной границы $\Gamma = \partial D$ (l_1 — отрезок с концами t_1 и t_2). Если D — параллелограмм, то он является фундаментальным множеством некоторой двоякопериодической группы. В [1] рассматривались многоэлементные разностные уравнения, возникающие в этом случае. При этом существенно использовалось известное ядро Карлемана [2]. Обзор работ по данной тематике и подробная библиография приведены в [1].

Возникает естественный вопрос: как обобщить результаты из [1] на случай, когда четырехугольник не является параллелограммом? Какие приложения при этом возникают? Ответам на эти вопросы и посвящена данная статья. Сразу отметим, что использование аналога ядра Карлемана приводит уже не к разностным, как в [1], а к суммарно-разностным уравнениям. Работа состоит из трех разделов. В разд. 1 предложен метод построения аналога ядра Карлемана. В разд. 2 исследуется полиэлементное уравнение для случая, когда D — некоторый четырехугольник, один из углов которого развернутый. В разд. 3 рассматривается другое полиэлементное уравнения в случае, когда D — некоторая равнобедренная трапеция. Следует отметить, что четырехэлементное суммарное уравнение для функций, аналитических вне этой трапеции, изучалось ранее в [3]. Указаны приложения к проблеме моментов для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.).

1. Введем преобразования

$$\sigma_j(z) = t_j + t_{j+1} - z, \quad j = \overline{1,4} \ (t_5 = t_1), \tag{1}$$

которые переводят $\overline{D}$ в четырехугольники, имеющие с исходным общую сторону. Ясно, что $\sigma_j(t) : \bar{l}_j \to \bar{l}_j$ с изменением ориентации, т. е. кусочно линейная функция $\alpha(t) = \{\sigma_j(t), t \in l_j\}$ является на Г обратным сдвигом Карлемана, разрывным в вершинах. Середины сторон τ_j — неподвижные точки сдвига. Пусть

$$A(z,\tau) = (\tau - z)^{-1} + \sum_{j=1}^{8} (\tau - \sigma_j(z))^{-1}. \tag{2}$$

Здесь $\sigma_5(z) = z - t_1 + t_3$, $\sigma_6 = z + t_1 - t_3$, $\sigma_7(z) = z - t_2 + t_4$, $\sigma_8(z) = z + t_2 - t_4$.

Лемма 1. *Ядро*

$$K(t,\tau) = A(t,\tau) - A[\alpha(t),\tau] \tag{3}$$

ограничено на Г.

Доказательство сводится к непосредственному перебору всех возможных вариантов расположения точек τ и t на сторонах четырехугольника (см. ниже, например, конкретные оценки, приведенные в § 2 для одного частного случая в лемме 2). Более того, любая его частная производная (τ, $t \neq t_j$) ограничена на Г, а вершины могут быть только точками разрыва первого рода.

Пусть L — «половина» Г, удовлетворяющая двум условиям:

1) L — кусочно гладкая кривая (или конечная совокупность таких кривых L_k, $\overline{L_k} \cap \overline{L_m} = \varnothing$ при $k \neq m$), причем $t \in L \Rightarrow \alpha(t) \notin L$.

2) $\overline{L} \cup \alpha(\overline{L}) = \partial D$ (с точностью до вершин t_j и узлов L).

Рассмотрим полиэлементное суммарно-разностное уравнение

$$(Vf)(z) \equiv f(z) + \sum_{j=1}^{8} f[\sigma_j(z)] = g(z), \quad z \in D, \tag{4}$$

при следующих предположениях.

1. Решение $f(z)$ ищется в классе функций, голоморфных вне L и исчезающих на бесконечности. В узлах L допускаются логарифмические особенности, причем граничные значения $f^{\pm}(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера на любом компакте $\bar{d} \in L$, не содержащем узлов. Такой класс обозначим через B. По поводу определения класса B более подробно см. введение в [3].

2. Свободный член $g(z)$ голоморфен в D, и его граничное значение $g^+(t)$ принадлежит $H(\Gamma)$.

