Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2016. Том 57, № 2

УДК 512.54

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ИХ ПОРЯДКОМ И ДЛИНОЙ ОДНОГО КЛАССА СОПРЯЖЕННОСТИ

С. С. С. Амири, А. Х. Асбоеи

Аннотация. Исследуется возможность характеризации $S \in \{{}^2D_n(2),\ {}^2D_{n+1}(2)\}$ простыми условиями, когда $2^n + 1 > 5$ — простое число. Кроме того, показывается, что гипотеза Томпсона верна при некотором слабом условии на эти группы.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.201

Ключевые слова: конечная простая группа, длина класса сопряженности, гипотеза Томпсона.

1. Введение

Граф простых чисел конечной группы G, обозначаемый символом $\Gamma(G)$, — это граф, вершины которого — простые делители $|G|$. Простое число p называют *смежным числу* q $(\neq p)$, если G содержит элемент порядка pq.

Символом $\pi(G)$ обозначим множество простых делителей числа $|G|$. Пусть $t(G)$ — число связных компонент графа $\Gamma(G)$ и $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{t(G)}$ — связные компоненты $\Gamma(G)$. Если $2 \in \pi(G)$, то всегда предполагаем, что $2 \in \pi_1$.

Можно выразить $|G|$ в виде произведения целых чисел $m_1, m_2, \dots, m_{t(G)}$, где $\pi(m_i) = \pi_i$ для каждого i. Числа m_i называются *порядковыми компонентами группы* G. В частности, если число m_i нечетно, то называем его *нечетной компонентой* G. Символ $OC(G)$ обозначает множество $\{m_1, m_2, \dots, m_{t(G)}\}$ порядковых компонент группы G, а $T(G)$ — множество связных компонент графа $\Gamma(G)$. Согласно теореме классификации конечных простых групп и [1–3] можно выписать порядковые компоненты конечных простых групп с несвязными графами простых чисел, как это сделано в табл. 1–4 в [4].

Пусть $N(G) = \{n : G$ имеет класс сопряженности размера $n\}$. Согласно гипотезе Томпсона если L — конечная неабелева простая группа, G — конечная группа с тривиальным центром, а $N(G) = N(L)$, то $L \cong G$.

В [5] показано, что проективные специальные линейные группы $A_1(p)$, где p — простое число, распознаваемы порядком и длиной одного класса сопряженности. Как следствие этого результата в [5] показано, что гипотеза Томпсона верна для $A_1(p)$.

Аналогичные характеризации найдены в [6, 7] для спорадических простых групп, простых K_3-групп (конечная простая группа называется *простой* K_n-*группой*, если ее порядок делится в точности на n различных простых чисел) и знакопеременных групп степени p, где p — простое число.

Наш результат выглядит следующим образом: если $p = 2^n + 1 > 5$ — простое число, то группы $S \in \{{}^2D_n(2), {}^2D_{n+1}(2)\}$ определяются с точностью до изоморфизма своим порядком и одной длиной класса сопряженных элементов.

Для целого n будем обозначать r-часть числа n символом $n_r = r^a$ или $r^a \parallel n$; таким образом, $r^a \mid n$, но $r^{a+1} \nmid n$. Если q — простое число, то обозначим символом $S_q(G)$ силовскую q-подгруппу в G, и пусть $\mathrm{Syl}_q(G)$ — множество силовских q-подгрупп группы G. В остальном обозначения и терминология в статье стандартны, и читатель при необходимости может найти их в [8].

2. Предварительные результаты

Определение 2.1. Пусть a и n — целые числа, бóльшие 1. Тогда простое число Жигмонди для числа $a^n - 1$ — это простое число l такое, что $l \mid (a^n - 1)$, но $l \nmid (a^i - 1)$ для $1 \leq i < n$.

