Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 515.162+512.816.5+512.544

НИЛЬПОТЕНТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП КОМПАКТНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ SOL–МНОГООБРАЗИЙ

О. В. Брюханов

Аннотация. Приводятся критерии нильпотентной аппроксимируемости и аппроксимируемости конечными p-группами фундаментальных групп компактных трехмерных Sol-многообразий.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.202

Ключевые слова: солвгеометрия, полная группа изометрий, линейное представление, p-аппроксимируемость, нильпотентная аппроксимируемость.

1. Предварительные сведения

Одной из восьми возможных трехмерных модельных геометрий, описанных Терстоном (см. [1, 2]), является солвгеометрия (Sol-геометрия). Пространством трехмерной модельной Sol-геометрии является $X = \mathbb{R}^3$, а Sol-метрика задается

$$ds^2 = e^{-2t}dx^2 + e^{2t}dy^2 + dt^2.$$

По Терстону [2, гл. 3, п. 3.8], связная компонента единицы G_0 полной группы изометрий солвгеометрии состоит из следующих преобразований трехмерного вещественного пространства $\mathbb{R}^3$:

$$(x, y, t) \to (e^{t_0}x + x_0, e^{-t_0}y + y_0, t + t_0). \tag{A}$$

Полная группа изометрий G получается, если к этим преобразованиям добавить три отражения

$$(x, y, t) \to (-x, y, t), \quad (x, y, t) \to (x, -y, t), \quad (x, y, t) \to (y, x, -t). \tag{B}$$

Последние три преобразования порождают группу диэдра $\mathrm{D}(4)$ на восьми элементах. Таким образом, $G_0 = \mathbb{R}^2 \leftthreetimes \mathbb{R}$, $G = G_0 \leftthreetimes \mathrm{D}(4)$, а индекс связной компоненты единицы в полной группе изометрий солвгеометрии равен восьми.

Действие полной группы изометрий G на модельном пространстве $\mathbb{R}^3$ задает его расслоение над прямой (t-осью) с xy-слоями.

Дискретные кокомпактные подгруппы Γ группы изометрий модельной трехмерной Sol-геометрии полициклические и удовлетворяют включениям

$$\mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_M \mathbb{Z} \le \Gamma \le (\mathbb{R}^2 \leftthreetimes \mathbb{R}) \leftthreetimes \mathrm{D}(4),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–92697_ИНД_a (2013–2014)).

где $\mathbb{Z}^2 \rtimes_M \mathbb{Z} = G_0 \cap \Gamma$, $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $|\operatorname{tr} M| > 2$ (см. [2, теорема 4.7.13]). Отметим, что дискретным кокомпактным подгруппам Γ будут изоморфны фундаментальные группы $\pi_1(X/\Gamma)$ соответствующих фактор-пространств X/Γ (компактных трехмерных Sol-многообразий).

Далее подгруппу $G_0 \cap \Gamma \leq \Gamma$ будем обозначать через H.

Изучению различных свойств фундаментальных групп 3-многообразий, а также групп изометрий модельных трехмерных геометрий посвящено большое количество исследований, обзор которых приведен в [3]. Так, в [3] отмечено, что группы изометрий шести из восьми модельных трехмерных геометрий, куда входит и Sol-геометрия, вкладываются в $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, а фундаментальные группы Sol-многообразий как полициклические являются группами целочисленных матриц различной степени. Одним из активно исследуемых вопросов является вопрос о нильпотентной аппроксимируемости и аппроксимируемости конечными p-группами фундаментальных групп 3-многообразий [3–5].

В § 2 показано, что группа изометрий модельной трехмерной Sol-геометрии вкладывается в общую линейную группу $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, а их дискретные кокомпактные подгруппы Γ — в общую линейную группу $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$. На основе полученного представления в § 3 исследуется поведение нижнего центрального ряда фундаментальных групп компактных трехмерных Sol-многообразий и дан критерий их нильпотентной аппроксимируемости, а также критерий p-аппроксимируемости. Отметим, что в [4] найдены критерии нильпотентной аппроксимируемости и p-аппроксимируемости для полупрямых расширений $\mathbb{Z}^n \rtimes_M \mathbb{Z}$, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ и описаны случаи почти p-аппроксимируемости фундаментальных групп трехмерных Sol-многообразий.

2. Линейное представление полной группы изометрий трехмерной Sol-геометрии

Любой гомоморфный образ группы G в общей линейной группе $\mathrm{GL}_n(F)$ при некотором n и поле F называют *линейным представлением группы* G. С теоретической точки зрения наиболее интересны изоморфные линейные представления групп. Полная группа изометрий трехмерной Sol-геометрии имеет следующее естественное изоморфное линейное представление.

Теорема 1. *Полная группа изометрий трехмерной* Sol*-геометрии изоморфна группе порожденной множеством матриц:*

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \quad x, y, t \in \mathbb{R},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Сопоставим каждой тройке вещественных чисел (x, y, t) матрицу $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Данное множество матриц X является группой относительно обычного матричного умножения. Зададим регулярное представление этой группы, т. е. сопоставим каждому элементу $x_0 \in X$ преобразование

$\hat{x}_0$ на множестве X, определенное правилом $\hat{x}_0 : x \to xx_0$. Тогда каждое преобразование (A) из связной компоненты G_0 будет образом некоторой матрицы $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & e^{t_0} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t_0} \end{pmatrix}$ при регулярном представлении этой группы:

$$\begin{aligned}(x,y,t) \rightleftharpoons \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & e^{t_0} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t_0} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & e^{t_0}x + x_0 & e^{-t_0}y + y_0 \\ 0 & e^{t+t_0} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(t+t_0)} \end{pmatrix} \rightleftharpoons (e^{t_0}x + x_0, e^{-t_0}y + y_0, t + t_0).\end{aligned}$$

Так как регулярное представление является изоморфизмом, то $X \simeq G_0$. Обозначим через $[g]$ матрицу из множества X, соответствующую элементу $g \in G_0$ относительно этого изоморфизма. В силу этого изоморфизма $[g_1 g_2] = [g_1][g_2]$ и матрица $[g]$ единичная тогда и только тогда, когда $g = 1$.

