Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 514.765

ИНВАРИАНТНЫЕ АФФИНОРНЫЕ И СУБКЭЛЕРОВЫ СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е. С. Корнев, Я. В. Славолюбова

Аннотация. На однородных пространствах G/H рассматриваются инвариантные относительно действия группы G аффинорные метрические структуры и их частный случай — субкэлеровы структуры. Аффинорные метрические структуры являются обобщением почти кэлеровых и почти контактных метрических структур для многообразий произвольной размерности. Рассматриваются инвариантные субримановы и субкэлеровы структуры, связанные с фиксированной 1-формой, имеющей нетривиальный радикал. Помимо результатов для однородных пространств произвольной размерности такие структуры отдельно изучены на однородных пространствах размерности 4 и 5.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.106

Ключевые слова: аффинорные структуры, кэлеровы структуры, субримановы метрики, однородные пространства.

§ 1. Введение

В классическом случае на многообразиях вещественной размерности $2n$ изучают кэлеровы структуры (Ω, J, g), где g — эрмитова метрика, J — ортогональная комплексная структура и Ω — фундаментальная 2-форма метрики g. На многообразиях размерности $2n+1$ исследуют контактные метрические структуры (θ, Φ, g), где θ — контактная форма, Φ — вырожденный оператор, действующий на ядре формы θ как ортогональная почти комплексная структура, и g — риманова метрика, ассоциированная с 1-формой θ. В случае кэлеровой структуры радикал 2-формы Ω равен нулю. В случае контактной метрической структуры радикал 2-формы $d\theta$ одномерный. Мы вводим понятие аффинорной метрической структуры, которое обобщает понятие контактной метрической структуры для многообразий произвольной размерности и 1-форм, имеющих радикал любой размерности. Аффинорная метрическая структура на вещественном многообразии произвольной размерности — это тройка $(\alpha, \mathit{\Phi}, g)$, где α — произвольная 1-форма, $\mathit{\Phi}$ — особый оператор, называемый *аффинором*, и g — риманова метрика, ассоциированная с 1-формой α. В случае аффинорной метрической структуры 2-форма $d\alpha$ может иметь радикал любой размерности. Кроме того, аффинорная метрическая структура всегда определяет естественную субриманову и субкэлерову структуры на многообразиях произвольной размерности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 12–01–00873–а) и Совета по грантам президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ–4382.2014.1).

Понятие аффинорной структуры естественным образом возникает при рассмотрении расслоения P над многообразием вещественной размерности $2n$ со слоем $S^1 \cong U(1)$. В этом случае форма связности ω является 1-формой на P со значениями в $\mathbb{R}$, а форма кривизны связности Ω равна $d\omega$. Кэлерова структура на комплексном многообразии в случае, когда фундаментальная 2-форма точна, также является частным случаем аффинорной метрической структуры. В частности, это выполняется на любом симплектическом многообразии $M : H^2(M;\mathbb{R}) = 0$. Аффинорная метрическая структура также возникает на многообразии вещественной размерности $2n+2$, в котором содержится симплектическое подмногообразие, а симплектическая форма точная (см. § 3, пример 3). Контактные и почти контактные метрические структуры на многообразиях нечетной размерности также служат примерами аффинорных метрических структур.

В общем случае 1-форма на произвольном многообразии M может обращаться в нуль в некоторых точках многообразия M. Однако, когда M есть однородное пространство G/H, любая G-инвариантная 1-форма на M либо отлична от нуля во всех точках из M, либо тождественно равна нулю на M. Поэтому мы рассматриваем аффинорные метрические структуры и порождаемые ими субкэлеровы структуры на однородных пространствах. Поскольку существует естественная связь между G-инвариантными аффинорными метрическими структурами на однородных пространствах и левоинвариантными аффинорными метрическими структурами на группах Ли, можем использовать многие результаты, изложенные в [1, 2]. Когда многообразие имеет нечетную размерность $2n+1$, часто аффинорные метрические структуры называют *почти контактными метрическими структурами.* Строгие аффинорные метрические структуры (см. § 4) на трехмерных однородных пространствах классифицированы в [3]. Поэтому следующим шагом в изучении аффинорных метрических структур на однородных пространствах являются случаи размерности 4 и 5.

В § 2 рассмотрим свойства G-инвариантных 1-форм и радикала таких форм. В § 3, 4 вводим и исследуем аффинорные метрические структуры и порождаемые ими субкэлеровы структуры на однородных пространствах произвольной размерности. В § 5, 6 даны результаты для однородных пространств размерностей 4 и 5.

§ 2. Радикал инвариантных 1-форм

Пусть (M, g) — однородное риманово пространство вещественной размерности $n \geq 3$, G — группа изометрий метрики g, действующая на M транзитивно и эффективно, o — фиксированная точка в M и H — подгруппа изотропии точки o. Будем считать, что задано разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus h : \mathfrak{p} \cong T_oM$, где $\mathfrak{p}$ — Ad_H-инвариантное ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ относительно некоторой левоинвариантной римановой метрики на группе G. Будем отождествлять однородное пространство M с множеством левых классов смежности по подгруппе H. При таком отождествлении задана каноническая проекция $\pi : G \to M$ и $\mathfrak{h} \subseteq \ker d\pi_e$, где e — единица группы G. Обозначим через $\tau : \mathfrak{p} \to T_oM$ изоморфизм, полученный ограничением $d\pi_e$ на подпространство $\mathfrak{p}$.

Определение 2.1. *Радикалом полилинейной p-формы Ω, $p \geq 2$,* в точке $x \in M$ называется касательное подпространство $\mathrm{rad}\,\Omega_x = \{X \in T_xM : \mathrm{I}_X\,\Omega_x = 0\}$, где $\mathrm{I}_X\,\Omega$ — $(p-1)$-форма, полученная из Ω фиксацией первого векторного аргумента. Если размерность подпространств $\mathrm{rad}\,\Omega_x$ не зависит от точки x, то форма Ω называется *регулярной*, а распределение касательных подпространств $\operatorname{rad}\Omega = \bigcup_{x\in M} \operatorname{rad}\Omega_x$ называется *радикалом регулярной формы* Ω на M.

Полилинейная p-форма Ω на однородном пространстве M называется *G-инвариантной*, если $\Omega_x = \Omega_o \circ dg^{-1}$, $g \in G : g(o) = x$. Ниже покажем, что G-инвариантная полилинейная форма всегда регулярна, т. е. ее радикал является регулярным распределением на M. Если Ω — G-инвариантная полилинейная p-форма и $\widehat{\Omega} = \Omega \circ \tau$, то $\operatorname{rad}\widehat{\Omega} = \tau^{-1}\operatorname{rad}\Omega \oplus \mathfrak{h}$. Будем называть левоинвариантную полилинейную p-форму $\widehat{\Omega}$ на группе Ли G *изотропно вырожденной*, если $\mathfrak{h} \subset \operatorname{rad}\widehat{\Omega}$. Обобщая известные для римановых метрик результаты (см. [2, 4]), получаем следующую теорему.

Теорема 2.2. *Для любого натурального числа p множество G-инвариантных полилинейных p-форм на однородном пространстве $M = G/H$ и множество G-левоинвариантных H-правоинвариантных изотропно вырожденных полилинейных p-форм на группе Ли G находятся во взаимно однозначном соответствии.*

По теореме 2.2 G-инвариантная риманова метрика g на однородном пространстве $M = G/H$ порождает G-левоинвариантную H-правоинвариантную симметричную 2-форму β на группе G такую, что $\operatorname{rad}\beta = \mathfrak{h}$, а ограничение β на $\mathfrak{p}$ есть Ad_H-инвариантное скалярное произведение. Для однородного риманова пространства G/H существует представление подгруппы изотропии в матричной группе $\mathrm{SO}(n)$ (см. [4]).