Лемма 2.1 [9]. *Если a и n — целые числа, бóльшие 1, то существует простое число Жигмонди для $a^n - 1$, кроме случаев, когда $(a, n) = (2, 6)$ или $n = 2$ и $a = 2^s - 1$ для некоторого натурального числа s.*

Замечание 2.1. Если l — простое число Жигмонди для $a^n - 1$, то по малой теореме Ферма $n \mid (l-1)$. Положим $Z_n(a) = \{l : l$ — простое число Жигмонди для $a^n - 1\}$. Если $r \in Z_n(a)$ и $r \mid a^m - 1$, то $n \mid m$.

Лемма 2.2 [10, замечание 1]. *Уравнение $p^m - q^n = 1$, где p и q — простые числа и $m, n > 1$, имеет единственное решение $3^2 - 2^3 = 1$.*

Лемма 2.3 [11]. *Пусть q — степень простого числа, не имеющего вида $3^r2^s \pm 1$, где $r = 0, 1$ и $s \geq 1$. Пусть также $M = C_n(q)$, где $n = 2^m (m \geq 2)$ и $OC_2 = (q^n + 1)/(2, q + 1)$. Если $x \in \pi_1(M)$, $x^\alpha \mid |M|$ и $x^\alpha - 1 \equiv 0 \bmod OC_2$, то $x^\alpha = q^{2kn}$, где $1 \leq k \leq n/2$.*

Следствие 2.1. *Пусть $S \in \{{}^2D_n(2), {}^2D_{n+1}(2)\}$ и $p = 2^n + 1 > 5$. Если $x \in \pi(S) - \{p\}$ и $x^\alpha - 1 \equiv 0 \bmod p$, то либо $x^\alpha \nmid |S|$, либо $x = 2$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $S \neq^2 D_{n+1}(2)$ или $x \notin Z_{2(n+1)}(2)$. Тогда так как $|S|_x \mid |C_n(2)|_x$ и $OC_2(C_n(2)) = p$, доказательство завершается с помощью леммы 2.3. Пусть $S =^2 D_{n+1}(2)$ и $x \in Z_{2(n+1)}(2)$. Тогда $|S|_x \leq (2^{n+1} + 1)/3 < p$ и потому $x^\alpha > |S|_x$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.4 [12, следствие 3.8]. *Пусть $G =^2 D_n(q)$, где q — степень простого числа. Если $d = \gcd(q^n + 1, 4)$, то $\frac{|^2D_n(q)|d}{(q^n+1)}$, $\frac{|^2D_n(q)|d}{(q-1)(q^{n-1}+1)} \in N(G)$. Далее, $\frac{|^2D_n(q)|d}{(q^n+1)}$, $\frac{|^2D_n(q)|d}{(q-1)(q^{n-1}+1)}$ максимальны в $N(G)$ в силу делимости.*

Лемма 2.5 [4, табл. 1–4]. *Пусть $S \in \{{}^2D_n(2), {}^2D_{n+1}(2)\}$. Если $S =^2 D_n(2)$, то*

$$OC_1(S) = 2^{n(n-1)} \prod_{i=1}^{i=n-1} (2^{2i} - 1), \quad OC_2(S) = 2^n + 1,$$

а если $S =^2 D_{n+1}(2)$, то

$$OC_1(S) = 2^{n(n+1)}(2^{n+1} + 1)(2^{n+1} - 1) \prod_{i=1}^{i=n-1} (2^{2i} - 1), \quad OC_2(S) = 2^n + 1.$$

3. Основные результаты

В силу леммы 2.4 в S имеется один класс сопряженности длины $\frac{|S|}{2^n+1}$. Заметим, что, так как число 2^n+1 простое, n есть степень 2.

Теорема 3.1. *Пусть G — группа. Тогда $G \cong S$, если и только если $|G| = |S|$ и G имеет класс сопряженных элементов длины $\frac{|S|}{2^n+1}$, где $S \in \{^2D_n(2), {}^2D_{n+1}(2)\}$ и $2^n+1 = p > 5$ — простое число.*

Доказательство. Необходимость в теореме легко проверяется. Установим достаточность.

