Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 510.55+512.57

О ГОМОМОРФИЗМАХ НА ЭФФЕКТИВНО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

Н. Х. Касымов

Аннотация. Исследуются различные вариации понятия отделимой нумерации, на основе которых описывается ряд алгоритмических и алгебраических понятий. В частности, на базе и в рамках понятия отделимой нумерации охарактеризованы негативные эквивалентности, описаны нумерованные алгебры с наиболее общими условиями отделимости, дан критерий отделимости для нумерованных алгебр с условиями минимальности для решеток их конгруэнций и рассмотрены вопросы, связанные с алгоритмическими сложностями нумераций алгебр, удовлетворяющих различным типам аксиом отделимости.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.105

Ключевые слова: негативная и позитивная эквивалентности, отделимая и эффективно отделимая нумерации алгебр, артинова решетка конгруэнций, аксиомы отделимости.

Базовые понятия, используемые в работе, содержатся в [1–6].

1. Негативные эквивалентности

Следуя Ю. Л. Ершову [1], приведем ряд основных определений. Если M — произвольное не более чем счетное множество и ν — отображение множества натуральных чисел ω на M, то пара (M,ν) называется *нумерованным множеством*, а отображение ν — *нумерацией множества* M. *Нумерационной эквивалентностью* нумерованного множества (M,ν) называется ядро отображения ν, т. е. $\{\langle x,y\rangle \mid \nu x=\nu y\}$. Пусть η — эквивалентность на ω. Подмножество γ множества натуральных чисел ω называется *η-замкнутым*, если γ вместе с каждым числом содержит и все ему η-эквивалентные, т. е. $x\in\gamma$ и $x=y \pmod{\eta} \to y\in\gamma$. Нумерация ν семейства рекурсивно перечислимых множеств называется *вычислимой*, если рекурсивно перечислимым является множество $\{\langle x,y\rangle \mid y\in\nu x\}$. Эквивалентность η называется *отделимой*, если всякая пара различных ее смежных классов отделяется подходящим η-замкнутым рекурсивно перечислимым множеством, т. е. для любых не η-эквивалентных x и y существует такое η-замкнутое рекурсивно перечислимое множество α, что $(x\in\alpha\wedge y\notin\alpha)\vee(y\in\alpha\wedge x\notin\alpha)$. Аналогично нумерация называется *отделимой*, если таковой является ее нумерационная эквивалентность. Если (M,ν) — нумерованное множество, то подмножество $M_0\subseteq M$ называется *ν-вполне перечислимым* (*ν-вполне рекурсивным*), если рекурсивно перечислимым (рекурсивным) является множество $\{x \mid \nu x\in M_0\}$ всех ν-номеров элементов множества M_0. С нумерованным множеством (M,ν) естественным образом связаны два топологических пространства, в одном из которых базу открытых множеств составляют ν-вполне перечислимые подмножества множества M, а во втором —

его ν-вполне рекурсивные подмножества. Будем называть первое из этих пространств *ν-эффективно порожденным*, а второе — *ν-рекурсивно порожденным*. Далее, если из контекста ясно, о какой нумерации ν идет речь, соответствующее пространство будем называть просто *эффективно* (*рекурсивно*) *порожденным*, без приставки ν. Точно так же будем использовать термины «вполне перечислимый» («вполне рекурсивный»), имея в виду фиксированную нумерацию ν. Иногда для краткости вполне перечислимые (вполне рекурсивные) множества будем называть *перечислимыми* (*рекурсивными*). Последовательность $A_0, A_1, \ldots$ рекурсивно перечислимых множеств называется *вычислимой*, если рекурсивно перечислимо множество $\{\langle x, y\rangle \mid y \in A_x\}$. Эквивалентность η называется *эффективно отделимой*, если для нее существует вычислимая последовательность η-замкнутых рекурсивно перечислимых отделяющих множеств. Аналогично нумерация называется *эффективно отделимой*, если таковой является ее нумерационная эквивалентность.

Замечание относительно терминологии. Поскольку центральным понятием работы является понятие вычислимой (в смысле Ю. Л. Ершова!) нумерации, будем избегать применения термина «вычислимый» как синонима термину «алгоритмически разрешимый», предпочитая использовать в последнем случае термин «рекурсивный». Точно так же вместо ныне общепринятого термина «вычислимо перечислимый» будем употреблять его классический синоним «рекурсивно перечислимый», что позволит избежать терминологических недоразумений.

Определение 1.1. Нумерация ν семейства рекурсивных множеств $\Re$ называется *вполне вычислимой*, если рекурсивно множество $\{\langle x, y\rangle \mid y \in \nu x,\ x \in \omega,\ \nu x \in \Re\}$.