Пусть α — G-инвариантная 1-форма на однородном римановом пространстве M. Тогда на группе G заданы 1-форма $\hat{\alpha} = \alpha \circ d\pi$ и внешняя 2-форма $d\hat{\alpha} = d\alpha \circ d\pi$. При этом формы $\hat{\alpha}$ и $d\hat{\alpha}$ изотропно вырожденные.

Определение 2.3. 1-Форма α на многообразии M называется *регулярной*, если ее внешний дифференциал $d\alpha$ является регулярной 2-формой на M. *Радикалом регулярной* 1-*формы* α на многообразии M (обозначается через $\operatorname{rad}\alpha$) называется радикал ее внешнего дифференциала $d\alpha$.

Сразу из определения следует, что если α — замкнутая 1-форма, то $\operatorname{rad}\alpha = TM$. Если α — незамкнутая регулярная 1-форма, то $\operatorname{rad}\hat{\alpha} = \tau^{-1}(\operatorname{rad}\alpha \oplus \mathfrak{h})$. Если однородное риманово пространство M имеет четную размерность и $\operatorname{rad}\hat{\alpha} = \mathfrak{h}$, то $d\alpha$ есть симплектическая структура на M. Если $\Omega : \Omega = d\alpha$ — G-инвариантная точная внешняя 2-форма на M, то для любой G-инвариантной функции f на M имеем $\Omega = d(\alpha + df)$. Так как единственной G-инвариантной функцией на M является функция $f(x) = \mathrm{const}$, 2-форма Ω однозначно определяет G-инвариантную 1-форму α. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 2.4. *Для однородного риманова пространства $M = G/H$ размерности $2n$ существует взаимно однозначное соответствие между множеством G-инвариантных точных симплектических структур на M и множеством G-левоинвариантных H-правоинвариантных* 1*-форм с радикалом, равным $\mathfrak{h}$ на группе G.*

Докажем, что размерность радикала G-инвариантной 1-формы постоянна на римановом однородном пространстве, т. е. G-инвариантная 1-форма всегда регулярна.

Лемма 2.5. *Если α — G-инвариантная* 1*-форма на однородном римановом пространстве M, то* $\dim(\operatorname{rad}\alpha_x) = \mathrm{const}$.

Доказательство. Для любой точки $x \in M$ существует изометрия $g \in G$: $g(o) = x$. Для любого $v \in \operatorname{rad}\alpha_x$ существует $w \in T_oM$: $w = dg^{-1}v$. Поскольку $\mathrm{I}_v\, d\alpha_x = 0$ и 2-форма $d\alpha$ G-инвариантна,

$$\mathrm{I}_w\, d\alpha_o = \mathrm{I}_v\, (dg^{-1})^* d\alpha_o = \mathrm{I}_v\, d\alpha_x = 0.$$

Следовательно, $w \in \operatorname{rad}\alpha_o$. Аналогичным образом получаем, что для любого $w \in \operatorname{rad}\alpha_o$ существует $v \in T_xM$: $w = dg^{-1}v$ и $v \in \operatorname{rad}\alpha_x$. Получаем, что $\operatorname{rad}\alpha_o = dg^{-1}\operatorname{rad}\alpha_x$ и $\dim(\operatorname{rad}\alpha_x) = \dim(\operatorname{rad}\alpha_o)$, $x \in M$.

Теорема 2.6. *Пусть $M = G/H$ — однородное риманово пространство размерности $n \geq 3$, α — незамкнутая G-инвариантная 1-форма на M и $r = \operatorname{rank}(\operatorname{rad}\alpha)$.*

(1) *Если n четно, то r также четно и $0 \leq r \leq n-2$.*

(2) *Если n нечетно, то r также нечетно и $1 \leq r \leq n-2$.*

Доказательство теоремы 2.6 приведено в [1]. Заметим, что на однородных пространствах размерности 2 любая G-инвариантная 1-форма либо замкнута, либо имеет нулевой радикал. В частности, на сфере S^2 существует только тривиальная инвариантная 1-форма. Важным следствием этой теоремы является следующий факт.

Следствие 2.7. *Пусть α — незамкнутая G-инвариантная 1-форма на однородном римановом пространстве M произвольной размерности $n \geq 3$. Тогда ортогональное дополнение к радикалу 1-формы α всегда имеет четную размерность.*

Пусть α — незамкнутая G-инвариантная 1-форма на однородном римановом пространстве M, а $\hat{\alpha}$ — соответствующая изотропно вырожденная G-левоинвариантная H-правоинвариантная 1-форма на группе G. В [1] доказано, что $\operatorname{rad}\hat{\alpha}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{r}$ эту подалгебру, а через R — подгруппу $\exp(\mathfrak{r})$. Имеем следующие включения: $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{r}$, $H \subseteq R$. Подгруппа R называется *подгруппой радикала.* В [1] доказано, что подгруппа радикала является замкнутой связной подгруппой и $\mathrm{Ad}_R^*\,\hat{\alpha} = \hat{\alpha}$, т. е. 1-форма $\hat{\alpha}$ Ad_R-инвариантна. Из теоремы 2.6 следует, что на нечетномерном однородном римановом многообразии 1-форма α всегда имеет нетривиальный радикал и подгруппа изотропии H является собственной подгруппой подгруппы радикала R. Также получаем способ построения однородных симплектических пространств. Если на связной группе Ли G существует левоинвариантная 1-форма с нетривиальной подгруппой радикала R, то однородное пространство G/R имеет четную размерность и допускает точную симплектическую структуру. Здесь считаем, что подгруппа R действует на группу G умножением справа. Теперь получаем следующий результат.

Теорема 2.8. *Пусть $M = G/H$ — однородное риманово пространство размерности $2n$ и подгруппа изотропии H является максимальной связной собственной подгруппой в G. Тогда любая G-инвариантная 1-форма на M либо замкнута, либо ее внешний дифференциал задает на M точную симплектическую структуру.*

Пусть $e(M)$ — класс Эйлера многообразия M. В [5] доказано, что если на многообразии M существует векторное поле, отличное от нуля в каждой точке, то $e(M) \equiv 0$. Риманова метрика g на однородном пространстве M сопоставляет каждому векторному полю X на M 1-форму $\mathrm{I}_X\, g$. Обратно, по теореме Рисса (см. [6]) для любой 1-формы α на M существует единственное векторное поле $X : \alpha = \mathrm{I}_X\, g$. Получаем взаимно однозначное соответствие между векторными полями и 1-формами на однородном римановом пространстве M. Получаем, что если $e(M) \not\equiv 0$, то любая G-инвариантная 1-форма α обращается в 0 в некоторой точке $x_0 \in M$. Но тогда существует $g \in G : g^{-1}(x_0) = o$ и $\alpha_o = \alpha_{x_0} \circ dg = 0$. Следовательно, $\alpha_x = 0$ для любого $x \in M$. Получаем следующее достаточное условие отсутствия на однородном римановом пространстве G-инвариантных 1-форм.

Теорема 2.9. *На однородном римановом пространстве $M = G/H$ с ненулевым классом Эйлера не существует нетривиальных G-инвариантных 1-форм.*

Поскольку на компактном замкнутом многообразии с положительной эйлеровой характеристикой любое векторное поле обращается в 0 в некоторой точке и риманова метрика задает отождествление между векторными полями и 1-формами, получаем следующий результат.