По условию найдется элемент x порядка p в G такой, что $C_G(x) = \langle x \rangle$ и $C_G(x)$ — силовская p-подгруппа в G. По теореме Силова $C_G(y) = \langle y \rangle$ для любого элемента y порядка p в G. Следовательно, $\{p\}$ есть компонента графа простых чисел группы G, и $t(G) \geq 2$. Кроме того, p является максимальным простым делителем $|G|$ и нечетной порядковой компонентой G.

Докажем теорему 3.1 в несколько шагов.

Шаг 1. G имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ такой, что H и G/K — π_1-группы, K/H — неабелева простая группа и H — нильпотентная группа.

Пусть $g \in G$ — элемент порядка p. Тогда $C_G(g) = \langle g \rangle$. Пусть $H = O_{p'}(G)$ (наибольшая нормальная p'-подгруппа в G). Тогда H — нильпотентная группа, потому что g действует на H без неподвижных точек. Пусть K — нормальная подгруппа в G такая, что K/H — минимальная нормальная подгруппа в G/H. Тогда K/H — прямое произведение копий некоторой простой группы. Поскольку $p \mid |K/H|$ и $p^2 \nmid |K/H|$, то K/H — простая группа. Так как $\langle g \rangle$ — силовская p-подгруппа в K, то $G = N_G(\langle g \rangle)K$ в силу аргумента Фраттини и потому $|G/K|$ делит $p-1$.

Если $|K/H| = p$, то по лемме 2.1 найдется простое число $r \in Z_{n-1}(2) \cap \pi(G)$, и потому $|S|_r = |2^{n-1}-1|_r \leq |G|_r$. Поскольку $\pi(G) = \pi(K) \cup \pi(H) = \pi_1(G) \cup \pi_2(G)$, имеем $r \in \pi(H)$. Так как группа H нильпотентна, силовская r-подгруппа нормальна в G. Следовательно, силовская p-подгруппа группы G действует без неподвижных точек на множестве элементов порядка r, тем самым $p \mid |S|_r - 1$. Таким образом, $p \leq |S|_r \leq 2^{n-1} - 1 < p$; противоречие. Поэтому G обладает нормальным рядом $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ таким, что K/H — неабелева простая группа и p — нечетная порядковая компонента в K/H.

Шаг 2. $\pi(H) \subseteq \{2\}$.

Пусть $r \in \pi(H)$. Тогда $r \neq p$, и так как H нильпотетна, то $S_r(H) \trianglelefteq G$, а значит, $S_p(G)$ действует без неподвижных точек на $S_r(H) - \{1\}$. Таким образом, $p \mid |S_r(H)| - 1$. Если $r \neq 2$, то $|S_r(H)| \mid |S|_r$ и следствие 2.1 приводит к противоречию. Таким образом, $r = 2$, что и требовалось.

Согласно теореме классификации конечных простых групп с учетом результатов из табл. 1–4 в [4] K/H является знакопеременной группой, спорадической группой или простой группой лиева типа.

Шаг 3. K/H не является спорадической простой группой.

Предположим, что K/H — спорадическая простая группа. Поскольку одна из компонент нечетного порядка в K/H равна $p = 2^n + 1$, получаем противоречие, рассматривая компоненты нечетного порядка спорадических простых групп.

Шаг 4. K/H не может быть знакопеременной группой Alt_m, где $m \geq 5$.

Если $K/H \cong \mathrm{Alt}_m$ при $m \geq 5$, то поскольку $p \in \pi(K/H)$, имеем $m \geq 2^n + 1$. Таким образом, существует простое число $u \in \pi(\mathrm{Alt}_m) \subseteq \pi(G)$ такое, что $\frac{p-1}{2} <$

$u < p$. Так как $|G| = |S|$, найдется $t \in \{2i, i : 1 < i < n-1\} \cup \{n\}$ такое, что $u \in Z_t(2)$. Но $u > \frac{2^n-1+1}{2} = 2^{n-1}$ и потому $u = 2^{n-1}+1$ или $2^n - 1$. Однако n является степенью 2, стало быть, $3 \mid 2^{n-1}+1$ и 2^n-1. Таким образом, $3 \mid u$. Отсюда следует, что $u = 3$, а значит, $n = 2$; противоречие.