Эквивалентность η называется *рекурсивно отделимой*, если любая пара натуральных чисел, различных по ее модулю, отделяется подходящим η-замкнутым рекурсивным множеством. Аналогично нумерация называется рекурсивно отделимой, если таковой является ее нумерационная эквивалентность. Эквивалентность η назовем *вполне отделимой*, если для нее существует перечислимая по индексам характеристических функций последовательность $R_0, R_1, \ldots$ рекурсивных отделяющих множеств. Неформально вычислимость нумерации семейства перечислимых множеств равносильна наличию эффективной процедуры, которая по номеру рекурсивно перечислимого множества перечисляет элементы данного множества. Вполне вычислимость означает существование алгоритма, который по номеру рекурсивного множества «выдает» алгоритм разрешения этого множества. Таким образом, если вычислимость подразумевает возможность перечисления семейства по рекурсивно перечислимым индексам, то вполне вычислимость означает рекурсивную перечислимость данного семейства по индексам характеристических функций его элементов. В частности, если семейство рекурсивно перечислимых множеств содержит хотя бы одно нерекурсивное множество, то для него заведомо бессмысленна постановка вопроса о существовании вполне вычислимой нумерации.

Одним из центральных результатов для эффективно отделимых нумераций является следующий [1, гл. 1, § 3, предложение 8]. *Эквивалентность эффективно отделима тогда и только тогда, когда она является нумерационной эквивалентностью вычислимой нумерации подходящего семейства рекурсивно перечислимых множеств.*

При этом нумерационные эквивалентности вычислимых нумераций не имеют четкой характеризации в арифметической иерархии Клини — Мостовского. Так, пусть E_0 — класс эффективно отделимых эквивалентностей на ω. Тогда E_0 содержит позитивные (Σ^0_1) и негативные (Π^0_1) эквивалентности и $E_0 \subset \Pi^2_0$. Однако для $\Delta^2_0 = \Sigma^2_0 \cap \Pi^2_0$ имеет место как $\Delta^2_0 \setminus E_0 \neq \varnothing$, так и $E_0 \setminus \Delta^2_0 \neq \varnothing$. Следующая теорема показывает, что для вполне вычислимых нумераций их нумерационные эквивалентности в точности совпадают с классом негативных эквивалентностей.

Теорема 1.1. *Для произвольной эквивалентности η на ω следующие условия равносильны:*

(1) η — *нумерационная эквивалентность подходящей вполне вычислимой нумерации;*

(2) η *негативна;*

(3) η *вполне отделима.*

Доказательство. (1)⇒(2) Пусть ν — вполне вычислимая нумерация подходящего семейства $\Re$ рекурсивных множеств и η — нумерационная эквивалентность нумерации ν. Тогда $x \neq y \pmod{\eta} \leftrightarrow \exists m(m \in \nu x \setminus \nu y \vee m \in \nu y \setminus \nu x)$, где правая часть соотношения рекурсивно перечислима в силу равномерной рекурсивности отношения $p \in \nu q$ по p, q.

(2)⇒(3) Пусть η — негативная эквивалентность. Еще А. И. Мальцевым в [5] отмечалась рекурсивная отделимость любых двух различных η-классов негативной эквивалентности. В действительности, как показано в [6], отделяющие множества можно выбирать среди η-замкнутых, причем процедура предоставления характеристического индекса соответствующего множества равномерно зависит от пар чисел, различных по модулю η. Поэтому рекурсивно перечислимое множество пар чисел, различных по модулю η, определяет вполне вычислимую последовательность η-замкнутых рекурсивных отделяющих множеств.

(3)⇒(1) Пусть $R_0, R_1, \ldots$ — вполне отделяющая последовательность для η. Построим нумерацию ν некоторого семейства рекурсивных множеств, определенную следующим образом: $\nu x = \{n \mid x \in R_n\}$. Очевидно, что ν — вполне вычислимая нумерация. Покажем, что нумерационная эквивалентность этой нумерации есть η. В самом деле, если $x = y (\mathrm{mod}\, \eta)$, то в силу η-замкнутости всех множеств из отделяющей последовательности каждое множество, содержащее x (y) одновременно содержит и y (соответственно x), т. е. $\nu x = \nu y$. Если $x \neq y (\mathrm{mod}\, \eta)$, то для них найдется отделяющий член последовательности, скажем $x \in R_n$ и $y \notin R_n$, поэтому объекты, нумеруемые числами x и y, различны, так как $n \in \nu x$ и $n \notin \nu y$. Теорема доказана.

В данной работе под нумерацией произвольной не более чем счетной алгебры A вычислимой сигнатуры понимается любое отображение ν из ω на A такое, что для всякого символа операции F местности n из сигнатуры алгебры A по номеру символа F и любым $a_1, \ldots, a_n \in \omega$ эффективно находится некоторое $a \in \omega$ такое, что $F(\nu a_1, \ldots, \nu a_n) = \nu a$ (т. е. по номеру символа F эффективно строится алгоритм вычисления такой n-местной рекурсивной функции f, представляющей операцию F алгебры A в нумерации ν, что $F(\nu a_1, \ldots, \nu a_n) = \nu f(a_1, \ldots, a_n)$).

Заметим, что, вообще говоря, не всякая нумерация основного множества алгебры A является нумерацией этой алгебры.