Теорема 2.10. *Пусть $M = G/H$ — компактное однородное риманово пространство и $\chi(M)$ — эйлерова характеристика многообразия M. Если $\chi(M) > 0$, то на M не существует G-инвариантных ненулевых 1-форм.*

Так как четномерная сфера S^{2n} является однородным римановым пространством и имеет строго положительную эйлерову характеристику при любом n, получаем

Следствие 2.11. *На сфере $S^{2n} = \mathrm{SO}(2n+1)/\mathrm{SO}(2n)$ не существует $\mathrm{SO}(2n+1)$-инвариантных 1-форм.*

Теорема 2.12. *Пусть $M = G/H$ — однородное риманово пространство, $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{p}$ — Ad_H-инвариантное ортогональное дополнение к подалгебре изотропии $\mathfrak{h}$, и Ad_H неприводимо действует на $\mathfrak{p}$. Тогда на M не существует G-инвариантных 1-форм с нетривиальным радикалом.*

Доказательство. Пусть α — G-инвариантная 1-форма на M и $\hat\alpha$ — соответствующая ей G-левоинвариантная H-правоинвариантная 1-форма на группе G. Пусть E — прообраз $\operatorname{rad}\alpha$ в $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r} = \operatorname{rad}\hat\alpha$ и R — подгруппа радикала 1-формы $\hat\alpha$. Поскольку $\mathfrak{r}$ есть подалгебра в $\mathfrak{g}$ и $H \subseteq R$, то $\mathrm{Ad}_H\,\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{r}$. Так как $E \subset \mathfrak{p}$, то $\mathrm{Ad}_H\, E \subset \mathfrak{p}$. В силу того, что $E = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{p}$, получаем

$$\mathrm{Ad}_H\, E \subseteq \mathfrak{r} \cap \mathfrak{p} = E.$$

Таким образом, E — собственное Ad_H-инвариантное подпространство в $\mathfrak{p}$. Поскольку Ad_H действует на $\mathfrak{p}$ неприводимо, либо $E = \{0\}$, либо $E = \mathfrak{p}$.

Замечание 2.13. Если однородное пространство M имеет размерность $2n+1$ и удовлетворяет условиям теоремы 2.12, то в силу п. (2) теоремы 2.6 на M не существует незамкнутых G-инвариантных 1-форм.

§ 3. Инвариантные аффинорные метрические структуры

Пусть M — однородное риманово пространство размерности $n \geq 3$ с римановой метрикой g, G — группа изометрий, действующая на M транзитивно и эффективно, H — подгруппа изотропии точки o и α — незамкнутая G-инвариантная 1-форма на M. Обозначим через D ортогональное дополнение к $\operatorname{rad}\alpha$ относительно метрики g. В силу следствия 2.7 D является векторным расслоением четного ранга на M. Будем называть это векторное расслоение *рабочим расслоением.* Легко проверить, что распределения $\operatorname{rad}\alpha$ и D G-инвариантны. Ограничение $d\alpha$ на рабочее расслоение D является невырожденной внешней 2-формой.

Определение 3.1. *Аффинором, ассоциированным с 1-формой α*, называется непрерывное поле Φ эндоморфизмов касательных пространств на M такое, что

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) \quad \text{для любых } X, Y \in C^{\infty}(D),$$
$$d\alpha(X, Y) = g(\Phi X, Y) \quad \text{для любых } X, Y \in C^{\infty}(TM).$$

Сразу из определения вытекают следующие свойства аффинора Φ:
(1) $\operatorname{rad}\alpha = \ker\Phi$;
(2) $\Phi^2|_D = -\operatorname{id}$;
(3) $\Phi^* d\alpha = d\alpha$;
(4) $g(X, Y) = d\alpha(X, \Phi Y)$ для любых $X, Y \in C^{\infty}(D)$;
(5) если $x = g(o)$, то $\Phi_x = dg \circ \Phi_o \circ dg^{-1}$.

Аффинорной метрической структурой на многообразии M называется тройка (α, Φ, g), где α — регулярная 1-форма на M с нетривиальным радикалом, g — риманова метрика на M и Φ — аффинор, ассоциированный с 1-формой α. Будем обозначать через $d\alpha_{\Phi}$ ограничение симметричной 2-формы $d\alpha(X, \Phi Y)$ на рабочее расслоение D. В общем случае рабочее расслоение D может быть как голономным, так и неголономным распределением на M. Когда рабочее расслоение D вполне неголономно, из свойства (4) следует, что пара $(D, d\alpha_{\Phi})$ задает субриманову структуру на M. Такая субриманова структура называется *аффинорной субримановой структурой.* Следующий результат дает условие неголономности распределения D.

Теорема 3.2. *Если α — G-инвариантная 1-форма с нетривиальным радикалом на однородном римановом пространстве $M = G/H$, D — рабочее расслоение на M и $D \subseteq \ker\alpha$, то распределение D неголономное.*

Доказательство. Используя инвариантное определение внешнего дифференциала 1-формы (см. [7]), для любых векторных полей $X, Y \in C^{\infty}(D)$ имеем

$$d\alpha(X, Y) = \frac{1}{2}\left(X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])\right) = -\frac{1}{2}\,\alpha([X, Y]),$$

где $[X, Y]$ — скобка Ли векторных полей X и Y. Поскольку внешняя 2-форма $d\alpha$ невырождена на D, существуют векторные поля $X', Y' \in D : [X', Y'] \notin \ker\alpha$. Следовательно, $[X', Y'] \notin D$, и распределение D не инволютивно. По теореме Фробениуса получаем, что D является неголономным распределением на M.

Примером однородного пространства, на котором существует аффинорная метрическая структура с голономным рабочим расслоением, является следующее пространство.

Пример 1. Пусть $M = G \times T^n$, где G — симплектическая группа Ли, T^n — n-мерный плоский тор. Пусть Ω — левоинвариантная точная симплектическая структура на G. Тогда на G существует левоинвариантная 1-форма $\alpha : d\alpha = \Omega$. Продолжим 1-форму α на T^n, считая $\alpha(X) = 0$ для любого векторного поля X на T^n. Получаем $\operatorname{rad}\alpha = T(T^n)$. Пусть J — левоинвариантная почти комплексная структура на группе $G: J^*\Omega = \Omega$, сохраняющая ориентацию на G, и g_0 — стандартная евклидова метрика на торе T^n. Зададим на M риманову метрику g следующим образом:

$$g(X,Y) = \begin{cases} 0 & \text{при } X \in \mathfrak{g},\ Y \in T(T^n), \\ \Omega(X, JY) & \text{при } X \in \mathfrak{g},\ Y \in \mathfrak{g}, \\ g_0(X,Y) & \text{при } X \in T(T^n),\ Y \in T(T^n), \end{cases}$$

где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы Ли G. Очевидно, что поле эндоморфизмов $\varPhi$:

$$\varPhi X = \begin{cases} JX & \text{при } X \in \mathfrak{g}, \\ 0 & \text{при } X \in T(T^n), \end{cases}$$

есть аффинор, ассоциированный с 1-формой α. Получаем левоинвариантную аффинорную метрическую структуру $(\alpha, \varPhi, g)$ на M с рабочим расслоением $D = (\mathfrak{g}, 0)$. Таким образом, распределение D голономно.

Приведем еще примеры естественных аффинорных метрических структур на однородных пространствах.

Пример 2. Пусть $M = G/H$ — однородное риманово пространство размерности $2n+1$ с римановой метрикой g. Любая G-инвариантная 1-форма α вместе с аффинором $\varPhi$ определяет на M почти контактную метрическую структуру $(\alpha, \varPhi, g)$ (см. [3, 8]). В этом случае рабочее расслоение D содержится в $\ker \alpha$ и по теореме 3.2 является неголономным распределением на M. В случае, когда распределение D вполне неголономно (это всегда выполняется для строго контактных метрических структур), $(D, d\alpha_\varPhi)$ есть G-инвариантная аффинорная субриманова структура на M.