Шаг 5. $K/H \cong S$.

В силу шагов 3 и 4 и теоремы классификации простых конечных групп K/H — простая группа лиева типа такая, что $t(K/H) \geq 2$ и $p \in OC(K/H)$. Таким образом, группа K/H изоморфна одной из групп лиева типа (в следующих ниже классах r — нечетное простое число).

Случай 1. Пусть $t(K/H) = 2$. Тогда $OC_2(K/H) = 2^n + 1$.

1.1. Если $K/H \cong {}^2D_{n'}(q)$, где $n' = 2^u \geq 4$, то $\frac{q^{n'}+1}{(2,q-1)} = 2^n + 1$. Если q нечетно, то $q^{n'} = 2^{n+1}+1$; противоречие с леммой 2.2. Таким образом, $q = 2^t$, и потому $q^{n'} = 2^n$. Но $p \in Z_{2n}(2)$ и $p \in Z_{2n't}(2)$. Таким образом, из замечания 2.1 следует, что $n't = n$. Утверждается, что $t = 1$. В самом деле, иначе $Z_{n-1}(2) \cap \pi(K/H) = \varnothing$. Но в силу леммы 2.1 $Z_{n-1}(2) \neq \varnothing$ и так как $|G| = |S|$, множество $\pi(G)$ содержит простое число $r \in Z_{n-1}(2)$. Поскольку $r \nmid |\mathrm{Out}(K/H)|$ и $G/K \lesssim \mathrm{Out}(K/H)$, получаем, что $r \mid |H|$. Следовательно, шаг 2 показывает, что $r = 2$; противоречие. Таким образом, $t = 1$, а значит, $K/H \cong {}^2D_n(2)$.

Если $K/H \cong B_{n'}(q)$, где $n' = 2^u \geq 4$, то, рассуждая, как выше, имеем $n' = n$ и $q = 2$. Тем самым $K/H \cong C_n(2)$.

Если $K/H \cong C_{n'}(q)$, где $n' = 2^u > 2$, то, рассуждая, как выше, получаем, что $n' = n$ и $q = 2$. Стало быть, $K/H \cong C_n(2)$.

1.2. Если $K/H \cong C_r(3)$ или $B_r(3)$, то $\frac{3^r-1}{2} = 2^{n+1}$. Таким образом, $2^n + 1 = 3^r - 3$; противоречие. Те же рассуждения применимы в случае $K/H \cong D_r(3)$ или $D_{r+1}(3)$.

1.3. Если $K/H \cong C_r(2)$, то $2^r - 1 = 2^n + 1$ и потому $2^r = 2^n + 2$; противоречие. Те же рассуждения применимы для случая $K/H \cong D_r(2)$ или $D_{r+1}(2)$.

1.4. Если $K/H \cong D_r(5)$, где $r \geq 5$, то $(5^r - 1)/4 = (2^n + 1)$. Таким образом, $5^r - 5 = 2^{n+2}$; противоречие.

1.5. Если $K/H \cong {}^2D_{n'}(3)$, где $9 \leq n' = 2^m + 1$ и n' не простое, то $\frac{3^{n'}-1}{2} = 2^{n+1}$ и потому $3^{n'} - 1 = 2^{n+1} + 1$. Таким образом, согласно лемме 2.2 $n + 1 = 3$; противоречие.

1.6. Если $K/H \cong {}^2D_{n'}(2)$, где $n' = 2^m + 1 \geq 5$, то $2^{n'-1} + 1 = 2^n + 1$ и $n' - 1 = n$. Поэтому $K/H \cong {}^2D_{n+1}(2)$, что и требовалось.