Далее прямые вычисления показывают, что преобразования (B) из группы диэдра $D(4)$ задаются сопряжением матриц из множества X матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Например, так задается третье преобразование из (B):

$$\begin{aligned}(x,y,t) \rightleftharpoons \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & y & x \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{pmatrix} \rightleftharpoons (y, x, -t).\end{aligned}$$

Группа, порожденная этими матрицами, также изоморфна группе диэдра $\mathrm{D}(4)$. По построению она гомоморфно отображается на конечную группу линейных преобразований модуля $\mathbb{Z}^3$, содержащую группу диэдра $\mathrm{D}(4)$. Следовательно, данное отображение задает изоморфизм. Обозначим через $[s]$ матрицу из описанной группы, сопряжение которой задает действие соответствующего преобразования $s \in \mathrm{D}(4)$, тогда $[s_1 s_2] = [s_1][s_2]$ и $[g^s] = [s]^{-1}[g][s]$.

Отсюда получаем, что группа, порожденная матрицами из условия теоремы, порождается двумя пересекающимися только по единичной матрице подгруппами, одна из которых изоморфна G_0, а другая изоморфна группе диэдра $\mathrm{D}(4)$ и нормализует первую.

Так как для каждого элемента $g \in G = G_0 \leftthreetimes \mathrm{D}(4)$ однозначно определено разложение $g = sg_0$, $s \in \mathrm{D}(4)$, $g_0 \in G_0$, на группе G можно задать отображение $\varphi : g \to [s][g_0]$. Покажем, что оно является гомоморфизмом:

$$\begin{aligned}\varphi(g_1 g_2) = \varphi(s_1 g_{01} s_2 g_{02}) = \varphi\big(s_1 s_2 g_{01}^{s_2} g_{02}\big) = [s_1 s_2]\big[g_{01}^{s_2} g_{02}\big] \\ = [s_1][s_2]\big[g_{01}^{s_2}\big][g_{02}] = [s_1][s_2][s_2]^{-1}[g_{01}][s_2][g_{02}] = [s_1][g_{01}][s_2][g_{02}] \\ = \varphi(s_1 g_{01})\varphi(s_2 g_{02}) = \varphi(g_1)\varphi(g_2).\end{aligned}$$

Заметим, что произведение матриц $[s][g]$ тривиально только в том случае, когда оба сомножителя являются единичными матрицами. В итоге φ — изоморфизм, а полная группа изометрий Sol-геометрии G изоморфна группе, порожденной матрицами из условия теоремы. $\square$

Обозначим через S_1, S_2, S_3 соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что эти матрицы порождают группу, изоморфную группе диэдра $D(4)$. Через S будем обозначать произвольную матрицу из этой группы, через E_2 — единичную матрицу из $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, а через N — матрицы вида $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. Тогда

$$S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = E_2, \quad S_1S_2 = S_2S_1 = [S_1, S_3] = [S_2, S_3] = -E_2,$$
$$S_1NS_1 = S_2NS_2 = N, \quad S_3NS_3 = N^{-1}.$$

В этих обозначениях матрица $[s][g_0]$, представляющая некоторую Sol-изометрию $g = sg_0$, примет вид $\begin{pmatrix} 1 & v_0 \\ 0 & SN_0 \end{pmatrix}$, где $v_0 \in \mathbb{R}^2$. Обратно, данная матрица задает Sol-изометрию $g = sg_0$ по правилу

$$\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & N \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_0 \\ 0 & SN_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v_0 + vSN_0 \\ 0 & SNSN_0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что Sol-изометрия $g = sg_0$ действует на прямой расслоения тождественно тогда и только тогда, когда $SN_0 = E_2$, и действует на прямой расслоения с кручением тогда и только тогда, когда $(SN_0)^k = E_2$ при некотором $k \in \mathbb{N}$.

Отметим, что если в xy-слоях пространства $\mathbb{R}^3$ перейти к новому базису $v_i' = v_iT$, $i = 1, 2$, $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, то матрицы, представляющие Sol-изометрии, изменятся по правилу

$$\begin{pmatrix} 1 & v_0T^{-1} \\ 0 & TSN_0T^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_0 \\ 0 & SN_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}^{-1}.$$

Для исследования целочисленного линейного представления дискретной кокомпактной подгруппы Γ потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Тогда $(M \pm E_2)^2 = (\operatorname{tr} M \pm 2)M$.*

Доказательство. Характеристическим многочленом для матрицы M будет многочлен $x^2 - \operatorname{tr} M \cdot x + 1$. Поэтому из равенства $M^2 - \operatorname{tr} M \cdot M + E = 0$ получаем $M^2 \pm 2M + E = (\operatorname{tr} M \pm 2)M$, т. е. $(M \pm E_2)^2 = (\operatorname{tr} M \pm 2)M$. $\square$

Теорема 3. *Дискретные кокомпактные подгруппы Γ группы изометрий модельной трехмерной Sol-геометрии G изоморфно представимы целочисленными матрицами из $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, при этом*

$$\Gamma \cap G_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & (\operatorname{tr} M - 2)v \\ 0 & M^i \end{pmatrix} \mid i \in \mathbb{Z},\ v \in \mathbb{Z}^2 \right\rangle,$$

где M — некоторая фиксированная матрица из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ и $\operatorname{tr} M > 2$.