Будем искать решение уравнения (4) в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L (\tau - z)^{-1} \phi(\tau)\, d\tau \tag{5}$$

с неизвестной плотностью. Пользуясь (5), перепишем (4) в виде

$$(E\phi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_L A(z,\tau)\phi(\tau)\, d\tau = g(z), \quad z \in D. \tag{6}$$

Перейдем в соотношении (6) к пределу по $z \to t \in L$, т. е.

$$(E^+\phi)(t) \equiv 2^{-1}\phi(t) + (E\phi)(t) = g^+(t), \tag{7}$$

где особый интеграл $(E\phi)(t)$ понимается в смысле главного значения по Коши. Устремим в равенстве (6) точку z к точке $\alpha(t)$. Тогда

$$(E^+\phi)(\alpha(t)) \equiv -2^{-1}\phi(t) + (E\phi)(\alpha(t)) = g^+(\alpha(t)). \tag{8}$$

Вычитая из (7) равенство (8), имеем

$$(T\phi)(t) \equiv \phi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L K(t,\tau)\phi(\tau)\, d\tau = g^+(t) - g^+(\alpha(t)). \tag{9}$$

Таким образом, проведена регуляризация полиэлементного уравнения (4).

Теорема 1. *Уравнение* (4) *в классе* B *имеет не более чем конечное число условий разрешимости.*

Замечание 1. Нетривиальность уравнения (4) следует из несвязности множества $C \setminus \sum_{j=1}^{4} \sigma_j(D)$.

Замечание 2. Если при некоторых $j > 4$ имеем $\sigma_j(\overline{L}) \cap \overline{L} = \varnothing$, то можно регуляризовать полиэлементные уравнения, полученные из (4) удалением соответствующих слагаемых в левой части.

Замечание 3. Пусть B_1 — выпуклая оболочка L, т. е. сопряженная индикаторная диаграмма ц.ф.э.т. $F(z)$, ассоциированной по Борелю с нижней функцией $f(z)$ [4, гл. 1, § 1]. Если $D \setminus B_1 \neq \varnothing$, то уравнение (4) равносильно некоторой проблеме моментов для ц.ф.э.т. на нескольких лучах с кусочно экспоненциальным весом (см., например, [1] или § 3). В противном случае возникают неклассические задачи проблемы моментов. Так, в [5] рассмотрена интерполяционная задача о восстановлении ц.ф.э.т. по некоторым соотношениям, связывающим коэффициенты Маклорена нижней функции и моменты Стилтьеса верхней относительно экспоненциального веса.

2. Пусть у D вершины $t_1 = 2^{-1} - i$, $t_2 = 2^{-1}$, $t_3 = 2^{-1} + i$, $t_4 = -2^{-1}$ и $L = \bigcup d_j$, $j = \overline{1,4}$. Здесь d_1 — отрезок с концами τ_1 и t_2; d_2 — отрезок с концами t_2 и τ_2; d_3 — отрезок с концами τ_3, t_4 и d_4 — отрезок с концами t_4, τ_4.

Лемма 2. *Однородное уравнение*

$$T\phi = 0 \tag{10}$$

имеет лишь тривиальное решение.

Доказательство. Введем банахово пространство $\widetilde{C}$ — множество функций $\phi(t) \in C(\overline{d_j})$, $j = \overline{1,4}$, с нормой

$$M = \max|\phi(t)|, \quad t \in \overline{L}. \tag{11}$$

Примем для краткости обозначения $v = \tau + t$, $u = \tau - t$ и

$$b_j(t) = \left|\int\limits_{d_j} \phi(\tau) K(t,\tau)\, d\tau\right|.$$

Оценим модуль интегрального слагаемого в (10). В силу симметрии L и коэффициентов уравнения (4) достаточно рассмотреть всего два случая.

1. Равенство (11) достигается при $t \in d_1 \Rightarrow \alpha(t) = 1 - i - t$, т. е. $K(t,\tau) = (v-i)^{-1} + (u+2i)^{-1} + (u-1)^{-1} - (u+1-2i)^{-1} - (v+3i-1)^{-1} - (v+i-2)^{-1}$.