1.7. Если $K/H \cong {}^2D_r(3)$, где $5 \leq r \neq 2^m+1$, то $\frac{3^r+1}{4} = 2^n + 1$ и $3^r = 2^{n+2} + 3$; противоречие.

1.8. Если $K/H \cong G_2(q)$, где $2 < q \equiv \varepsilon \bmod 3$ и $\varepsilon = \pm 1$, то $q^2 - \varepsilon q + 1 = 2^n + 1$. Таким образом, $q(q - \varepsilon) = 2^n$, что невозможно. То же рассуждение применимо к случаю $K/H \cong F_4(q)$, где q нечетно.

1.9. Если $K/H \cong {}^2F_4(2)'$, то так как $|{}^2F_4(2)| = 2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$, имеем $2^n + 1 = 13$; противоречие. Аналогично рассматривается случай $K/H \cong {}^2A_3(2)$.

1.10. Пусть $K/H \cong A_{r-1}(q)$, где $(r, q) \neq (3, 2), (3, 4)$. Поскольку $\frac{q^r-1}{(r,q-1)(q-1)} = p$, имеем $p \in Z_r(q)$ и по замечанию 2.1 $r \mid p - 1 = 2^n$. Таким образом, $r = 2$; противоречие. Те же рассуждения применимы к случаю $K/H \cong {}^2A_{r-1}(q)$.

1.11. Пусть $K/H \cong A_r(q)$, где $(q - 1) \mid (r + 1)$. Поскольку $\frac{q^r-1}{(r,q-1)} = p$, $p \in Z_r(q)$ и по замечанию 2.1 $r \mid p - 1 = 2^n$. Таким образом, $r = 2$; противоречие.

Те же рассуждения применимы к случаю, когда $(q+1) \mid (r+1)$, $(r,q) \neq (3,3)$, $(5,2)$ и $K/H \cong^2 A_r(q)$.

1.12. Если $K/H \cong E_6(q)$, где $q = u^\alpha$, то $\frac{q^6+q^3+1}{(3,q-1)} = p$. Таким образом, $p \in Z_6(q)$ и в силу замечания 2.1 $6 \mid p-1 = 2^n$; противоречие. Те же рассуждения применимы, если $K/H \cong^2 E_6(q)$, где $q > 2$.

Случай 2. Пусть $t(K/H) = 3$. Тогда $p = 2^n+1 \in \{OC_2(K/H), OC_3(K/H)\}$.

2.1. Если $K/H \cong A_1(q)$, где $4 \mid q+1$, то $\frac{q-1}{2} = 2^n+1$ или $q = 2^n+1$. Если $q = 2^n+1$, то $q+1 = 2^n+2$, а значит, $4 \nmid q+1$; противоречие. Если $\frac{q-1}{2} = p$, то $q \equiv -1 \bmod 4$. Пусть $q = u^\alpha$, где u — простое число. Тогда $p \in Z_\alpha(u)$ и в силу замечания 2.1 $\alpha \mid p-1 = 2^n$. Поэтому $\alpha = 2^t$, а значит, $q = u^\alpha \equiv 1 \bmod 4$; противоречие.

2.2. Если $K/H \cong A_1(q)$, где $4 \mid q+1$, то $q = 2^n+1$ или $\frac{q+1}{2} = p$.

• Если $q = 2^n+1$, то $q = p$ и потому $|K/H| = p(p^2-1)/2 = 2^n p(2^{n-1}+1)$, а так как $G/K \lesssim \mathrm{Out}(K/H) \cong Z_2$, получаем, что $Z_n(2) \subseteq \pi(H)$; противоречие с шагом 2.

• Если $\frac{q+1}{2} = p$, то $q = 2^{n-1}+1$. Таким образом, $3 \mid q$ и $3^\alpha = 2^{n+1}+1$; противоречие с леммой 2.2.