Пусть η — эквивалентность на ω. Будем говорить, что алгебра A вычислимой сигнатуры *определима над* η, если существует нумерация этой алгебры (в смысле приведенного выше определения) с нумерационной эквивалентностью, равной η. Легко заметить, что определимость алгебры A над эквивалентностью η равносильна существованию такого вычислимого семейства $\Im$ общерекурсивных функций, согласованных с η (т. е. из η-эквивалентности наборов аргументов любой рекурсивной функции из $\Im$ следует η-эквивалентность соответствующих значений), что алгебра A изоморфна фактор-алгебре рекурсивной алгебры $(\omega; \Im)$ по конгруэнции η. Хотя, как отмечено выше, в современной теории вычислимых структур вычислимость семейства $\Im$, вообще говоря, не требуется, для большинства приводимых ниже результатов это условие необходимо. Как обычно, в рамках понятий универсальной алгебры из согласованности всех $\Im$-операций с эквивалентностью η (или, что равносильно, из того, что эквивалентность η есть конгруэнция рекурсивной алгебры $(\omega; \Im)$) следует корректная определенность фактор-алгебры $(\omega/\eta; \Im)$, так как действия $\Im$-операций на фактор-множестве ω/η определены однозначно. Это позволяет обосновать запись $(\omega/\eta; \Im)$. Уместно отметить, что рекурсивные алгебры вида $(\omega; \Im)$, где $\Im$ — произвольное вычислимое семейство общерекурсивных функций, играют в теории вычислимости универсальных алгебр роль абсолютно свободных объектов, так как образуют тот исходный материал, из которого строится любая нумерованная алгебра путем подходящей факторизации. Поскольку всякая не более чем счетная алгебра эффективной сигнатуры имеет нумерацию (например, индуцированную геделевской нумерацией абсолютно свободной алгебры данной сигнатуры от счетного множества свободных порождающих [2]), всякая такая алгебра определима над некоторой эквивалентностью на ω.

Всюду далее, говоря о нумерованных алгебрах, будем подразумевать, что эти алгебры содержат более одного элемента, так как иначе возникает вырожденная ситуация, которую всегда нужно будет оговаривать. Известно [6], что существуют нетривиальные позитивные эквивалентности, над которыми определимы только тривиальные алгебры в следующем смысле. Очевидно, что функции-константы и проектирующие функции (и только они) согласованы с любой эквивалентностью. Существует позитивная эквивалентность с бесконечным числом смежных классов, по модулю которой всякая согласованная с этой эквивалентностью рекурсивная функция действует либо как константа, либо как проектирующая. Пример такой эквивалентности можно найти в [1, гл. 3, § 6]. Для негативных эквивалентностей ситуация диаметрально противоположная, как показывает

Следствие 1.1 [7]. *Над всякой негативной эквивалентностью определима конгруэнц-простая алгебра.*

Доказательство. Используя вполне отделяющую последовательность, для каждой пары различных по модулю данной эквивалентности чисел определим эффективное семейство унарных рекурсивных функций, корректно (т. е. сопоставляющих эквивалентным наборам аргументов эквивалентные значения) отображающих данную пару во все другие пары. Данная процедура, равномерно зависящая от рекурсивно перечислимого множества пар, различных по модулю нумерационной эквивалентности элементов, очевидно, наделяет фактор-множество по данной негативной эквивалентности структурой простой алгебры.

Характеристической трансверсалью эквивалентности η называется множество всех чисел, являющихся минимальными представителями в содержащих их η-классах. Под характеристической трансверсалью нумерации будем понимать характеристическую трансверсаль ее нумерационной эквивалентности. Эквивалентность называется *равномерно рекурсивно отделимой*, если существует частично рекурсивная функция, значение которой определено на каждой паре чисел, различных по модулю этой эквивалентности, и равно индексу характеристической функции η-замкнутого рекурсивного множества, отделяющего одно из этих чисел от другого.

Теорема 1.1 позволяет давать более прямые и краткие описания важных свойств негативных эквивалентностей. Например, имеет место

Предложение 1.1 [6]. *Эквивалентность негативна тогда и только тогда, когда она является равномерно рекурсивно отделимой эквивалентностью с рекурсивно перечислимой характеристической трансверсалью.*

Доказательство дадим с умеренной степенью детализации.

Если эквивалентность η негативна, то по теореме 1.1 она вполне отделима, т. е. для нее существует перечислимая по индексам характеристических функций последовательность $R_0, R_1, \ldots$ η-замкнутых рекурсивных отделяющих множеств. Тогда частично рекурсивная функция f, определенная следующим образом: $f(x,y) = \mu n((x \in R_n \wedge y \notin R_n) \vee (y \in R_n \wedge x \notin R_n))$, где μ — оператор минимизации, определена на каждой паре чисел x, y, различных по модулю η, и «выдает» в качестве значения число n, позволяющее эффективно распознавать принадлежность любого числа множеству R_n. Рекурсивная перечислимость характеристической трансверсали негативной эквивалентности очевидна. Обратно, пусть η — равномерно рекурсивно отделимая эквивалентность с рекурсивно перечислимой характеристической трансверсалью $\mathrm{tr}(\eta)$, $t_0, t_1, \ldots$ — фиксированный эффективный пересчет множества $\mathrm{tr}(\eta)$, f — функция из определения равномерно рекурсивной отделимости. Определим последовательность η-замкнутых рекурсивных множеств $R_0, R_1, \ldots$ следующим образом. Пусть g — взаимно однозначное рекурсивное отображение множества пар натуральных чисел $\{\langle x,y\rangle \mid x \neq y\}$ на ω. Если $m \neq n$, то $f(t_m, t_n)$ определено и его значение есть индекс характеристической функции η-замкнутого рекурсивного множества, отделяющего любое число $x = t_m \pmod{\eta}$ от $y = t_n \pmod{\eta}$. Назовем номером этого множества R число $g(m,n)$. Тогда $R_0, R_1, \ldots$ является вполне отделяющей последовательностью для η и по теореме 1.1 η негативна. Предложение доказано.