Доказательство. Воспользуемся матричным представлением группы изометрий G модельной трехмерной Sol-геометрии из теоремы 1. Известно [2], что если Γ является дискретной кокомпактной подгруппой полной группы изометрий Sol-геометрии, то $\Gamma \cap G_0 = H \simeq \mathbb{Z}^2 \rtimes_M \mathbb{Z}$. При этом модуль $\mathbb{Z}^2$ порождается некоторым базисом $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ вещественного пространства $\mathbb{R}^2$, в котором нетривиальное линейное преобразование $(x, y) \to (e^{t_0}x, e^{-t_0}y)$, порождающее циклическую группу $\mathbb{Z}$, будет представляться целочисленной матрицей M. Очевидно, что $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ и $\operatorname{tr} M > 2$. Если от стандартного базиса $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ вещественного пространства $\mathbb{R}^3$ перейти к базису $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{e_3}\}$, то группа H станет подгруппой целочисленных матриц из $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ следующего вида:

$$H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & M^i \end{pmatrix} \mid i \in \mathbb{Z},\ v \in \mathbb{Z}^2 \right\rangle$$

(см. [2, теорема 4.7.13]).

Если $\Gamma > H$, то $1 < \Gamma/H \le D(4)$. Выберем в группе Γ по представителю из каждого нетривиального смежного класса по подгруппе H. Этими представителями будут матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & SN \end{pmatrix}$, где $w \in \{w_1, \dots, w_s\} \subset \mathbb{R}^2$, $s < 8$, а матрицы S и N задают действие соответствующих преобразований из группы диэдра $D(4)$ и преобразований $(x, y) \to (e^t x, e^{-t} y)$ в базисе $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{e_3}\}$, относительно которого группа H представляется целочисленными матрицами.

Так как подгруппа H нормальна в Γ, из равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & SN \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & M^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & SN \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -wN^{-1}S^{-1} \\ 0 & N^{-1}S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & M^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & SN \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & vSN + w(E_2 - M^{\pm k}) \\ 0 & M^{\pm k} \end{pmatrix}$$

следует включение $vSN + w(E_2 - M^{\pm k}) \in \mathbb{Z}^2$. При $v = 0$ получаем, что $w(E_2 - M^{\pm k}) \in \mathbb{Z}^2$. Следовательно, $vSN \in \mathbb{Z}^2$ для всех $v \in \mathbb{Z}^2$, т. е. $SN \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Поскольку $w(M - E_2) \in \mathbb{Z}^2$ и $(M - E_2) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$, из включения $w(M - E_2)^2 = (\operatorname{tr} M - 2)wM \in \mathbb{Z}^2$, где равенство выполняется в силу леммы 2, получаем, что $(\operatorname{tr} M - 2)w \in \mathbb{Z}^2$. Если имеющийся базис $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{e_3}\}$ пространства $\mathbb{R}^3$ заменить новым базисом $\left\{\frac{1}{m}\mathbf{v_1}, \frac{1}{m}\mathbf{v_2}, \mathbf{e_3}\right\}$, где $m = \operatorname{tr} M - 2$, то матрицы M и SN не изменятся, целочисленные векторы v останутся целочисленными, а векторы w приобретут целочисленные координаты, ибо в этом случае $T = \frac{1}{m}E_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & SN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}E_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & mv \\ 0 & SN \end{pmatrix}.$$

Таким образом, дискретная кокомпактная подгруппа Γ полной группы изометрий трехмерной Sol-геометрии вкладывается в $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, при этом в новом базисе

$$\Gamma \cap G_0 = H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & (\operatorname{tr} M - 2)v \\ 0 & M^i \end{pmatrix} \mid i \in \mathbb{Z},\ v \in \mathbb{Z}^2 \right\rangle. \quad \square$$

В силу изоморфизма $\Gamma \simeq \pi_1(X/\Gamma)$ теорема 3 устанавливает вложимость фундаментальных групп трехмерных компактных Sol-многообразий в группу целочисленных матриц $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$.

3. Нильпотентная аппроксимируемость

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп. Группу G называют $\mathfrak{X}$-*аппроксимируемой*, если для каждого нетривиального элемента $g \in G$ найдется такая своя нормальная подгруппа $N \lhd G$, что $g \notin N$ и $G/N \in \mathfrak{X}$. Это равносильно тому, что в группе G найдется множество $\mathscr{N}$ нормальных подгрупп $N \lhd G$, $G/N \in \mathfrak{X}$, с тривиальным пересечением $\bigcap\limits_{N \in \mathscr{N}} N$. Если $\mathfrak{X}$ — класс нильпотентных групп, то группу G называют *нильпотентно аппроксимируемой*. Это равносильно тому, что пересечение подгрупп ее нижнего центрального ряда $\bigcap\limits_{r=2}^{\infty} \gamma_r(G)$ тривиально. Здесь $\gamma_r(G) = \langle [g_1, \dots, g_r] \mid g_i \in G \rangle$ — r-й централ группы G, $[g_1, \dots, g_{r+1}] = [[g_1, \dots, g_r], g_{r+1}]$, $[g_1, g_2] = g_1^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2$. Группу G называют *нильпотентной ступени* $\leq r$, если у нее $\gamma_{r+1}(G) = 1$. Если $\mathfrak{X}$ — класс конечных p-групп, то группу G называют *финитно p-аппроксимируемой*. Конечные p-группы нильпотентны, поэтому любая группа, аппроксимируемая конечными p-группами, нильпотентно аппроксимируема. Для краткости здесь такие группы будем называть *p-аппроксимируемыми*, так как все исследуемые группы полициклические, а у них любой периодический фактор G/N конечен.