2.3. Если $K/H \cong A_1(q)$, где $q > 2$ и q четно, то $p \in \{q-1, q+1\}$. Если $q-1 = 2^n+1$, то $q = 2(2^{n-1}+1)$; противоречие. Если $q+1 = 2^n+1$, то $q = 2^n$ и $|K/H| = 2^n(2^n-1)(2^n+1)$. Но $G/K \lesssim \mathrm{Out}(K/H) \cong Z_n$, а значит, $Z_{n-1}(2) \subseteq \pi(H)$; противоречие с шагом 2.

2.4. Если $K/H \cong^2 A_5(2)$ или $A_2(2)$, то $|K/H| = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 11$ или $8 \cdot 3 \cdot 7$. Ясно, что $2^n+1 \neq 11$ и $2^n+1 \neq 7$; противоречие.

2.5. Если $K/H \cong^2 D_r(3)$, где $r = 2^t+1 \geq 5$, то $\frac{3^r+1}{4} = 2^n+1$ или $\frac{3^r-1}{2} = 2^n+1$. Если $\frac{3^r+1}{4} = 2^n+1$, то $3^r = 2^{n+2}+3$; противоречие. Если $\frac{3^r-1}{2} = 2^n+1$, то $2^{n+1}+1 = 3^{r-1}$; противоречие с леммой 2.2.

2.6. Если $K/H \cong G_2(q)$, где $q \equiv 0 \bmod 3$, то $q^2-q+1 = 2^n+1$ или $q^2+q+1 = 2^n+1$, откуда $q(q \pm 1) = 2^n$, что невозможно.

Аналогично разбирается случай $K/H =^2 G_2(q)$.

2.7. Если $K/H \cong F_4(q)$, где q четно, то $q^4+1 = 2^n+1$ или $q^4-q^2+1 = 2^n+1$. Если $q^4-q^2+1 = 2^n+1$, то $q^2(q^2-1) = 2^n$, что невозможно. Если $q^4+1 = 2^n+1$, то $q^4 = 2^n$ и потому $(q^{12}-1) = (2^{3n}-1) \mid |K/H|$, значит, $Z_{3n}(2) \subseteq \pi(G) = \pi(S)$; противоречие.

2.8. Если $K/H \cong^2 F_4(q)$, где $q = 2^{2t}+1 > 2$, то $q^2+\sqrt{2q^3}+q+\sqrt{2q}+1 = 2^n+1$ или $q^2-\sqrt{2q^3}+q-\sqrt{2q}+1 = 2^n+1$. Таким образом, $2^n+1 = 2^{2(2t+1)}+\varepsilon 2^{3t+2}+2^{2t+2}+\varepsilon 2^{t+1}+1$, где $\varepsilon = \pm 1$, и потому $2^n = 2^{t+1}(2^{3t+1}+\varepsilon 2^{2t+1}+2^t+\varepsilon)$; противоречие.

2.9. Если $K/H \cong E_7(2)$, то $2^n+1 \in \{73, 127\}$, что невозможно.

2.10. Если $K/H \cong E_7(3)$, то $2^n+1 \in \{757, 1093\}$, что невозможно.

Случай 3. Пусть $t(K/H) = \{4,5\}$. Тогда $p = 2^n+1 \in \{OC_2(K/H)$ $OC_3(K/H), OC_4(K/H), OC_5(K/H)\}$.

3.1. Если $K/H \cong A_2(4)$ или ${}^2E_6(2)$, то $2^n+1 = 7$ или $2^n+1 = 19$, что невозможно.

3.2. Если $K/H \cong^2 B_2(q)$, где $q = 2^{2t}+1$ и $t \geq 1$, то $2^n+1 \in \{q-1, q \pm \sqrt{2q}+1\}$. Если $q-1 = 2^n+1$, то $2^{2t}+1 = 2^n+2$, а если $q \pm \sqrt{2q}+1 = 2^n+1$, то $2^{t+1}(2^t \pm 1) = 2^n$, что невозможно.