Возможны четыре подслучая:

а) $\tau \in d_1 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.68$ и $b_1(t) < 0.34M$;
б) $\tau \in d_2 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.48$ и $b_2(t) < 0.24M$;
в) $\tau \in d_3 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.73$ и $b_3(t) < 0.52M$;
г) $\tau \in d_4 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.64$ и $b_4(t) < 0.46M$.

Тогда

$$\sum_{j=1}^{4} b_j(t) < 2\pi M \Rightarrow M = 0 \Rightarrow \phi = 0. \tag{12}$$

2. Равенство (11) достигается при $t \in d_3 \Rightarrow \alpha(t) = i - t$, т. е. $K(t,\tau) = (v-1+i)^{-1} + (u-2i)^{-1} + (u+1)^{-1} - (u+2i-1)^{-1} - (v-3i)^{-1} - (v-i+1)^{-1}$. Возможны четыре подслучая:

а) $\tau \in d_1 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.5$ и $b_1(t) < 0.25M$;

б) $\tau \in d_2 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.62$ и $b_2(t) < 0.31M$;

в) $\tau \in d_3 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 1.1$ и $b_3(t) < 0.8M$;

г) $\tau \in d_4 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 1.1$ и $b_4(t) < 0.8M$.

Оценка (12) также выполнена, и доказательство завершено.

Следствие 1. *Интегральное уравнение* (9) *безусловно разрешимо и имеет единственное решение.*

Осуществим обратный переход от уравнения Фредгольма (9) к полиэлементному уравнению (4). Из (7)–(9) получим $(E\phi)(z) = g(z) + c$, $z \in D$, поскольку задача Карлемана $a^+(t) = a^+(\alpha(t))$, $t \in \Gamma$, в силу принципа локально-конформного склеивания [6] имеет в качестве решения лишь постоянную.

Теорема 2. *Однородное полиэлементное уравнение* $(Vf)(z) = 0$, $z \in D$, *имеет лишь тривиальное решение. Неоднородное полиэлементное уравнение* $(Vf)(z) = c$, $z \in D$ *неразрешимо. Если* $g(z) \not\equiv \mathrm{const}$, *то уравнение* (4) *разрешимо тогда и только тогда, когда* $(E\phi(0)) = g(0)$. *Здесь* $\phi(t) = T^{-1}[g^+(t) - g^+(\alpha(t))]$.

Замечание 4. Если $g(z) \not\equiv \mathrm{const}$, то можно подобрать такую постоянную c_g, что уравнение $(Vf)(z) = g(z) + c_g$, $z \in D$, разрешимо.

Замечание 5. Сопряженной индикаторной диаграммой B_1 верхней функции $F(z)$, ассоциированной по Борелю с нижней функцией $f(z)$, является, вообще говоря, пятиугольник с вершинами $\tau_1, \tau_2, \tau_3, t_4, \tau_4$. Случай, когда сопряженной индикаторной диаграммой является «меньшее» выпуклое множество $B_2 \subset B_1$, мало интересен, поскольку тогда задача переопределена. Соотношение (4) выполняется не только при $z \in D$, но и в окрестности бесконечно удаленной точки. При этом свободный член $g(z)$ должен аналитически продолжаться из D в окрестность бесконечно удаленной точки, причем $g(\infty) = 0$.

3. Пусть D — равнобедренная трапеция с вершинами $t_1 = -2-i$, $t_2 = 2-i$, $t_3 = 1+i$, $t_4 = -1+i$, рассмотренная ранее в [3]. Положим $L = L_1 \cup L_2$, где L_1 — ломаная с вершинами τ_4, t_1, τ_1 и L_2 — ломаная с вершинами τ_2, t_3, τ_3. С учетом замечания 2 рассмотрим семиэлементное суммарно-разностное уравнение

$$(V_1 f)(z) \equiv f(z) + \sum_{j=1}^{4} (-1)^{j+1} f[\sigma_j(z)] - f[\sigma_5(z)] - f[\sigma_6(z)] = g(z), \quad z \in D, \quad (13)$$

где $\sigma_5 = \sigma_1\sigma_2$, $\sigma_6 = \sigma_2\sigma_1$. В силу (5) имеем

$$(13) \Rightarrow (E_1\phi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_L A_1(z,\tau)\phi(\tau)\, d\tau = g(z), \quad z \in D, \quad (14)$$