Прежде чем приступить к исследованию нильпотентной аппроксимируемости фундаментальных групп компактных трехмерных Sol-многообразий, разберем один специальный случай, когда $\Gamma = H = \mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_M \mathbb{Z}$. Критерий нильпотентной аппроксимируемости для групп $\mathbb{Z}^d \leftthreetimes_M \mathbb{Z}$, $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$, приведен в [4]. Так, если $P_M(x)$ — характеристический многочлен матрицы M, то

а) группа $\mathbb{Z}^d \leftthreetimes_M \mathbb{Z}$, $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$, нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $p(1) \neq \pm 1$ для любого неприводимого над $\mathbb{Z}$ многочлена $p(x) | P_M(x)$ [4, следствие 2.7(1)];

б) группа $\mathbb{Z}^d \leftthreetimes_M \mathbb{Z}$, $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$, p-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $p(1) \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$ для любого неприводимого над $\mathbb{Z}$ многочлена $p(x) | P_M(x)$ [4, следствие 2.7(3)].

В случае $\Gamma = H = \mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_M \mathbb{Z}$ имеем $\operatorname{tr} M > 2$, $\det M = 1$ и характеристический многочлен $P_M(x) = x^2 - \operatorname{tr} M \cdot x + 1$ неразложим над $\mathbb{Z}$. Поэтому группа $\Gamma = H = \mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_M \mathbb{Z}$ нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $P_M(1) = 2 - \operatorname{tr} M \neq \pm 1$, т. е. $\operatorname{tr} M \neq 3$, и p-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} M \equiv 2 (\operatorname{mod} p)$. Отметим, что характеристический многочлен $P_M(x) = x^2 - \operatorname{tr} M \cdot x + 1$ неразложим над $\mathbb{Z}$ при $\operatorname{tr} M \neq \pm 2$. В итоге критерий нильпотентной аппроксимируемости Ашенбренера и Фридл из [4] в нашем случае можно переформулировать в виде следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $|\operatorname{tr} M| > 2$. Тогда группа $\mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_M \mathbb{Z}$ нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} M \neq 3$, и p-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} M \equiv 2 (\operatorname{mod} p)$.*

Чтобы ответить на вопрос о нильпотентной аппроксимируемости группы Γ в общем случае, нам потребуются несколько вспомогательных лемм.

Лемма 5. *Матрицы $N = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ обладают следующими свойствами:*

(а) $(\operatorname{tr} N)^2 = \operatorname{tr} N^2 + 2$;

(б) $(\operatorname{tr} S_i N)^2 = \operatorname{tr} N^2 - 2$, *где* $i = 1, 2$.

Доказательство. (а) $\operatorname{tr}^2 N = (e^t + e^{-t})^2 = e^{2t} + 2 e^t e^{-t} + e^{-2t} = \operatorname{tr} N^2 + 2$.
(б) $\operatorname{tr}^2 S_i N = (e^t - e^{-t})^2 = e^{2t} - 2 e^t e^{-t} + e^{-2t} = \operatorname{tr} N^2 - 2$, $i = 1, 2$. $\square$

Из этой леммы получаем, что если N или $S_i N$, $i = 1, 2$, обладает целочисленным следом, то $\operatorname{tr} N^2 + 2$ или $\operatorname{tr} N^2 - 2$ соответственно будет полным квадратом. Отсюда матрица $N \neq E_2$ и матрица $S_i N$, $i = 1, 2$, не могут одновременно обладать целочисленными следами и быть сопряженными с целочисленными матрицами, поскольку в противном случае получаем разность полных квадратов $(\operatorname{tr} N)^2-(\operatorname{tr} S_i N)^2=4$, что может быть только при $(\operatorname{tr} N)^2=4$, $(\operatorname{tr} S_i N)^2=0$, т. е. $N=E_2$.

Далее будем рассматривать группу Γ как группу целочисленных матриц из теоремы 3, где

$$h(u)=\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & E_2\end{pmatrix},\quad h_M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & M\end{pmatrix},\quad g_{SN}=\begin{pmatrix}1 & w\\ 0 & SN\end{pmatrix},$$

$u\in(\operatorname{tr} M-2)\mathbb{Z}^2$, $w(SN)\in\mathbb{Z}^2$.

Лемма 6. *Для любого* $S\in\langle S_1,S_2\rangle\cap\Gamma/H$ *в группе* Γ *найдется матрица* $\begin{pmatrix}1 & w\\ 0 & SN\end{pmatrix}$, *в которой* $N=E_2$ *или* $M^{\frac12}$. *При этом для* S_i, $i=1,2$, *возможен только случай, когда* $N=M^{\frac12}$.

Доказательство. Пусть $S\in\langle S_1,S_2\rangle$, тогда для матрицы $\begin{pmatrix}1 & w\\ 0 & SN\end{pmatrix}\in\Gamma$ имеем включение $\begin{pmatrix}1 & w\\ 0 & SN\end{pmatrix}^2\in H$. Следовательно,

$$(SN)^2=S^2N^2=N^2=M^k$$

при подходящем k. Если $k=2l+\varepsilon$, где $\varepsilon\in\{0,1\}$, то для матрицы

$$\begin{pmatrix}1 & w\\ 0 & SN\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & M^{-l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & w\\ 0 & SNM^{-l}\end{pmatrix}\in\Gamma$$