3.3. Если $K/H \cong E_8(q)$, то $2^n + 1 \in \{q^8 - q^7 + q^5 - q^4 + q^3 - q + 1, q^8 + q^7 - q^5 - q^4 - q^3 + q + 1,\ q^8 - q^6 + q^4 - q^2 + 1, q^8 - q^4 + 1\}$. Таким образом, $q^t = 2^n$, где $t > 1$ — натуральное число такое, что $(t, q) = 1$; противоречие.

Рассмотренные случаи показывают, что $K/H \cong C_n(2)$, ${}^2D_n(2)$, ${}^2D_{n+1}(2)$. Пусть $S = {}^2D_n(2)$. Если $K/H \ncong S$, то $K/H \cong C_n(2)$. Таким образом, $|G|_2 \mid 2^n|S|_2/n$. Но $|K/H|_2 \geq 2^{n^2}$ и потому $|G|_2 \geq 2^{n^2}$; противоречие.

Пусть $S ={}^2 D_{n+1}(2)$. Применяя предыдущее рассуждение, получаем, что $Z_{n+1}(2) \subseteq \pi(K/H) \subseteq \pi(G) = \pi(S)$. Таким образом, $K/H \cong S$.

Теперь так как $|G| = |S|$, то $H = 1$ и $K = G \cong S$. Теорема 3.1 доказана.

Следствие 3.1. *Гипотеза Томпсона верна для простых групп $S \in \{{}^2D_n(2), {}^2D_{n+1}(2)\}$, где $2^n + 1 > 5$ — простое число.*

Доказательство. Пусть G — группа с тривиальным центром и $N(G) = N(S)$. Тогда, как показано в [13, лемма 1.4], $|G| = |S|$. Поэтому следствие вытекает из теоремы 3.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кондратьев А. С., Мазуров В. Д.* Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.
2. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
3. *Iiyori N., Yamaki H.* Prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic // J. Algebra. 1993. V. 155, N 2. P. 335–343.
4. *Chen G. Y.* A new characterization of sporadic simple groups // Algebra Colloq. 1996. V. 3, N 1. P. 49–58.
5. *Chen Y., Chen G. Y.* Recognizing $A_1(p)$ by its order and one special conjugacy class size // J. Inequal. Appl. 2012. doi:10.1186/1029-242X-2012-310.
6. *Li J. B.* Finite groups with special conjugacy class sizes or generalized permutable subgroups: PhD thesis. Chongqing: Southwest Univ., 2012.
7. *Alireza Khalili Asboei, Reza Mohammadyari.* Recognizing alternating groups by their order and one conjugacy class length // J. Algebra. Appl. 2016. V. 15, N 2. P. 1650021. DOI: 10.1142/S0219498816500213.
8. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Clarendon: Oxford, 1985.
9. *Zsigmondy K.* Zür Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3, Heft 1. S. 265–284.
10. *Crescenzo P.* A Diophantine equation which arises in the theory of finite groups // Adv. Math. 1975. V. 17, N 1. P. 25–29.
11. *Khosravi A., Khosravi B.* r-Recognizability of $B_n(q)$ and $C_n(q)$, where $n = 2^m \geq 4$ // J. Pure Appl. Algebra. 2005. V. 199. P. 149–165.
12. *Ahanjideh N., Ahanjideh M.* On the validity of Thompson's conjecture for finite simple groups // Comm. Algebra. 2013. V. 41. P. 4116–4145.
13. *Chen G. Y.* On Thompson's conjecture // J. Algebra. 1996. V. 185, N 1. P. 194–193.

Статья поступила 4 марта 2015 г.

Syyed Sadegh Salehi Amiri (Амири Сайед Садег Салехи)
Department of Mathematics,
Babol Branch, Islamic Azad University, Babol, Iran
salahisss@baboliau.ac.ir

Alireza Khalili Asboei (Асбоеи Алиреза Халили)
Department of Mathematics,
Farhangian University, Shariati Mazandaran, Iran;
Department of Mathematics,
Buinzahra Branch Islamic Azad University, Buinzahra, Iran
khaliliasbo@yahoo.com