где $A_1(z,\tau) = (\tau - z)^{-1} + \sum\limits_{j=1}^{6} \lambda_j (\tau - \sigma_j(z))^{-1}$ и $\lambda_j = (-1)^{j+1}$, $j = \overline{1,4}$, $\lambda_5 = \lambda_6 = -1$. Пусть $d_j \in l_j$ — звено ломаной L_1 или L_2. Введем кусочную постоянную $\theta_t = \{1, t \in d_1 \cup d_3; -1, t \in d_2 \cup d_4\}$. Справедливы аналоги формул Сохоцкого —

Племеля $(E_1^+\phi)(t) = 2^{-1}\phi(t) + (E_1\phi)(t)$; $(E_1^+\phi)(\alpha(t)) = -2^{-1}\theta_t\phi(t) + (E_1\phi)(\alpha(t))$, откуда с учетом (14) имеем

$$(T_1\phi)(t) \equiv \phi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L K_1(t,\tau)\phi(\tau)\,d\tau = g^+(t) - \theta_t g^+(\alpha(t)), \tag{15}$$

где $K_1(t,\tau) = A_1(t,\tau) - \theta_t A_1(\alpha(t),\tau)$. Непосредственно проверяется, что это ядро ограничено.

Теорема 3. *Однородное уравнение Фредгольма*

$$T_1\phi = 0 \tag{16}$$

имеет лишь тривиальное решение.

Доказательство. Оценим сверху модуль интегрального слагаемого в (16). Из-за разрывности сдвига в вершинах различаем точки $t_j - 0$ и $t_j + 0$, $j = 1, 3$, лежащие на соседних сторонах. В зависимости от того, на какой стороне достигается (11), возможны четыре случая.

1. $t \in d_1 \Rightarrow \alpha(t) = -2i - t$, $\theta_t = 1$ и $K_1(t,\tau) = (v-2i)^{-1} - (v+3)^{-1} - (u+3+2i)^{-1} - (u-4i)^{-1} + (u-2i+3)^{-1} + (v+3+4i)^{-1}$. Рассмотрим четыре подслучая:

а) $\tau \in d_1 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.98$ и $b_1(t) < 1.96M$;
б) $\tau \in d_2 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 1.691$ и $b_2(t) < 1.91M$;
в) $\tau \in d_3 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.3$ и $b_3(t) < 0.3M$;
г) $\tau \in d_4 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 1.31$ и $b_4(t) < 1.272M$.

В этом случае выполнено соотношение (12).

2. $t \in d_2 \Rightarrow \alpha(t) = 3 - t$, $\theta_t = -1$ и $K_1(t,\tau) = (v-2i)^{-1} - (v+3)^{-1} - (u-2i-3)^{-1} + (u+3-2i)^{-1} - (u+6)^{-1} - (v-2i-6)^{-1}$. При этом

а) $\tau \in d_1 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.79$ и $b_1(t) < 1.78M$;
б) $\tau \in d_2 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.89$ и $b_2(t) < 0.98M$;
в) $\tau \in d_3 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 1.28$ и $b_3(t) < 1.28M$;
г) $\tau \in d_4 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 1.28$ и $b_4(t) < 1.44M$.

Соотношение (12) выполнено и в этом случае.

3. $t \in d_3 \Rightarrow \alpha(t) = 2i - t$, $\theta_t = 1$ и $K_1(t,\tau) = (v+2i)^{-1} - (v-3)^{-1} - (u-2i-3)^{-1} - (u+4i)^{-1} + (u+2i-3)^{-1} + (v-4i-3)^{-1}$. Имеем

а) $\tau \in d_1 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.68$ и $b_1(t) < 1.36M$;
б) $\tau \in d_2 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.9$ и $b_2(t) < 1.1M$;
в) $\tau \in d_3 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.56$ и $b_3(t) < 0.56M$;
г) $\tau \in d_4 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.23$ и $b_4(t) < 0.3M$.

И в этом случае выполнено соотношение (12). Остается последняя возможность.