получим $(SNM^{-l})^2=S^2(NM^{-l})^2=N^2M^{-2l}=M^kM^{-2l}=E_2$ или M. Так как в множестве матриц $\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$ извлечение корней однозначно, то NM^{-l} равно E_2 или $M^{\frac12}$ и, следовательно,

$$\begin{pmatrix}1 & w\\ 0 & SNM^{-l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & w\\ 0 & S\end{pmatrix}\quad\text{или}\quad\begin{pmatrix}1 & w\\ 0 & SM^{\frac12}\end{pmatrix}.$$

Если для S_i, $i=1,2$, нашлась $N=E_2$, то матрица S_i целочисленная. Таким образом, имеем две целочисленные матрицы: матрицу $M\neq E_2$, которая сопряжена с матрицей вида $\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}$, и матрицу S_iM, $i=1,2$. Последнее противоречит замечанию, сделанному после леммы 5. $\square$

Далее исследуем подгруппы, порожденные простыми коммутаторами $[h(u), h_M,\ldots,h_M]$ и $[h(u),g_{SN},\ldots,g_{SN}]$ веса $r=2q+1$, из группы Γ, где

$$H_{2q+1}(SN)=\langle[h(u),h_M,\ldots,h_M],[h(u),g_{SN},\ldots,g_{SN}]\mid u\in(\operatorname{tr} M-2)\mathbb{Z}^2\rangle,$$

$$H_1=\langle h(u)\mid u\in(\operatorname{tr} M-2)\mathbb{Z}^2\rangle.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$[h(u),h_M,\ldots,h_M]=h(u(M-E_2)^{2q}),\quad [h(u),g_{SN},\ldots,g_{SN}]=h(u(SN-E_2)^{2q}).$$

Лемма 7. *Для подматриц M и SN выполнены следующие равенства:*
(а) $(M-E_2)^{2q} = (\operatorname{tr} M - 2)^q M^q$;
(б) $(-M^{\frac{1}{2}} - E_2)^{2q} = (\sqrt{\operatorname{tr} M + 2} + 2)^q M^{\frac{q}{2}}$;
(в) $(SN - E_2)^{2q} = (-2)^q (SN)^q$, *если* $S \notin \langle S_1, S_2\rangle$, $S^2 = -E_2$;
(г) $(SN - E_2)^q = (-2)^{q-1}(SN - E_2)$, *если* $S \notin \langle S_1, S_2\rangle$, $S^2 = E_2$.

Доказательство. (а) Непосредственно следует из леммы 2.

(б) По условию $-M^{\frac{1}{2}} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, следовательно, по лемме 2 для матрицы $-M^{\frac{1}{2}} - E_2$ выполнено равенство

$$(-M^{\frac{1}{2}} - E_2)^2 = (M^{\frac{1}{2}} + E_2)^2 = (2 + \operatorname{tr} M^{\frac{1}{2}}) M^{\frac{1}{2}}.$$

В итоге, используя лемму 5, получаем требуемое равенство

$$(-M^{\frac{1}{2}} - E_2)^{2q} = (\operatorname{tr} M^{\frac{1}{2}} + 2)^q M^{\frac{q}{2}} = (\sqrt{\operatorname{tr} M + 2} + 2)^q M^{\frac{q}{2}}.$$

(в) Если $S \notin \langle S_1, S_2\rangle$, $S^2 = -E_2$, то

$$(SN - E_2)^2 = (SN)^2 - 2SN + E_2 = -E_2 - 2SN + E_2 = -2SN$$

и, следовательно, $(SN - E_2)^{2q} = (-2)^q (SN)^q$.

(г) Если $S \notin \langle S_1, S_2\rangle$, $S^2 = E_2$, то

$$(SN - E_2)^2 = (SN)^2 - 2SN + E_2 = E_2 - 2SN + E_2 = -2(SN - E_2)$$

и, следовательно, $(SN - E_2)^q = (-2)^{q-1}(SN - E_2)$. $\square$

Лемма 8. *Пусть (x, y) — наибольший общий делитель целых чисел x и y. Тогда для подгрупп $H_{2q+1}(SN)$ выполнены следующие включения:*
(а) $H_{2q+1}(SN) = \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)(\sqrt{\operatorname{tr} M + 2} + 2)^q \mathbb{Z}^2\rangle$, *если* $SN = -M^{\frac{1}{2}}$;
(б) $H_{2q+1}(SN) = \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)((\operatorname{tr} M - 2)^q, 2^{2q})\mathbb{Z}^2\rangle$, *если* $SN = -E_2$;
(в) $H_{2q+1}(SN) = \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)((\operatorname{tr} M - 2)^q, 2^q)\mathbb{Z}^2\rangle$, *если* $S \notin \langle S_1, S_2\rangle$, $S^2 = -E_2$;
(г) $H_{2q+1}(SN) \geq \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)((\operatorname{tr} M - 2)^q, 2^{2q-1})\mathbb{Z}^2(SN - E_2)\rangle$, *если* $S \notin \langle S_1, S_2\rangle$, $S^2 = E_2$.

Доказательство. (а) По лемме 7 справедливы равенства

$$\mathbb{Z}^2(M - E_2)^{2q} = (\operatorname{tr} M - 2)^q \mathbb{Z}^2,$$

$$\mathbb{Z}^2(-M^{\frac{1}{2}} - E_2)^{2q} = (\operatorname{tr} M^{\frac{1}{2}} + 2)^q \mathbb{Z}^2 = (2 + \sqrt{\operatorname{tr} M + 2})^q \mathbb{Z}^2.$$