Пример 3. Пусть $M = G/H$ — однородное риманово пространство размерности $2n+2$, $H^2(M;\mathbb{R}) = 0$, g — риманова метрика на M и Ω — вырожденная G-инвариантная внешняя 2-форма на M. Пусть Q — максимальное симплектическое подмногообразие в M размерности $2k$. Подмногообразие Q получается действием на начальную точку o некоторой связной подгруппы $K \subset G$. Поскольку $H^2(M;\mathbb{R}) = 0$, на M существует G-инвариантная 1-форма $\alpha : d\alpha = \Omega$ и $d\alpha$ — невырожденная на Q внешняя 2-форма. Далее, $\operatorname{rad}\Omega = \operatorname{rad}\alpha$, $\operatorname{rank}(\operatorname{rad}\alpha) = 2(n-k+1)$ и ограничение рабочего расслоения D на Q равно TQ. Пусть J — комплексная структура на слоях рабочего расслоения $D : J^*\Omega = \Omega$ и J сохраняет ориентацию слоев векторного расслоения D. Тогда поле эндоморфизмов $\varPhi$ касательных пространств на M:

$$\varPhi X = \begin{cases} JX & \text{при } X \in D, \\ 0 & \text{при } X \in \operatorname{rad}\alpha, \end{cases}$$

есть аффинор, ассоциированный с 1-формой α. Получаем G-инвариантную аффинорную метрическую структуру $(\alpha, \varPhi, g)$ на M. Поскольку ограничение $\varPhi$ на Q есть почти комплексная структура на Q, то Q — почти кэлерово подмногообразие в M с почти эрмитовой метрикой $d\alpha_\varPhi$. Почти комплексная структура $\varPhi$ на Q определяет комплексную структуру $\widehat{\varPhi} = \tau^{-1} \circ \varPhi_o \circ \tau$ на подпространстве $\mathfrak{k} = \tau^{-1} D_o \subset \mathfrak{p}$. Пусть ad_X — линейный оператор в $\mathfrak{g} : \operatorname{ad}_X Y = [X, Y]$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Если $\operatorname{ad}_{\widehat{\varPhi} X} = \operatorname{ad}_X \circ \widehat{\varPhi}\ X \in \mathfrak{k}$, то почти комплексная структура $\varPhi$ на Q интегрируема (см. [7, гл. 9]) и Q является кэлеровым подмногообразием в M.

Поскольку эйлерова характеристика нечетномерных многообразий всегда равна нулю, из теорем 2.6 и 2.12 вытекает

Следствие 3.3. *Пусть $M = G/H$ — однородное риманово пространство размерности $2n+1$ и Ad_H неприводимо действует на ортогональном дополнении подалгебры изотропии. Тогда на M не существует G-инвариантных аффинорных метрических структур.*

Поскольку n-мерная сфера S^n является редуктивным однородным римановым пространством $\mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)$ и группа $\mathrm{SO}(n)$ действует на ортогональном относительно формы Киллинга — Картана дополнении подалгебры изотропии неприводимо, то получаем следующий результат.

Теорема 3.4. *На n-мерной сфере $S^n, n \geq 2$, не существует $\mathrm{SO}(n+1)$-инвариантных аффинорных метрических структур с нетривиальным радикалом.*

Пусть (α, Φ, g) — G-инвариантная аффинорная метрическая структура на однородном пространстве M. По теореме Рисса (см. [6]) на M существует векторное поле $\xi : \alpha(X) = g(\xi, X)$ для любого векторного поля X на M. Векторное поле ξ называется *характеристическим векторным полем.* Имеем

$$\alpha(\xi) = g(\xi, \xi), \ \alpha(X) = d\alpha(\xi, \Phi X).$$

Лемма 3.5. *Характеристическое векторное поле ξ G-инвариантной аффинорной метрической структуры обладает следующими свойствами.*

(1) *Если $x = g(o), g \in G$, то $dg^{-1}\xi_x = \xi_o$.*

(2) *Векторное поле ξ имеет постоянную длину.*

(3) *Для любого векторного поля X на M*

$$d\alpha(\xi, X) = -\frac{1}{2}\,\alpha([\xi, X]).$$

Доказательство. Свойство (1) вытекает из G-инвариантности 1-формы α и метрики g. Для любой точки $x \in M$ существует изометрия $g \in G : x = g(o)$. Получаем

$$g_x(\xi, \xi) = g_o(dg^{-1}\xi, dg^{-1}\xi) = g_o(\xi, \xi) = \mathrm{const}\,.$$

Таким образом, длина векторного поля ξ не зависит от точки x. Это доказывает свойство (2).

Поскольку $d\alpha(\xi, \xi) = 0$ и $TM = \mathbb{R}\,\xi \oplus \ker\alpha$, свойство (3) достаточно доказать для произвольного векторного поля $X \in \ker\alpha$. В силу свойства (2) $X(\alpha(\xi)) = X(g(\xi, \xi)) = 0$. Тогда

$$d\alpha(\xi, X) = \frac{1}{2}\,(\xi(\alpha(X)) - X(\alpha(\xi)) - \alpha([\xi, X])) = -\frac{1}{2}\,\alpha([\xi, X]).$$

Когда характеристическое векторное поле ξ является киллинговым векторным полем, аффинорная метрическая структура (α, Φ, g) называется *K-аффинорной метрической структурой.* Важные свойства K-аффинорных метрических структур получены в [1]. В общем случае характеристическое векторное поле может не принадлежать радикалу 1-формы α.

Определение 3.6. Аффинорная метрическая структура (α, Φ, g) называется *строгой*, если ее характеристическое векторное поле лежит в $\mathrm{rad}\,\alpha$.

Теорема 3.7. *Пусть $M = G/H$ — однородное риманово пространство и (α, Φ, g) — G-инвариантная аффинорная метрическая структура на M с характеристическим векторным полем ξ. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *(α, Φ, g) — строгая аффинорная метрическая структура.*

(2) *$\mathrm{L}_\xi \alpha = 0$, где L_ξ — производная Ли в направлении векторного поля ξ.*

(3) *ξ является геодезическим векторным полем, т. е. $\nabla_\xi \xi = 0$, где ∇ — связность Леви-Чивиты римановой метрики g.*

Доказательство. Из свойства (2) леммы 3.5 следует, что $\alpha(\xi) = g(\xi, \xi) = \mathrm{const}$. Применяя выражение для производной Ли внешней p-формы в направлении векторного поля X, а именно $\mathrm{L}_X = d\,\mathrm{I}_X + \mathrm{I}_X\, d$ (см. [7, т. 1]), получаем

$$\mathrm{L}_\xi \alpha = d\alpha(\xi) + \mathrm{I}_\xi\, d\alpha = \mathrm{I}_\xi\, d\alpha.$$

Отсюда вытекает эквивалентность (1) и (2).

Пусть ∇ — связность Леви-Чивиты метрики G. Для любых векторных полей X, Y, Z на M имеем

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \tag{3.1}$$

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \tag{3.2}$$

Из равенства (3.2) следует, что $g(\nabla_X \xi, \xi) = 0$ для любого векторного поля X на M. В частности, $g(\nabla_\xi \xi, \xi) = 0$. Используя свойство (3) леммы 3.5, а также равенства (3.1) и (3.2), для любого $X \in \ker \alpha$ получаем

$$\begin{aligned} 0 = g(\nabla_\xi \xi, X) + g(\xi, \nabla_\xi X) = g(\nabla_\xi \xi, X) + g(\xi, \nabla_X \xi) \\ + g(\xi, [\xi, X]) = g(\nabla_\xi \xi, X) + \alpha([\xi, X]) = g(\nabla_\xi \xi, X) - 2\, d\alpha(\xi, X). \end{aligned}$$

Таким образом, $g(\nabla_\xi \xi, Y) = 2\, d\alpha(\xi, Y)$ для любого векторного поля Y на M. Это доказывает эквивалентность (1) и (3).

Эквивалентность (2) и (3) следует из транзитивности последовательности

$$(2) \leftrightarrow (1) \leftrightarrow (3).$$

Замечание 3.8. Если g — фиксированная инвариантная риманова метрика на однородном пространстве M, то по теореме 3.7 классификация всех строгих инвариантных аффинорных метрических структур (α, Φ, g) сводится к классификации геодезических векторных полей на M и комплексных структур на слоях рабочего расслоения D, сохраняющих ограничение 2-формы $d\alpha$ на D и ориентацию слоев рабочего расслоения. Классификация инвариантных римановых метрик на однородном пространстве сводится к разложению ортогонального дополнения подалгебры изотропии $\mathfrak{h}$ в сумму Ad_H-неприводимых компонент (см. [4]).