4. $t \in d_4 \Rightarrow \alpha(t) = -3 - t$, $\theta_t = -1$ и $K_1(t,\tau) = (v+2i)^{-1} - (v-3)^{-1} - (u+2i+3)^{-1} + (u-3+2i)^{-1} - (u-6)^{-1} - (v+6+2i)^{-1}$. При этом

а) $\tau \in d_1 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 1.11$ и $b_1(t) < 2.22M$;
б) $\tau \in d_2 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.98$ и $b_2(t) < 1.12M$;
в) $\tau \in d_3 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.38$ и $b_3(t) < 0.38M$;
г) $\tau \in d_4 \Rightarrow |K(t,\tau)| < 0.93$ и $b_4(t) < 1.08M$.

Соотношение (12) выполнено, что завершает доказательство теоремы.

Итак, интегральное уравнение (15) безусловно разрешимо и (15) $\Rightarrow$ (13), поскольку однородная задача Карлемана $a^+(t) = \theta_t a^+(\alpha(t))$, $t \in \Gamma$, имеет лишь тривиальное решение, что устанавливается сведением ее к задаче Римана в силу принципа локально-конформного склеивания [6].

Теорема 4. *Полиэлементное суммарно-разностное уравнение* (13) *в классе* B *безусловно разрешимо и имеет единственное решение.*

Укажем на приложения уравнения (13) к проблеме моментов для ц.ф.э.т. Пусть B_1 — шестиугольник с вершинами $\tau_4, t_1, \tau_1, \tau_2, t_2, \tau_3$. Множество $D \setminus B_1$ распадается на два треугольника: Δ_1 с вершинами τ_1, t_2, τ_2 и Δ_2 с вершинами τ_3, t_3, τ_4. Возьмем некоторую точку $z_0 \in \Delta_1$. Рассмотрим систему нижних функций

$$\{f_m(z)\} : (Vf_m)(z) = \frac{(z-z_0)^m}{m!}, \quad z \in D. \tag{17}$$

В силу замечания 5 сопряженной индикаторной диаграммой для верхних функций $F_m(z)$, ассоциированных по Борелю с системой функций (17), будет именно B_1. Используя преобразование Бореля и приравнивая коэффициенты Тейлора левой и правой частей равенства (17) в точке z_0, получим

$$\int\limits_h F_m(t)t^k(-1)^k \exp(-z_0 t)\,dt + \sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1}\int\limits_{h_j} F_m(t)t^k \exp[z_0 - t_j - t_{j+1}]\,dt$$
$$- \int\limits_{h_2} F_m(t)(-1)^k t^k \exp[-(z_0+3+2i)t]\,dt$$
$$- \int\limits_{h_0} F_m(t)(-1)^k t^k \exp[-(z_0-3-2i)t]\,dt = \delta_{m,k},$$

где h — луч $\arg t = \operatorname{arctg}(3/2)$, h_m — лучи $\arg t = 2^{-1}\pi(2-m)$, $m = \overline{0,3}$.

Более подробно о приложениях уравнений типа (4) и (13) к проблеме моментов и свойствах получающихся в результате ц.ф.э.т. $F(z)$ см., например, [1, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гарифьянов Ф. Н, Модина С. А.* Ядро Карлемана и его приложения // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1263–1273.
2. *Carleman T.* Sur la theorie des equations integrales et ses applications // Verh. Int. Math. Kongress, Zurich. 1932. Bd I. S. 138–151.
3. *Гарифьянов Ф. Н, Модина С. А.* О четырехэлементном уравнении для функций, аналитических вне трапеции, и его приложениях // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 1243–1249.
4. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1976.
5. *Гарифьянов Ф. Н, Кац Д. Б.* Об одном уравнении с ядром Карлемана и его приложении к проблеме моментов // Уч. зап. Казан. ун-та, сер. физ.-мат. науки. 2012. Т. 154, кн. 3. С. 112–120.
6. *Зверович Э. И.* Метод локально-конформного склеивания // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205, № 4. С. 767–770.

Статья поступила 11 марта 2015 г.

Гарифьянов Фархат Нургаязович
Казанский гос. энергетический университет,
кафедра высшей математики,
ул. Красносельская, 51, Казань 420066
f.garifyanov@mail.ru