2. Эффективно отделимые аппроксимации

Нумерованную алгебру назовем *отделимой* (*эффективно отделимой*), если таковой является ее нумерационная эквивалентность. Под гомоморфизмами нумерованных алгебр понимаются обычные гомоморфизмы, одновременно являющиеся морфизмами соответствующих нумерованных множеств, т. е. если (A,ν) и (B,μ) — две нумерованные алгебры одной сигнатуры и φ — гомоморфизм из A в B, то предполагается существование такой рекурсивной функции f, что $\varphi\nu = \mu f$. Покажем, что для нумерованной алгебры (A,ν) все операции алгебры A, представленные рекурсивными операциями в нумерации ν (точнее, их действиями, индуцированными на классах нумерационной эквивалентности), непрерывны как в ν-эффективно порожденном, так и в ν-рекурсивно порожденном пространствах. Для одноместных операций это очевидно, так как прообразы ν-вполне перечислимых (ν-вполне рекурсивных) множеств являются таковыми же. Докажем этот факт в общем случае.

Предложение 2.1. *Операции любой нумерованной алгебры непрерывны в рекурсивно (эффективно) порожденном пространстве.*

Доказательство. Пусть $(\omega/\eta; \Im)$ — произвольная η-алгебра (т. е. алгебра, определимая над η). Заметим, что вычислимость семейства $\Im$ рекурсивных функций, для которых η является конгруэнцией, не предполагается. Допустим, что $f \in \Im$ и число аргументов n операции f не меньше 2. Зафиксируем набор $\bar{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Нужно показать, что для любого η-замкнутого рекурсивного (рекурсивно перечислимого) множества Y, содержащего число $f(x_1, \ldots, x_n)$, существуют такие η-замкнутые рекурсивные (соответственно рекурсивно перечислимые) множества $X_1 \ni x_1, \ldots, X_n \ni x_n$, что $f(X_1, \ldots, X_n) \subseteq Y$. Возьмем полный f-прообраз X множества Y, т. е. $X = \{\bar{u} \mid f(\bar{u}) \in Y\}$. Очевидно, что X — непустое рекурсивное (перечислимое) множество кортежей длины n, если рекурсивно (соответственно перечислимо) множество Y. Зафиксируем любую геделевскую нумерацию всех наборов из ω^n.

Рассмотрим сначала случай рекурсивного Y. Будем строить множества $X_1, \ldots, X_n$ и $Z \subseteq X$ по шагам.

Шаг 0. $X_1^0 = \{x_1\}, \ldots, X_n^0 = \{x_n\}$ и $Z^0 = \varnothing$.

Шаг $s+1$. Пусть $\bar{z} = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ — первый кортеж из X, не принадлежащий множеству $X_1^s \times \cdots \times X_n^s \cup Z^s$. Если $\big(X_1^s \cup \{z_1\}\big) \times \cdots \times \big(X_n^s \cup \{z_n\}\big) \subseteq X$, то полагаем $X_1^{s+1} = X_1^s \cup \{z_1\}, \ldots, X_n^{s+1} = X_n^s \cup \{z_n\}$ и $Z^{s+1} = Z^s$ (при этом может оказаться, что $X_i^{s+1} = X_i^s \cup \{z_i\}$ для некоторых $1 \leq i \leq n$), в противном случае $X_1^{s+1} = X_1^s, \ldots, X_n^{s+1} = X_n^s$ и $Z^{s+1} = Z^s \cup \{\bar{z}\}$. Конец шага $s+1$.

Теперь определим $X_k = \bigcup\limits_{s \in \omega} X_k^s$, $1 \leq k \leq n$, и $Z = \bigcup\limits_{s \in \omega}$.

По построению рекурсивное множество X распадается на две перечислимые дизъюнктные части — $X_1 \times \cdots \times X_n$ и Z, откуда следует рекурсивность прямого произведения. Заметим, что оба эти множества η-замкнуты, при этом если какой-то набор $\langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ на некотором шаге распределяется по X_k, $1 \leq k \leq n$, т. е. $z_1 \in X_1, \ldots, z_n \in X_n$, то все η-эквивалентные этому наборы, появляющиеся на более поздних шагах, распределяются таким же образом. Корректность конструкции легко показать индукцией по шагам построения.

Для рекурсивно перечислимого Y ситуация несколько сложнее, так как в этом случае нужно учитывать тот факт, что наборы из $\omega^n \setminus X$ эффективно нераспознаваемы, однако общая идея такая же, как в рекурсивном случае.