§ 4. Инвариантные субкэлеровы структуры

Пусть M — однородное риманово пространство размерности $n \geq 3$, g — риманова метрика на M, G — группа изометрий, действующая на M транзитивно и эффективно, и H — подгруппа изотропии начальной точки o. Будем считать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ раскладывается в виде $\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{p}$ — Ad_H-инвариантное ортогональное дополнение подалгебры изотропии $\mathfrak{h}$.

Определение 4.1. *Субкэлеровой структурой* на однородном пространстве M называется четверка (Q, D, J, h), где D — голономное распределение касательных подпространств на M, Q — интегральное подмногообразие в M, проходящее через начальную точку $O : D|_Q = TQ$, h — скалярное произведение на D, а J — комплексная структура на $Q : J^*h = h$ и h есть кэлерова метрика на Q.

Из примера 3 в § 3 следует, что субкэлерову структуру на однородном римановом пространстве можно задать с помощью аффинорной метрической структуры. Однако субкэлерову структуру можно определить и отдельно.

Пример 1. Пусть G — неунимодулярная связная группа Ли размерности $n \geq 3$, $S^1 = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$, $M = G \times S^1$ и Z — левоинвариантное векторное поле на S^1. Положим $[X, Y] = [X, Y]_G$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$, $[X, Z] = \mathrm{tr}[\mathrm{ad}_X]Z$ для любого $X \in \mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{u}$ — унимодулярное ядро в $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{u}$ есть идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует вектор $\xi : \mathrm{tr}[\mathrm{ad}_\xi] = 1$. Поскольку $[\xi, Z] = Z$, векторы ξ и Z порождают двумерную подалгебру D. Групповая операция на M имеет вид

$$(g_1, h_1)\dot{(}g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 \exp(\det[\mathrm{Ad}_{g_1}] \ln(h_2))).$$

Зададим на M левоинвариантную 1-форму α: $\alpha(Z) = 1$, $\alpha(X) = 0$ для любого $X \in \mathfrak{g}$. Имеем

$$d\alpha(\xi, Z) = -\frac{1}{2}\,\alpha([\xi, Z]) = -\frac{1}{2}.$$

Подалгебра D порождает связную подгруппу $Q = \exp(D)$. На D существует единственная сохраняющая ориентацию левоинвариантная комплексная структура $J : J^*d\alpha = d\alpha$. Поскольку любая комплексная структура на двумерной подалгебре является комплексной структурой на соответствующей подгруппе (см. [7, т. 2]), Q — комплексная подгруппа в M. Задав кэлерову метрику h на Q следующим образом:

$$h(X, Y) = d\alpha(X, JY) \quad \text{для любых } X, Y \in D,$$

получим субкэлерову структуру (Q, D, J, h).

Аффинорная метрическая структура (α, Φ, g) на M с рабочим расслоением D называется *субкэлеровой*, если в M существует кэлерово подмногообразие Q, проходящее через начальную точку o, такое, что $D|_Q = TQ$, ограничение аффинора Φ на Q есть комплексная структура на Q и $d\alpha_\Phi$ есть кэлерова метрика на Q. Нашей задачей является выяснить, когда аффинорная метрическая структура на M определяет субкэлерову структуру на M.

Теорема 4.2. *Пусть $M = G/H$ — однородное риманово пространство, $\mathfrak{p}$ — Ad_H-инвариантное дополнение подалгебры изотропии $\mathfrak{h}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и (α, Φ, g) — G-инвариантная аффинорная метрическая структура на M с рабочим расслоением D. Если выполняется одно из условий:*

(1) *$D \subset \ker \alpha$,*

(2) *подпространство $\mathfrak{p}$ не содержит комплексных векторных подпространств,*

(3) *(α, Φ, g) — строгая аффинорная метрическая структура,*

то аффинорная метрическая структура (α, Φ, g) не является субкэлеровой.

Доказательство. Предположим, что в M существует кэлерово подмногообразие Q, проходящее через начальную точку $o : TQ = D|_Q$, ограничение Φ на Q — комплексная структура на Q и ограничение $d\alpha_\Phi$ на Q есть кэлерова метрика. Если выполнено условие (1), то по теореме 3.2 рабочее расслоение D

является неголономным распределением на M. Для любой точки $x \in M$ существует $g \in G : g(o) = x$. Поскольку 1-форма α G-инвариантна и $\operatorname{rad}\alpha_o$ ортогонален $T_oQ = D_o$, то $\operatorname{rad}\alpha_x$ ортогонален $T_xg(Q) = D_x$, т. е. $g(Q)$ — интегральное подмногообразие, проходящее через точку x. Получаем, что распределение D голономно, и приходим к противоречию.

Пусть τ — линейный изоморфизм $\mathfrak{p} \mapsto T_oM$. Поскольку ограничение Φ на Q есть комплексная структура на Q и $T_oQ = D_o$, то $\tau^{-1}D_o$ есть комплексное подпространство в $\mathfrak{p}$. Если выполняется условие (2), то также получаем противоречие.

Пусть ξ — характеристическое векторное поле аффинорной метрической структуры (α, Φ, g). Если выполняется условие (3), то ξ ортогонально $\ker\alpha$ и ξ ортогонально D. Поскольку $\operatorname{rank}(\ker\alpha) \geq \operatorname{rank}(D)$, то $D \subseteq \ker\alpha$. По теореме 3.2 D — неголономное распределение на M. Так же, как для условия (1), получаем, что D является голономным распределением; снова приходим к противоречию.

В [1] введено понятие нормальной аффинорной метрической структуры на группе Ли. Левоинвариантная аффинорная метрическая структура (α, Φ, g) на группе Ли G называется *нормальной*, если

$$\operatorname{ad}_{\Phi X} = \operatorname{ad}_X \circ \Phi$$

для любого векторного поля X, лежащего в рабочем расслоении D. Пусть $\mathfrak{k}$ — рабочее расслоение нормальной аффинорной G-левоинвариантной H-правоинвариантной метрической структуры $(\hat{\alpha}, \widehat{\Phi}, \hat{g})$ на группе G. Поскольку $\mathfrak{k}$ ортогонально $\operatorname{rad}\hat{\alpha}$ и $\mathfrak{p}$ ортогонально $\mathfrak{h} \subseteq \operatorname{rad}\hat{\alpha}$, то $\mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{k}$ является подалгеброй, то в силу следствия 2.7 $\mathfrak{k}$ имеет четную размерность и порождает подгруппу $K = \exp(\mathfrak{k})$ в группе G. Ограничение аффинора $\widehat{\Phi}$ на подгруппу K есть G-левоинвариантная H-правоинвариантная комплексная структура на подгруппе K (см. [7, гл. 9]). Поскольку ограничение метрики $\hat{g}$ на K имеет фундаментальную 2-форму $d\hat{\alpha}$ и внешняя 2-форма $d\hat{\alpha}$ не вырождена на $\mathfrak{k}$, подгруппа K является интегральным кэлеровым подмногообразием для рабочего расслоения $\mathfrak{k}$. Рабочее расслоение $\mathfrak{k}$ на группе G задает G-инвариантное рабочее расслоение D на однородном пространстве M для G-инвариантной аффинорной метрической структуры на M, порожденной аффинорной метрической структурой $(\hat{\alpha}, \widehat{\Phi}, \hat{g})$ на группе G. Следовательно, нормальная аффинорная метрическая структура $(\hat{\alpha}, \widehat{\Phi}, \hat{g})$ на группе G порождает G-инвариантную аффинорную метрическую структуру на однородном пространстве M с интегральным кэлеровым подмногообразием $Q = K(o)$, проходящим через начальную точку $o : T_oQ = D_o$. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть $M = G/H$ — однородное риманово пространство вещественной размерности $n \geq 3$. Любая G-левоинвариантная H-правоинвариантная нормальная аффинорная метрическая структура на группе Ли G с рабочим расслоением $\mathfrak{k}$ порождает G-инвариантную субкэлерову аффинорную структуру на M тогда и только тогда, когда $\mathfrak{k}$ является инволютивным распределением в ортогональном дополнении подалгебры изотропии $\mathfrak{h}$.*

Будем говорить, что комплексная структура J на подгруппе $Q \subset G$ *ассоциирована с аффинором Φ* на группе Ли G, если ограничение Φ на Q совпадает с комплексной структурой J на Q, т. е. является интегрируемой почти комплексной структурой на подгруппе Q. Фактически в теореме 4.3 условие нормальности аффинорной метрической структуры необходимо только для того, чтобы рабочее расслоение порождало подгруппу с комплексной, а не с почти комплексной структурой. Таким образом, получаем более сильное утверждение.