Далее, $(\operatorname{tr} M - 2) = (2 + \sqrt{\operatorname{tr} M + 2})(\sqrt{\operatorname{tr} M + 2} - 2)$. Поэтому

$$\langle [h(u), h_M, \dots, h_M] \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)\mathbb{Z}^2\rangle = \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)^{q+1}\mathbb{Z}^2\rangle,$$

$$\langle [h(u), g_{SN}, \dots, g_{SN}] \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)\mathbb{Z}^2\rangle = \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)(2 + \sqrt{\operatorname{tr} M + 2})^q \mathbb{Z}^2\rangle,$$

$$\langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)^{q+1}\mathbb{Z}^2\rangle < \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)(2 + \sqrt{\operatorname{tr} M + 2})^q \mathbb{Z}^2\rangle.$$

Следовательно, если $SN = -M^{\frac{1}{2}}$, то

$$H_{2q+1}(SN) = \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)(2 + \sqrt{\operatorname{tr} M + 2})^q \mathbb{Z}^2\rangle.$$

(б) Если $SN = -E_2$, то $(SN - E_2)^{2q} = 2^{2q} E_2$ и

$$\langle [h(u), g_{SN}, \dots, g_{SN}] \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)\mathbb{Z}^2\rangle = \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)2^{2q}\mathbb{Z}^2\rangle.$$

Поскольку подмодули $(\operatorname{tr} M-2)2^{2q}\mathbb{Z}^2$ и $(\operatorname{tr} M-2)^{q+1}\mathbb{Z}^2$ порождают подмодуль $(\operatorname{tr} M-2)((\operatorname{tr} M-2)^q, 2^{2q})\mathbb{Z}^2$, то

$$H_{2q+1}(SN) = \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)((\operatorname{tr} M-2)^q, 2^{2q})\mathbb{Z}^2\rangle.$$

(в) Если $S \notin \langle S_1, S_2\rangle$, $S^2 = -E_2$, то по лемме 7(в) $(SN-E_2)^{2q}\mathbb{Z}^2 = 2^q\mathbb{Z}^2$ и

$$\langle [h(u), g_{SN}, \dots, g_{SN}] \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)\mathbb{Z}^2\rangle = \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)2^q\mathbb{Z}^2\rangle.$$

Аналогично п. (б) получаем, что

$$H_{2q+1}(SN) = \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)((\operatorname{tr} M-2)^q, 2^q)\mathbb{Z}^2\rangle.$$

(г) Если $S \notin \langle S_1, S_2\rangle$, $S^2 = E_2$, то по лемме 7(г)

$$(SN-E_2)^{2q}\mathbb{Z}^2 = 2^{2q-1}\mathbb{Z}^2(SN-E_2)$$

и, следовательно,

$$\langle [h(u), g_{SN}, \dots, g_{SN}] \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)\mathbb{Z}^2\rangle = \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)2^{2q-1}\mathbb{Z}^2(SN-E_2)\rangle.$$

Так как группа $\langle [h(u), h_M, \dots, h_M] \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)\mathbb{Z}^2(SN-E_2)\rangle$ является подгруппой группы $\langle [h(u), h_M, \dots, h_M] \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)\mathbb{Z}^2\rangle$, то

$$H_{2q+1}(SN) \geq \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)((\operatorname{tr} M-2)^q, 2^{2q-1})\mathbb{Z}^2(SN-E_2)\rangle. \quad \square$$

Теорема 9. *Пусть* Γ — *дискретная кокомпактная подгруппа группы изометрий* Sol-*геометрии,* $H = \mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_M \mathbb{Z}$.

(а) *Если* $\Gamma = H$, *то она нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда* $\operatorname{tr} M > 3$, *при этом она будет* p-*аппроксимируемой тогда и только тогда, когда* $\operatorname{tr} M \equiv 2 (\operatorname{mod} p)$.

(б) *Если* $\Gamma > H$, *то она нильпотентно аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

(1) $\operatorname{tr} M > 3$ *и* Γ *действует без кручений на прямой расслоения пространства модельной трехмерной* Sol-*геометрии, при этом она аппроксимируется конечными* p-*группами тогда и только тогда, когда* $\operatorname{tr} M \equiv 2(\operatorname{mod} p)$ *и* $\sqrt{\operatorname{tr} M - 2} \in \mathbb{Z}$ *или* $\sqrt{\operatorname{tr} M + 2} \equiv p - 2 (\operatorname{mod} p)$;

(2) $\operatorname{tr} M \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$, *в этом случае она аппроксимируется конечными* 2-*группами.*

Доказательство. (а) По теореме 3 получаем, что $\operatorname{tr} M > 2$. Поэтому утверждение теоремы в случае (а) непосредственно следует из теоремы 4.

(б) Разберем два взаимоисключающих случая:

1) $\operatorname{tr} M \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$,

2) $\operatorname{tr} M \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$.

1. В первом случае числа 2 и $(\operatorname{tr} M-2)$ взаимно просты и, следовательно, $((\operatorname{tr} M-2)^n, 2^l) = 1$.

Рассмотрим все возможные случаи для факторов Γ/H в этом предположении.

Если фактор Γ/H содержит $S \notin \langle S_1, S_2\rangle$, то $S^2 = \pm E_2$ и по лемме 8(в),(г) получаем включения

$$\gamma_{2q}(\Gamma) \geq \gamma_{2q+1}(\Gamma) \geq H_{2q+1}(SN) \geq \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)\mathbb{Z}^2\rangle > 1,$$

или

$$\gamma_{2q}(\Gamma) \geq \gamma_{2q+1}(\Gamma) \geq H_{2q+1}(SN) \geq \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)\mathbb{Z}^2(SN-E_2)\rangle > 1,$$

так как $((\operatorname{tr} M-2),2)=1$ и $SN \neq E_2$. Следовательно,

$$\bigcap_{q=1}^{\infty} \gamma_q(\Gamma) \geq H_{2q+1}(SN) \geq \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)\mathbb{Z}^2\rangle > 1,$$

или

$$\bigcap_{q=1}^{\infty} \gamma_q(\Gamma) \geq H_{2q+1}(SN) \geq \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)\mathbb{Z}^2(SN-E_2)\rangle > 1.$$

Поэтому группа Γ не является нильпотентно аппроксимируемой.