Будем говорить, что набор $\bar{z} = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ *использовался до шага* $s+1$, если $\bar{z} \in X_1^s \times \cdots \times X_n^s \subseteq X^s$, где X^s обозначает первые s элементов множества X в некотором фиксированном эффективном пересчете этого множества. В противном случае набор назовем *не использовавшимся до шага* $s+1$.

Шаг 0. $X_1^0 = \{x_1\}, \ldots, X_n^0 = \{x_n\}$.

Шаг $s+1$. Берем все наборы $\bar{z} = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$ из X^{s+1}, не использовавшиеся до шага $s+1$, и проверяем каждый из них на свойство $\big(X_1^s \cup \{z_1\}\big) \times \cdots \times \big(X_n^s \cup \{z_n\}\big) \subseteq X^{s+1}$. Если такие наборы есть, то выбираем из них набор с наименьшим номером, скажем, $\langle z_1^*, \ldots, z_n^* \rangle$, и полагаем, так же, как и в рекурсивном случае, $X_1^{s+1} = X_1^s \cup \{z_1^*\}, \ldots, X_n^{s+1} = X_n^s \cup \{z_n^*\}$. Иначе переходим к следующему шагу. Конец шага $s+1$.

Как и для рекурсивного случая, определим предельные множества. Далее, используя свойства построения и индукцию по шагам, нетрудно заметить, что эффективно строящиеся множества $X_1, \ldots, X_n$ таковы, что каждое из них

η-замкнуто, а их прямое произведение лежит в X и потому переводится функцией f в множество Y. Предложение доказано.

Точно так же любой гомоморфизм нумерованных алгебр является непрерывным отображением соответствующих топологических пространств (как эффективно, так и рекурсивно порожденных), поскольку рассматриваемые нами гомоморфизмы являются морфизмами. Следующий факт сводит изучение отделимых нумераций алгебр к их эффективно отделимым нумерациям.

Теорема 2.1. *Нумерованная алгебра отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется эффективно отделимыми алгебрами.*

Доказательство. Пусть (A, ν) — нумерованная алгебра эффективной сигнатуры Σ и ν — отделимая нумерация. Обогатим сигнатуру Σ счетным множеством констант $C = \{c_n \mid n \in \omega\}$, не пересекающимся с Σ, интерпретируя константу c_n в элемент νn алгебры A. *Переменной* будем называть любой элемент множества $X = \{x_n \mid n \in \omega\}$, не пересекающегося с $\Sigma \cup C$.

Трансляцией $t(x)$ назовем любой терм от одной переменной x, который можно получить из подходящего терма сигнатуры $\Sigma \cup C$ путем замены всех его переменных (из множества X) на x. Таким образом, всякая трансляция алгебры A задает на ней одноместную операцию, однозначно определенную интерпретациями всех символов обогащенной сигнатуры. Множество всех трансляций будем обозначать через $T(x)$.

ν-Интерпретацией трансляции $t(x)$ *в нумерации* ν *алгебры* A назовем одноместную функцию $t_\nu(x)$, получаемую из $t(x)$ подстановкой вместо всех Σ-символов соответствующих рекурсивных функций и натуральных чисел (для Σ-констант), представляющих операции алгебры A в нумерации ν. Таким образом, каждая ν-трансляция определяет одноместную общерекурсивную функцию, представляющую соответствующую трансляцию алгебры A. Множество ν-интерпретаций всех трансляций из $T(x)$ обозначим через $T_\nu(x)$.

Хорошо известно [3], что отношение эквивалентности на основном множестве алгебры A является ее конгруэнцией тогда и только тогда, когда эта эквивалентность согласована со всеми трансляциями этой алгебры.

Теперь заметим, что в силу эффективности сигнатуры Σ и рекурсивной перечислимости $T(x)$ множество $T_\nu(x)$ вычислимо, т. е. существует эффективная процедура, равномерно трансформирующая номер ν-трансляции в способ вычисления соответствующей рекурсивной функции. Более формально, в качестве нумерации соответствующего семейства рекурсивных функций удобно принять нумерацию этого семейства синтаксическими выражениями из $T(x)$, так как существует очевидное эффективное соответствие между трансляциями и ν-трансляциями. С использованием стандартных λ-обозначений Чёрча множество рекурсивных ν-трансляций можно записать так: $T_\nu(x) = \{\lambda x.t_\nu(x) \mid t(x) \in T(x)\}$, где все символы в $t(x)$, за исключением переменной x, представлены интерпретациями сигнатурных символов в нумерации ν. Вполне очевидна вычислимость этого семейства, поэтому не будем вдаваться в детали построения конкретной вычислимой геделевской нумерации $\gamma : \omega \to T_\nu(x)$.

Пусть A_0, A_1 — разбиение основного множества алгебры A на две непересекающиеся части и $\Theta(A)$ — решетка всех конгруэнций этой алгебры. Рассмотрим множество $\Theta(A_0, A_1)$ всех тех конгруэнций алгебры A, никакая из которых не отождествляет никакой элемент из A_0 ни с каким элементом из A_1, т. е. $\Theta(A_0, A_1) = \{\theta \mid \theta \in \Theta(A) \wedge (x = y \pmod{\theta} \to ((x \in A_0 \wedge y \in A_0) \vee (x \in A_1 \wedge y \in A_1)))\}$.