Теорема 4.4. *Пусть $M = G/H$ — однородное риманово пространство вещественной размерности $n \geq 3$. Любая G-левоинвариантная H-правоинвариантная аффинорная метрическая структура (α, Φ, g) на группе G с рабочим расслоением $\mathfrak{k}$ задает G-инвариантную субкэлерову аффинорную структуру на M тогда и только тогда, когда $\mathfrak{k}$ является алгеброй Ли подгруппы K в G, снабженной комплексной структурой, ассоциированной с аффинором Φ.*

Замечание 4.5. Подгруппа K в теореме 4.4 — это подгруппа, трансверсальная подгруппе изотропии, и ее пересечение с подгруппой изотропии — это дискретная подгруппа в группе G.

§ 5. Инвариантные аффинорные метрические структуры на однородных пространствах размерности 4

В этом параграфе получим полное описание инвариантных аффинорных метрических структур на четырехмерных однородных римановых пространствах.

Пусть M — вещественное однородное риманово пространство размерности 4, G — группа изометрий, действующая на M транзитивно и эффективно, H — подгруппа изотропии начальной точки o и $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ — Ad_H-инвариантное ортогональное дополнение к подалгебре изотропии $\mathfrak{h}$ относительно некоторой левоинвариантной римановой метрики на группе G. Будем обозначать эйлерову характеристику компактного однородного пространства M через $\chi(M)$.

В [9] получена следующая классификация четырехмерных однородных римановых пространств.

Теорема 5.1. *Любое односвязное однородное риманово пространство размерности 4 либо изометрично группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой, либо изометрично одному из следующих симметрических пространств:*

$$S^4, \quad S^2 \times S^2, \quad S^3 \times \mathbb{R}, \quad S^2 \times \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{C}P^2.$$

По теореме 5.1 для однородных римановых пространств размерности 4 следует рассматривать два случая: симметрические четырехмерные пространства, не изометричные какой-либо группе Ли, и четырехмерные группы Ли. Полная классификация групп Ли размерности 4 приведена в [10].

5.1. Симметрические римановы пространства размерности 4. Поскольку трехмерная сфера S^3 диффеоморфна группе $\mathrm{su}(2)$, симметрическое пространство $S^3 \times \mathbb{R}$ можно рассматривать как группу Ли. Случай групп Ли будет рассмотрен отдельно далее. Имеем

$$\chi(S^4) = 2, \quad \chi(S^2 \times S^2) = 4, \quad \chi(\mathbb{C}P^2) = 3.$$

По теореме 2.10 получаем, что симметрические пространства S^4, $S^2 \times S^2$ и $\mathbb{C}P^2$ не допускают инвариантных аффинорных метрических структур.

Пусть $M = S^2 \times \mathbb{R}^2$. Если G — группа изометрий пространства M, то $G = G_1 \times G_2$, где G_1 — группа изометрий сферы S^2 и G_2 — группа изометрий евклидова пространства $\mathbb{R}^2$. Поскольку ограничение любой G-инвариантной

1-формы на S^2 есть G_1-инвариантная 1-форма на S^2, а на S^2 не существует ненулевых инвариантных 1-форм, любая ненулевая G-инвариантная 1-форма на M есть G_2-инвариантная 1-форма на $\mathbb{R}^2$. Евклидово пространство $\mathbb{R}^2$ можно представить как однородное пространство только двумя способами: либо как аддитивную абелеву группу A_2, либо как пространство $\mathrm{E}(2)/\,\mathrm{SO}(2)$, где $\mathrm{E}(2)$ — группа движений евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Если $G_2 \cong \mathrm{E}(2)$, то единственная $\mathrm{E}(2)$-инвариантная 1-форма на $\mathbb{R}^2$ — это 1-форма $\alpha \equiv 0$. Если $G_2 = A_2$, то любая G_2-инвариантная 1-форма α на $\mathbb{R}^2$ имеет вид

$$\alpha = adx + bdy, \quad a, b = \mathrm{const},$$

откуда $d\alpha = 0$. Следовательно, любая G-инвариантная 1-форма на $S^2 \times \mathbb{R}^2$ либо замкнута, либо тождественно равна нулю. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 5.2. *Если односвязное однородное риманово пространство $M = G/H$ размерности 4 не изометрично группе Ли с левоинвариантной метрикой, то на M не существует G-инвариантных аффинорных метрических структур.*

5.2. Пространство $\mathbb{C}P^2$. Комплексную проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$ можно рассматривать как однородное пространство $\mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(2)$. По теореме 5.2 на $\mathbb{C}P^2$ не существует $\mathrm{SU}(3)$-инвариантных аффинорных метрических структур. Изучим вопрос существования на $\mathbb{C}P^2$ неинвариантных аффинорных метрических структур. В силу п. (1) теоремы 2.6 любая аффинорная метрическая структура на $\mathbb{C}P^2$ может иметь либо радикал ранга 2, либо радикал ранга 0.

Положим $|Z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \neq 0$, $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$. Введем на $\mathbb{C}P^2$ 1-форму $\alpha = \bar{\partial} \ln |Z|^2$. Имеем

$$d\alpha = \partial\bar{\partial} \ln |Z|^2.$$

Легко проверить, что внешняя 2-форма $d\alpha$ невырожденна. Пусть J — комплексная структура на $\mathbb{C}P^2$, порожденная умножением на мнимую единицу. Тогда $J^* d\alpha = d\alpha$ и определена кэлерова метрика $h : h(X, Y) = d\alpha(X, JY)$ для любых векторных полей X и Y. Получаем неинвариантную аффинорную метрическую структуру (α, J, h) с радикалом ранга 0.

Пусть $p_1(E)$ — первый класс Понтрягина векторного расслоения E. Если на $\mathbb{C}P^2$ существует 1-форма с радикалом ранга 2 и рабочим расслоением D, то касательное расслоение есть сумма Уитни подрасслоений D и $\mathrm{rad}\,\alpha$ ранга 2. Имеем

$$p_1(\mathbb{C}P^2) = p_1(D) \wedge p_1(\mathrm{rad}\,\alpha) = 0.$$

Но это противоречит факту, что $p_1(\mathbb{C}P^2) \neq 0$. Следовательно, на $\mathbb{C}P^2$ не может существовать аффинорных метрических структур с радикалом ранга 2. Окончательно получаем следующий результат.