Теперь рассмотрим случаи, когда $\Gamma/H \leq \langle S_1, S_2\rangle$.

Отметим, что если $\Gamma/H \leq \langle S_1, S_2\rangle$, то возможны четыре случая:

$$\Gamma/H = \langle S_1, S_2\rangle, \quad \Gamma/H = \langle S_1\rangle, \quad \Gamma/H = \langle S_2\rangle, \quad \Gamma/H = \langle -E_2\rangle.$$

При этом для каждого нетривиального $S \in \langle S_1, S_2\rangle$, как показано в лемме 6, найдется в $\Gamma\backslash H$ матрица g_{SN}, в которой либо $N=E_2$, либо $N=M^{\frac{1}{2}}$. Разберем все эти случаи.

В случае, когда $\Gamma/H = \langle S_1, S_2\rangle$, по лемме 6 группа Γ содержит матрицы из $\Gamma\backslash H$ с подматрицами $SN \in \{S_1M^{\frac{1}{2}},\ S_2M^{\frac{1}{2}}, -E_2\}$. Тогда при $SN=-E_2$ в силу леммы 8(б) получаем следующие включения:

$$\gamma_{2q}(\Gamma) \geq \gamma_{2q+1}(\Gamma) \geq H_{2q+1}(SN) \geq \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)\mathbb{Z}^2\rangle > 1,$$

так как $((\operatorname{tr} M-2),2)=1$. Следовательно,

$$\bigcap_{q=1}^{\infty} \gamma_q(\Gamma) \geq H_{2q+1}(SN) \geq \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M-2)\mathbb{Z}^2\rangle > 1,$$

и группа Γ не является нильпотентно аппроксимируемой.

Разберем случаи с $\Gamma/H = \langle S_i\rangle$, $i=1,2$. По лемме 6 в этих случаях Γ содержит целочисленную матрицу g_{SN}, $SN = S_iM^{\frac{1}{2}}$, следовательно, выполнены включения $\mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_M \mathbb{Z} < \Gamma \leq \mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_{S_iM^{\frac{1}{2}}} \mathbb{Z}$. Поэтому группа Γ нильпотентно аппроксимируема, когда нильпотентно аппроксимируема группа $\mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_{S_iM^{\frac{1}{2}}} \mathbb{Z}$, и не нильпотентно аппроксимируема, когда группа $\mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_M \mathbb{Z}$ не аппроксимируется нильпотентными группами. Вычислим значения в единице неприводимых над $\mathbb{Z}$ характеристических многочленов матриц M и $S_iM^{\frac{1}{2}}$:

$$P_M(1) = 1^2 - \operatorname{tr} M \cdot 1 + 1 = 2 - \operatorname{tr} M,$$

$$P_{S_iM^{\frac{1}{2}}}(1) = 1^2 - \operatorname{tr} S_iM^{\frac{1}{2}} \cdot 1 - 1 = \pm\sqrt{\operatorname{tr} M - 2}.$$

Так как эти значения равны ± 1 только при $\operatorname{tr} M = 3$ и, являясь целыми числами, обладают одними и теми же простыми делителями по критерию Ашенбреннера и Фридл (см. [4, следствие 2.7(1,3)]), группы $\mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_M \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_{S_iM^{\frac{1}{2}}} \mathbb{Z}$ нильпотентно аппроксимируемы только при $\operatorname{tr} M \neq 3$ и p-аппроксимируемы только для тех p, для которых выполнено сравнение $\operatorname{tr} M - 2 \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$. Следовательно, дискретные кокомпактные группы Γ, у которых $\Gamma/H = \langle S_i\rangle$, $N = M^{\frac{1}{2}}$, $i=1,2$, нильпотентно аппроксимируемы, если $\operatorname{tr} M > 3$, и p-аппроксимируемы, если $\operatorname{tr} M \equiv 2 (\operatorname{mod} p)$.

Разберем оставшийся случай $\Gamma/H = \langle -E_2\rangle$, $SN = -M^{\frac{1}{2}}$. Так как $(\operatorname{tr} M^{\frac{1}{2}})^2$ $= \operatorname{tr} M + 2$ (см. лемме 5), то $\operatorname{tr} M^{\frac{1}{2}} > 2$. Следовательно, $\operatorname{tr}(-M^{\frac{1}{2}}) < -2$, и по теореме 4 получаем нильпотентную аппроксимируемость группы $\mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_{(-M^{\frac{1}{2}})} \mathbb{Z}$. Стало быть, и ее подгруппа Γ нильпотентно аппроксимируема.

Далее, по лемме 8(а) каждый централ $\gamma_{2q+1}(\Gamma)$ содержит подгруппу

$$H_{2q+1}(-M^{\frac{1}{2}}) = \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2)(\sqrt{\operatorname{tr} M + 2} + 2)^q \mathbb{Z}^2 \rangle.$$

Конечные p-группы нильпотентны. Поэтому ядра $\mathrm{Ker}\varphi$ гомоморфизмов φ, отображающих группу Γ на конечные p-группы, содержат соответствующие централы $\gamma_{2q+1}(\Gamma)$, т. е. выполнены включения

$$H_1 \geq H_1 \cap \mathrm{Ker}\varphi \geq \gamma_{2q+1}(\Gamma) \geq H_{2q+1}(-M^{\frac{1}{2}}).$$