Лемма 2.1. *В $\Theta(A_0, A_1)$ существует наибольший элемент.*

Доказательство. Множество $\Theta(A_0, A_1)$ непустое, так как в нем содержится нулевая конгруэнция. Пусть θ^* есть точная верхняя грань для $\Theta(A_0, A_1)$. Покажем, что $\theta^* \in \Theta(A_0, A_1)$. В самом деле, $a = b \ (\mathrm{mod}\ \theta^*)$ равносильно существованию конечной цепочки $a = a_0\theta_0 a_1\theta_1 \dots a_{m-1}\theta_{m-1}a_m = b$, в которой все θ_i из $\Theta(A_0, A_1)$. Остается заметить, что как a, так и b обязаны принадлежать одному и тому же множеству A_i, поскольку никакое звено этой цепочки не может изменить членство в этих множествах. Лемма доказана.

Пусть $\nu m \neq \nu n$. Из отделимости ν следует существование η-замкнутого рекурсивно перечислимого множества α (где η обозначает нумерационную эквивалентность нумерации ν), отделяющего эти элементы. Пусть для определенности $m \in \alpha$ и $n \notin \alpha$. Положим $A_0 = \nu\alpha$ и $A_1 = \nu(\omega \setminus \alpha)$, тогда множества A_0, A_1 образуют разбиение основного множества алгебры A на две дизъюнктные части. По лемме 2.1 существует наибольшая конгруэнция θ^*, не «склеивающая» никакой элемент из A_0 ни с каким элементом из A_1. Очевидно, что $\nu m \neq \nu n \,(\mathrm{mod}\, \theta^*)$. Поскольку θ^* — наибольшая конгруэнция, различающая элементы νm и νn алгебры A, всякая ненулевая конгруэнция фактор-алгебры A/θ^* содержит пару элементов $\langle \nu m/\theta^*, \nu n/\theta^* \rangle$. Рассмотрим нумерованную фактор-алгебру $(A/\theta^*, \nu^*)$ нумерованной алгебры (A, ν), где ν^* обозначает естественную нумерацию фактор-алгебры, индуцированную нумерацией ν, т. е. $\nu^* = \theta^*\nu$.

Лемма 2.2. *Нумерованная алгебра $(A/\theta^*, \nu^*)$ эффективно отделима.*

Доказательство. Алгебра A/θ^* подпрямо неразложима, так как пересечение всех ее ненулевых конгруэнций содержит пару $\langle \nu m/\theta^*, \nu n/\theta^* \rangle$. В частности, любая главная конгруэнция алгебры A/θ^* (т. е. порожденная парой различных ее элементов) также содержит эту пару. Следовательно, для любой пары различных элементов ν^*p, ν^*q алгебры (A/θ^*) найдется ν-трансляция $t^*(x)$, переводящая номера одного из этих элементов в α, а другого — в $\omega \setminus \alpha$, т. е. $t^*(p) \in \alpha \wedge t^*(q) \notin \alpha$ либо $t^*(q) \in \alpha \wedge t^*(p) \notin \alpha$. В противном случае существовала бы собственная конгруэнция алгебры (A/θ^*), различающая элементы $\nu m/\theta^*, \nu n/\theta^*$, что невозможно.

Обозначим t^*-прообраз множества α через $t^{*-1}(\alpha)$, т. е. $t^{*-1}(\alpha) = \{x \mid t^*(x) \in \alpha\}$. Ясно, что множество $t^{*-1}(\alpha)$ рекурсивно перечислимо как рекурсивный t^*-прообраз рекурсивно перечислимого множества α. Если, далее, через η^* обозначить нумерационную эквивалентность нумерации ν^*, то $t^{*-1}(\alpha)$ является η^*-замкнутым.

Пусть $t_0, t_1, \dots$ — вычислимая последовательность всех ν-трансляций. Рассмотрим последовательность множеств $t_0^{-1}(\alpha), t_1^{-1}(\alpha), \dots$. Эта последовательность, очевидно, вычислима и с учетом вышесказанного является отделяющей для нумерации ν^*. Лемма доказана.

Следовательно, для любой пары различных элементов алгебры (A, ν) найдется эффективный на номерах гомоморфизм из этой алгебры на подходящую эффективно отделимую алгебру, различающий эти элементы.

Отделимость эффективно отделимой нумерованной алгебры очевидна. Теорема доказана.

В обзорной работе [6] сформулирована следующая основная теорема теории рекурсивно отделимых нумерованных алгебр.

Нумерованная алгебра рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.

Таким образом, роль и место эффективно отделимых алгебр в классе отделимых родственна роли и месту негативных алгебр в классе рекурсивно отделимых. При этом, как показывает теорема 2.1, наиболее общая концепция отделимости, определяемая теоремой Ю. Л. Ершова о вычислимых нумерациях, дает готовый математический аппарат для развития структурной теории отделимых алгебр.