Теорема 5.3. *На однородном римановом пространстве $\mathbb{C}P^2$ не существует аффинорных метрических структур с радикалом ранга 2, но существует неинвариантная аффинорная метрическая структура с радикалом ранга 0.*

5.3. Группы Ли размерности 4. Пусть G — группа Ли размерности 4, α — левоинвариантная незамкнутая 1-форма на группе G и β — левоинвариантная риманова метрика на G. Если $\mathrm{rank}(\mathrm{rad}\,\alpha) = 0$, то существует базис левоинвариантных векторных полей e_1, e_2, e_3, e_4, в котором $d\alpha$ принимает вид

$$d\alpha = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*. \tag{5.1}$$

Если $\operatorname{rank}(\operatorname{rad}\alpha) = 2$, то существует базис левоинвариантных векторных полей e_1, e_2, e_3, e_4, в котором $d\alpha$ принимает вид

$$d\alpha = e_1^* \wedge e_2^*. \tag{5.2}$$

Базис e_1, e_2, e_3, e_4 называется *каноническим базисом.* В [10] доказано, что любая левоинвариантная почти комплексная структура на группе G, положительно ассоциированная с внешней 2-формой вида (5.1), в каноническом базисе имеет вид

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -\frac{a^2+1}{b} & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & s \\ 0 & 0 & -\frac{r^2+1}{s} & -r \end{bmatrix}, \quad b < 0,\ s < 0.$$

Аналогично любой левоинвариантный аффинор, положительно ассоциированный с внешней 2-формой вида (5.2), в каноническом базисе имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -\frac{a^2+1}{b} & -a & 0 & 0 \\ 0 & \ldots\ldots & & 0 \\ 0 & \ldots\ldots & & 0 \end{bmatrix}, \quad b < 0.$$

Положим $z_1 = a + bi$, $z_2 = r + si$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < 0\}$, $\mathbb{C}^2_- = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Im} z_1 < 0,\ \operatorname{Im} z_2 < 0\}$. Получаем, что множество $\mathbb{C}^2_-$ параметризует множество всех левоинвариантных аффиноров и левоинвариантных метрик, ассоциированных с 1-формой $\alpha : \operatorname{rank}(\operatorname{rad}\alpha) = 0$; множество $\mathbb{C}_-$ параметризует множество всех левоинвариантных аффиноров, ассоциированных с 1-формой $\alpha : \operatorname{rank}(\operatorname{rad}\alpha) = 2$. Обозначим через $b_1(G)$ первое число Бетти группы G. Тогда множество всех незамкнутых левоинвариантных 1-форм на группе размерности 4 параметризуется точками пространства $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)}$. Из классификации алгебр Ли размерности 4 следует, что не существует полупростых групп Ли размерности 4 (см. [10]). Следовательно, на любой четырехмерной группе Ли существует хотя бы одна левоинвариантная замкнутая 1-форма, отличная от нулевой. Если группа G некоммутативна, то $b_1(G) \geq 1$, $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)}$ есть открытое множество в $\mathbb{R}^4$ и $\dim(\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)}) = 4$. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 5.4. *Пусть G — некоммутативная группа Ли вещественной размерности* 4. *Тогда*

(1) *пространство левоинвариантных аффинорных метрических структур с радикалом ранга* 0 (*точных почти кэлеровых структур*) *на группе G параметризуется элементами множества $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)} \times \mathbb{C}^2_-$ и имеет вещественную размерность* 8*;*

(2) *пространство левоинвариантных аффинорных метрических структур с радикалом ранга* 2 *на группе G параметризуется элементами множества $\mathbb{R}^4 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)} \times \mathbb{C}_-$ и имеет вещественную размерность* 6.

Замечание 5.5. На коммутативной группе Ли любая левоинвариантная 1-форма замкнута, а следовательно, на коммутативной группе Ли не существует левоинвариантных аффинорных метрических структур.

Пусть (α, Φ, g) — левоинвариантная аффинорная метрическая структура на связной группе Ли G вещественной размерности 4, $\operatorname{rank}(\operatorname{rad}\alpha) = 2$ и D — рабочее расслоение этой аффинорной метрической структуры. Если D — подалгебра в $\mathfrak{g}$, то D либо абелева подалгебра размерности 2, либо изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{e}(1)$ группы $\mathrm{E}(1)$ аффинных преобразований вещественной прямой $\mathbb{R}$. Если D — абелева подалгебра, то $d\alpha|_D = 0$, что противоречит условию невырожденности 1-формы α на рабочем расслоении. Следовательно, $D \cong \mathfrak{e}(1)$. Тогда в D можно выбрать левоинвариантные векторные поля $e_1, e_2 : [e_1, e_2] = e_2$. Поскольку любая почти комплексная структура на многообразии вещественной размерности 2 интегрируема (см. [7, т. 2]), ограничение аффинора Φ на подгруппу $\mathrm{E}(1)$ является комплексной структурой на $\mathrm{E}(1)$, а $d\alpha_\Phi$ — кэлеровой метрикой на $\mathrm{E}(1)$. Получаем следующий результат.

Теорема 5.6. *Левоинвариантная аффинорная метрическая структура* $(\alpha, \Phi, g) : \operatorname{rank}(\operatorname{rad}\alpha) = 2$ *на связной группе Ли вещественной размерности* 4 *с рабочим расслоением* D *субкэлерова тогда и только тогда, когда в* D *существуют линейно независимые левоинвариантные векторные поля* $e_1, e_2 : [e_1, e_2] = e_2$.

§ 6. Инвариантные аффинорные метрические структуры на однородных пространствах размерности 5

Пусть M — однородное риманово пространство вещественной размерности 5, G — группа изометрий, действующая на M транзитивно и эффективно, и H — подгруппа изотропии начальной точки o. По теореме 2.6 ранг любой незамкнутой G-инвариантной 1-формы на M может быть равен 1 или 3. Аффинорные метрические структуры на пятимерном однородном пространстве M есть в точности почти контактные метрические структуры на M. Из теоремы 2.12 и замечания 2.13 следует

Теорема 6.1. *Пусть* $M = G/H$ — *однородное риманово пространство размерности* 5, $\mathfrak{p}$ — *ортогональное дополнение к подалгебре изотропии* $\mathfrak{h}$ *и* Ad_H *действует на* $\mathfrak{p}$ *неприводимо. Тогда на* M *не существует* G*-инвариантных аффинорных (почти контактных) метрических структур.*

Теорема 6.2. *Если однородное риманово пространство* $M = G/H$ *размерности* 5 *изометрично однородному пространству* $M_1 \times L$, *где* M_1 — *односвязное риманово однородное пространство размерности* 4, *не изометричное группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой,* L — *однородное пространство размерности* 1, *то на* M *не существует* G*-инвариантных аффинорных (почти контактных) метрических структур.*

Доказательство. Поскольку $G = G_1 \times G_2$, где G_1 — группа Ли, транзитивно действующая на M_1, G_2 — группа Ли, транзитивно действующая на L, из теорем 5.1 и 5.2 следует, что любая незамкнутая G-инвариантная 1-форма α на M имеет вид $\alpha = \lambda\xi^*$, где ξ — базисное векторное поле на $L : \xi^*|_M = 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Получаем

$$d\alpha = \lambda d\xi^* = 0,$$

т. е. любая G-инвариантная 1-форма на M замкнута. Следовательно, на M не существует G-инвариантных аффинорных метрических структур.

6.1. Пятимерная сфера. Будем рассматривать пятимерную сферу S^5 как множество в $\mathbb{C}^3$:

$$\{(z_1, z_2, z_3) : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\}.$$

Определим действие группы $S^1 = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ на S^5 следующим образом:

$$e^{it}(z) = (e^{it}z_1, e^{it}z_2, e^{it}z_3).$$

Векторное поле, касательное к орбите действия группы S^1 на S^5, не обращается в 0 во всех точках из S^5, следовательно, S^5 имеет нулевой класс Эйлера (см. [5]). Если сферу S^5 рассматривать как однородное пространство $\mathrm{SO}(6)/\mathrm{SO}(5)$, то S^5 — однородное риманово пространство и по теореме 6.1 на S^5 не существует $\mathrm{SO}(6)$-инвариантных аффинорных метрических структур.

Рассмотрим сферу S^5 как тотальное пространство расслоения Хопфа $S^5 \to \mathbb{C}P^2$ со слоем S^1. В этом случае группа S^1 действует на S^5 нетранзитивно. Пусть Q — некоторая связность на S^5, а ω — форма связности Q. Из определения формы связности на главном расслоении (см. [7, т. 1]) следует, что Ω — S^1-инвариантная 1-форма на S^5. Пусть Ω — форма кривизны связности Q. Из структурного уравнения

$$d\omega = \Omega + \frac{1}{2}\,[\omega, \omega]$$

получаем, что $d\omega = \Omega$. Форма связности ω замкнута тогда и только тогда, когда связность Q плоская. Предположим, что связность Q не плоская, g — риманова метрика, индуцированная вложением сферы S^5 в $\mathbb{C}^3$, и $\varPhi$ — аффинор, ассоциированный с формой связности ω. Тогда $(\omega, \varPhi, g)$ есть S^1-инвариантная аффинорная (почти контактная) метрическая структура на S^5. Если ограничение формы кривизны связности Ω на $\mathbb{C}P^2$ является симплектической формой, то $(\omega, \varPhi, g)$ есть S^1-инвариантная контактная метрическая структура на S^5.