Отсюда видно, что в аппроксимирующих факторах $\Gamma/\mathrm{Ker}\varphi$ могут быть гоморфные образы p-групп из $H_1/H_{2q+1}(-M^{\frac{1}{2}}) \cong \mathbb{Z}_n^2$, $n = (\sqrt{\operatorname{tr} M + 2}+2)^q$, только для тех p, для которых $2 + \sqrt{\operatorname{tr} M + 2} \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$. По критерию Ашенбреннера и Фридл группа $\mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_{(-M^{\frac{1}{2}})} \mathbb{Z}$ аппроксимируется конечными p-группами для всех тех p, для которых выполнено сравнение $P_{-M^{\frac{1}{2}}}(1) \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$, т. е. $2 + \sqrt{\operatorname{tr} M + 2} \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$, следовательно, это верно и для ее подгруппы Γ. В итоге в рассматриваемом случае группа Γ аппроксимируется конечными p-группами тогда и только тогда, когда $\sqrt{\operatorname{tr} M + 2} \equiv p - 2 (\operatorname{mod} p)$.

Таким образом, если $\Gamma > H = G_0 \cap \Gamma$ и $(\operatorname{tr} M, 2) = 1$, то дискретная кокомпактная подгруппа Γ полной группы изометрий трехмерной Sol-геометрии нильпотентно аппроксимируема только в тех случаях, когда $\Gamma/H = \langle S_i \rangle$, $i = 1, 2$, или $\Gamma/H = \langle -E_2 \rangle$, везде $N = M^{\frac{1}{2}}$. При этом только в этих случаях Γ не содержит матриц $g_{SN} \in \Gamma \backslash H$, у которых подматрицы SN конечного порядка, т. е. Γ действует без кручения на прямой расслоения пространства модельной трехмерной Sol-геометрии. В отмеченных случаях нильпотентной аппроксимируемости в силу леммы 5 будет целым $\sqrt{\operatorname{tr} M - 2}$ или $\sqrt{\operatorname{tr} M + 2}$ соответственно.

2. Предположим, что trM $\equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$. В этом случае $P_M(1) = \operatorname{tr} M - 2 \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$. Следовательно, по критерию Ашенбреннера и Фридл группа $\Gamma \cap G_0 = \mathbb{Z}^2 \leftthreetimes_M \mathbb{Z}$ нильпотентно аппроксимируема и аппроксимируется конечными 2-группами. Группа $\Gamma \cap G_0$ является автоморфно допустимой подгруппой в Γ, а ее индекс $|\Gamma : \Gamma \cap G_0|$ равен степени двойки. Поэтому любая нормальная подгруппа группы $\Gamma \cap G_0$ индекса, равного степени двойки, является нормальной подгруппой группы Γ индекса также равного степени двойки. Стало быть, вся группа Γ аппроксимируется конечными 2-группами и является нильпотентно аппроксимируемой.

Далее, когда $\Gamma/H = \langle S_i \rangle$, $i = 1, 2$, по критерию Ашенбреннера и Фридл (см. [4, следствие 2.7(3)]), как и в случае нечетного $\operatorname{tr} M$, группа Γ будет p-аппроксимируемой еще для всех простых p, для которых $\operatorname{tr} M \equiv 2 (\operatorname{mod} p)$.

Если $\Gamma/H = \langle -E_2 \rangle$, $N = M^{\frac{1}{2}}$, то аналогично случаю нечетного $\operatorname{tr} M$ получаем p-аппроксимируемость Γ для всех p, для которых выполнено сравнение $\sqrt{\operatorname{tr} M + 2} \equiv p - 2 (\operatorname{mod} p)$.

В оставшихся случаях, когда $\Gamma/H = \langle -E_2 \rangle$, $N = E_2$ или фактор Γ/H содержит $S \notin \langle S_1, S_2 \rangle$, по лемме 8(б),(в),(г) централы $\gamma_{2q+1}(\Gamma)$ содержат подгруппы $H_{2q+1}(SN) = \langle h(u) \mid u \in (\operatorname{tr} M - 2) 2^{r(q)} \mathbb{Z}^2 \rangle$. Поэтому во всех нильпотентных факторах группы Γ нетривиальный образ ее подгруппы H_1 будет 2-группой как фактор 2-группы $H_1/H_{2q+1}(SN)$ при подходящем q. Следовательно, группа Γ не может аппроксимироваться конечными p-группами ни для какого другого простого $p \neq 2$.

Таким образом, как и в случае нечетного следа trM, группа Γ p-аппроксимируема, $p \neq 2$, в тех случаях, когда она действует без кручения на прямой расслоения пространства модельной трехмерной Sol-геометрии. □

В силу изоморфизма $\Gamma \simeq \pi_1(X/\Gamma)$ теорема 9 устанавливает критерий нильпотентной аппроксимируемости для фундаментальных групп трехмерных компактных Sol-многообразий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Апанасов Б. Н.* Геометрия дискретных групп и многообразий. М.: Наука, 1991.

2. *Терстон У.* Трехмерная геометрия и топология. М.: МЦНМО, 2001.

3. *Aschenbrenner M., Friedl S., Wilton H.* 3-Manifold groups // http://arxiv.org/abs/1205.0202v.2. 2012.

4. *Aschenbrenner M., Friedl S.* Residual properties of graph manifold groups // Topology Appl. 2011. V. 158. P. 1179–1191.

5. *Бардаков В. Г., Михайлов Р. В.* Об аппроксимационных свойствах групп зацеплений // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 485–495.

Статья поступила 26 февраля 2015 г.

Брюханов Олег Вадимович
Сибирский университет потребительской кооперации,
кафедра статистики и математики,
пр. К. Маркса, 26, Новосибирск 630087
`bryuoleg@ngs.ru`