Следствие 2.1. *Отделимая нумерация подпрямо неразложимой алгебры эффективно отделима.*

Доказательство. Пусть A — подпрямо неразложимая алгебра и ν — ее отделимая нумерация. По условию существует пара различных элементов a, b алгебры A, содержащаяся в любой ее ненулевой конгруэнции. Согласно теореме 2.1 имеется эффективно отделимый гомоморфный образ нумерованной алгебры (A, ν), в котором образы элементов a и b различны, однако единственная конгруэнция, различающая эти элементы, является нулевой. Следовательно, ядро этого гомоморфизма тривиально, т. е. исходная нумерация ν сама эффективно отделима. Следствие доказано.

Определение 2.1. Неединичная эквивалентность η на ω называется *квазисовершенной* (*совершенной*), если не существует собственных η-замкнутых рекурсивно перечислимых (рекурсивных) подмножеств множества ω.

На языке эффективно порожденных пространств квазисовершенность означает, что соответствующее эффективно порожденное пространство (с естественной нумерацией — каждое число нумерует содержащий его класс эквивалентности) является пространством слипшихся точек. Точно так же совершенность эквивалентности равносильна тому, что соответствующее рекурсивно порожденное пространство антидискретно.

Следствие 2.2. *Неединичная эквивалентность квазисовершенна тогда и только тогда, когда никакая алгебра, определимая над ней, не обладает эффективно отделимой фактор-алгеброй.*

Доказательство. Если эквивалентность не квазисовершенна, то, используя метод теоремы 2.1, над ней можно определить алгебру с эффективно отделимым гомоморфным образом. Обратно, факт определимости над эквивалентностью алгебры с эффективно отделимым гомоморфным образом, очевидно, достаточен для того, чтобы эта эквивалентность не была квазисовершенной. Следствие доказано.

Предложение 2.2. *Нумерованная простая алгебра эффективно отделима тогда и только тогда, когда она имеет собственное вполне перечислимое подмножество.*

Доказательство. Пусть A — простая алгебра, ν — ее нумерация, α — собственное вполне перечислимое подмножество ω и $t_0, t_1, \ldots$ — вычислимая последовательность всех ν-трансляций, определенная в доказательстве теоремы 2.1. Тогда вычислимая последовательность вполне перечислимых множеств $t_0^{-1}(\alpha), t_1^{-1}(\alpha), \ldots$ является отделяющей для нумерации ν, так как в силу простоты A для любой пары различных элементов этой алгебры существует трансляция из данной последовательности, переводящая один из этих элементов в множество α, а другой — в его дополнение, т. е. ν эффективно отделима. Обратное очевидно. Предложение доказано.

Следствие 2.3. *Всякая нумерация простой алгебры либо квазисовершенна, либо ядро ее нумерации совпадает с ядром некоторой вычислимой нумерации.*

Неодноэлементное топологическое пространств называется *тривиальным*, если открытыми множествами являются только само множество и $\varnothing$.

Следствие 2.4. *Для нумерованной простой алгебры отделимость эффективно порожденного топологического пространства равносильна его нетривиальности.*

Наличие вполне рекурсивного подмножества у неквазисовершенной простой алгебры оказывается достаточным для ее негативности.

Предложение 2.3. *Нумерованная простая алгебра негативна тогда и только тогда, когда она имеет собственное вполне рекурсивное подмножество.*

Доказательство. Если нумерованная простая алгебра негативна, то она рекурсивно отделима [6], а значит, имеет собственное вполне рекурсивное подмножество (напомним, что мы предполагаем неодноэлементность рассматриваемых алгебр).

Пусть (A, ν) — нумерованная простая алгебра, M — собственное ν-вполне рекурсивное подмножество множества A и $\alpha = \{x \mid \nu x \in M\}$. Тогда $x \neq y \leftrightarrow \exists t \in T(t(x) \in \alpha \wedge t(y) \in \omega \setminus \alpha) \vee (t(y) \in \alpha \wedge t(x) \in \omega \setminus \alpha)$, где T обозначает вычислимое! множество всех трансляций алгебры A в нумерации ν. Предложение доказано.