6.2. Произведения трехмерной сферы. Пусть $M = S^3 \times R$, где R — однородное риманово пространство вещественной размерности 2, и G — группа изометрий, действующая на M транзитивно и эффективно. Если α — G-инвариантная 1-форма на $M : TR \subset \ker\alpha$, то для любых векторных полей X, Y на R имеем $\alpha([X, Y]) = 0$. Поскольку для любого векторного поля X на R и любого векторного поля Y на M $[X, Y] = 0$ и 1-форма α G-инвариантна, $d\alpha(X, Y) = 0$ для любого векторного поля X на R и любого векторного поля Y на M. Так как трехмерная сфера S^3 изометрична группе $\mathrm{SU}(2)$, а алгебра Ли группы $\mathrm{SU}(2)$ изоморфна $\mathbb{R}^3$ с операцией векторного произведения, на $\mathrm{SU}(2)$ существуют три линейно независимые левоинвариантные 1-формы с радикалом ранга 1. Считая, что эти 1-формы тождественно равны нулю на R, и выбирая в качестве метрики сумму метрики на S^3 и метрики на R, получаем, что на M существуют G-инвариантные аффинорные метрические структуры с радикалом ранга 3. Отсюда следует, что каждая левоинвариантная контактная метрическая структура на $\mathrm{SU}(2)$ определяет G-инвариантную аффинорную метрическую структуру с радикалом ранга 3 на следующих однородных пространствах: $S^3 \times S^2$, $S^3 \times \mathbb{R}^2$, $S^3 \times T^2$, где T^2 — двумерный плоский тор.

6.3. Группы Ли размерности 5. Пусть G — группа Ли вещественной размерности 5 и α — левоинвариантная незамкнутая 1-форма на группе G. Из теоремы 2.6 следует, что внешняя 2-форма $d\alpha$ в некотором базисе левоинвариантных векторных полей $e_1, \ldots, e_5$ принимает либо вид

$$d\alpha = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*,$$

либо вид

$$d\alpha = e_1^* \wedge e_2^*.$$

В обоих случаях левоинвариантный аффинор, ассоциированный с 1-формой α в каноническом базисе, имеет вид $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, где A — ненулевой блок 4×4 или 2×2.

Пусть $b_1(G)$ — первое число Бетти группы G. Множество всех незамкнутых левоинвариантных 1-форм на группе G параметризуется элементами множества $\mathbb{R}^5 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)}$. Определяя множества $\mathbb{C}_-, \mathbb{C}_-^2$ и рассуждая так же, как в разд. 5.3, получаем следующее описание левоинвариантных аффинорных метрических структур на группе G.

Теорема 6.3. *Пусть G — некоммутативная группа Ли вещественной размерности 5. Тогда*

(1) *Пространство левоинвариантных аффинорных метрических структур с радикалом ранга 1 на группе G параметризуется элементами множества $\mathbb{R}^5 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)} \times \mathbb{C}_-^2$ и имеет вещественную размерность 9.*

(2) *Пространство левоинвариантных аффинорных метрических структур с радикалом ранга 3 на группе G параметризуется элементами множества $\mathbb{R}^5 \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)} \times \mathbb{C}_-$ и имеет вещественную размерность 7.*

Строгая аффинорная метрическая структура с радикалом ранга 1 — это контактная метрическая структура. Левоинвариантные контактные метрические структуры на группах Ли размерности 5 полностью описаны в [8].

6.4. Группы Ли произвольной размерности. Пусть G — группа Ли вещественной размерности $n \geq 3$, α — левоинвариантная незамкнутая 1-форма на группе G и $\operatorname{rank}(\operatorname{rad}\alpha) = r \leq n-2$. В силу следствия 2.7 существует целое число $k : n - r = 2k$. Обозначим через $\mathbb{C}_-^k$ следующее множество:

$$\{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k : \operatorname{Im} z_1 < 0, \dots, \operatorname{Im} z_k < 0\}.$$

Обобщая теоремы 5.4 и 6.3 для группы Ли произвольной размерности, можно доказать следующий результат.

Теорема 6.4. *Пусть G — некоммутативная группа Ли вещественной размерности $n \geq 3$ и $b_1(G)$ — первое число Бетти группы G. Тогда пространство левоинвариантных аффинорных метрических структур с радикалом ранга r на группе G параметризуется элементами множества*

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{b_1(G)} \times \mathbb{C}_-^k, \quad k = \frac{n-r}{2},$$

и имеет вещественную размерность $n + 2k$.

Пусть α — ненулевая левоинвариантная 1-форма на группе G и β — левоинвариантная риманова метрика на G. По теореме Рисса (см. [6]) на группе G существует левоинвариантное векторное поле $\xi : \alpha(X) = \beta(\xi, X)$, $X \in \mathfrak{g}$. Для любых левоинвариантных векторных полей X, Y на группе G имеем

$$d\alpha(X, Y) = -\frac{1}{2}\alpha([X, Y]) = -\frac{1}{2}\beta(\xi, [X, Y]).$$

Если G — полупростая группа Ли, то 1-форма α не может быть замкнутой, поскольку $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Таким образом, получаем

Следствие 6.5. *Пусть G — полупростая группа Ли вещественной размерности $n \geq 3$. Тогда пространство левоинвариантных аффинорных метрических структур с радикалом ранга r на группе G параметризуется элементами множества*

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^k_-, \quad k = \frac{n-r}{2},$$

и имеет вещественную размерность $2n - r$.

Замечание 6.6. Поскольку первый производный идеал радикала левоинвариантной аффинорной метрической структуры на группе Ли является подалгеброй, ортогональной характеристическому векторному полю, левоинвариантная аффинорная метрическая структура с полупростым радикалом не может быть строгой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корнев Е. С.* Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 107–123.
2. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Римановы многообразия и однородные геодезические. (Сер. Итоги науки. Юг России. Математическая монография). Владикавказ: Южный мат. ин-т ВНЦ РАН, 2012.
3. *Calvaruso G.* Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures // J. Geom. Phys. 2013. V. 69. P. 60–73.
4. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна (в 2-х т.). М.: Мир, 1990.
5. *Милнор Дж., Сташеф Дж.* Характеристические классы. М.: Мир, 1979.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.
7. *Кобаяси Ш., Намидзу К.* Основы дифференциальной геометрии (в 2-х т.). М.: Наука, 1981.
8. *Славолюбова Я. В.* Левоинвариантные контактные метрические структуры на группах Ли. Saarbrücken: Lambert Acad. Publ., 2011.
9. *Берар-Бержери Л.* Однородные римановы пространства размерности 4 // Четырехмерная риманова геометрия: семинар Артура Бессе 1978/79 г. М.: Мир, 1985. С. 45–59.
10. *Корнев Е. С.* Почти комплексные структуры и ассоциированные метрики на группах Ли размерности 4. Saarbrücken: Lambert Acad. Publ., 2010.

Статья поступила 15 декабря 2014 г., окончательный вариант — 13 июля 2015 г.

Корнев Евгений Сергеевич
Кемеровский гос. университет,
кафедра фундаментальной математики,
ул. Красная, 6, Кемерово 650043
q148@mail.ru

Славолюбова Ярослава Викторовна
Кемеровский институт (филиал) РЭУ им. Г. В. Плеханова,
кафедра высшей и прикладной математики,
пр. Кузнецкий, 39, Кемерово 650992
jar1984@mail.ru