3. Условия конечности

Среди трех основных инструментов исследования в универсальной алгебре: решеток конгруэнций, подалгебр и групп автоморфизмов, особую роль с точки зрения теории нумераций и структурных свойств η-алгебр играют решетки конгруэнций. К примеру, решетки подалгебр не всегда дают достаточно мощный инструмент описания свойств η-алгебр, так как если над эквивалентностью η определима конечно порожденная алгебра $(\omega/\eta; c_1, \ldots, c_k, f_1, \ldots, f_n)$, где $c_1, \ldots, c_k$ — порождающие константы, интерпретируемые натуральными числами $l_1, \ldots, l_k$ соответственно, то над ней определяется алгебра, порожденная любым своим элементом (для этого достаточно обогатить сигнатуру одноместными функциями $g_1, \ldots, g_k$, интерпретируемыми в функции-константы $l_1, \ldots, l_k$ соответственно), т. е. с одноэлементной решеткой подалгебр. Семейства рекурсивных автоморфизмов, играющие фундаментальную роль при изучении абстрактных свойств симметрии позитивных (в особенности конструктивных) систем, в случае произвольных нумерованных алгебр вообще не являются группами [8]. Более того, существуют естественные примеры негативных систем, полугруппы рекурсивных автоморфизмов которых также не являются группами [9]. Иное дело решетки конгруэнций. Например, всякая алгебра, определимая над неразрешимой позитивной эквивалентностью, имеет весьма богатую решетку конгруэнций [6] (впрочем, справедливости ради отметим, что согласно следствию 1.1 над любой негативной эквивалентностью определимы конгруэнцпростые алгебры). Ниже будет показано (следствие 3.3), что множество конгруэнций всякой алгебры, имеющей отделимую, но не эффективно отделимую нумерацию, бесконечно. Как отмечено выше, нумерационная эквивалентность всякой эффективно отделимой нумерации принадлежит индуктивному классу арифметической иерархии Клини — Мостовского. В то же время в каждой

m-степени присутствует рекурсивно отделимая (а значит, и отделимая) эквивалентность [6]. Поскольку класс отделимых нумераций алгебр весьма обширен, представляется целесообразным изучение подклассов этого класса в предположениях наличия ограничений тех или иных типов на решетки конгруэнций. Свидетельством полезности такого подхода является

Теорема 3.1. *Всякая отделимая нумерация алгебры с артиновой решеткой конгруэнций эффективно отделима.*

Доказательство. Пусть решетка конгруэнций алгебры A удовлетворяет условию минимальности и ν — отделимая нумерация этой алгебры. Допустим, что ν не является эффективно отделимой. Покажем, что в этом случае можно построить бесконечно убывающую цепь конгруэнций алгебры A. Зафиксируем любую пару различных элементов a_0, b_0 алгебры A. По теореме 2.1 существует такая конгруэнция $\theta_0(a_0, b_0)$ этой алгебры, различающая элементы a_0 и b_0, что нумерованная фактор-алгебра $(A/\theta_0(a_0, b_0), \nu_0)$, где $\nu_0 = \theta_0\nu$ (θ_0 обозначает естественное проектирование в классы $\theta_0(a_0, b_0)$-эквивалентности), эффективно отделима. Ядро гомоморфизма θ_0 ненулевое, так как ν согласно предположению не является эффективно отделимой.

В силу того, что гомоморфизм θ_0 собственный, существует пара различных элементов a_1, b_1 алгебры A, которые равны по модулю $\theta_0(a_0, b_0)$. Опять по теореме 2.1 эти элементы различаются в подходящем эффективно отделимом гомоморфном образе алгебры A по конгруэнции, которую обозначим через $\theta_1(a_1, b_1)$.

Положим $\theta = \theta_0(a_0, b_0) \cap \theta_1(a_1, b_1)$, очевидно, что θ — конгруэнция, для которой $\theta_0(a_0, b_0)$ является собственным расширением. Рассмотрим нумерованную алгебру $(A/\theta, \theta\nu)$. Покажем, что нумерованная алгебра $(A/\theta, \theta\nu)$ эффективно отделима.

Лемма 3.1. *Пересечение конечного числа эффективно отделимых эквивалентностей на ω эффективно отделимо.*

Доказательство достаточно привести для двух эквивалентностей. Пусть η_0, η_1 — эффективно отделимые эквивалентности и $\eta = \eta_0 \cap \eta_1$. По определению как для η_0, так и для η_1 существуют вычислимые отделяющие последовательности η_0-замкнутых (η_1-замкнутых) рекурсивно перечислимых множеств $B_0, B_1, \ldots$ ($C_0, C_1, \ldots$ соответственно). Легко понять, что последовательность $B_0, C_0, B_1, C_1, \ldots$ является вычислимой отделяющей последовательностью для η. Убедимся в том, что все множества из этой последовательности η-замкнуты. В самом деле, пусть $x \in B_k$ ($k \in \omega$) и $x = y \,(\mathrm{mod}\, \eta)$, тогда $x = y \,(\mathrm{mod}\, \theta_0)$, так как $\eta \subseteq \eta_0$, но B_k η_0-замкнутое, поэтому $y \in B_k$. Аналогично доказывается η-замкнутость каждого члена последовательности $C_0, C_1, \ldots$. Лемма доказана.

Согласно лемме 3.1 нумерованная алгебра $(A/\theta, \theta\nu)$ эффективно отделима, причем $\theta_0(a_0, b_0)$ является строгим расширением θ, так как $\langle a_1/b_1 \rangle \in \theta_0(a_0, b_0) \setminus \theta_1(a_1, b_1)$.

Далее повторяем процедуру построения строго меньшей эффективно отделимой конгруэнции, рассматривая в качестве $\eta_0(a_0, b_0)$ конгруэнцию θ. Поскольку на каждом этапе построения получается эффективно отделимая конгруэнция, в силу предположения о том, что исходная нумерация не является эффективно отделимой, каждая конгруэнция из этой цепи ненулевая. Следовательно, решетка конгруэнций алгебры A оказывается неартиновой; противоречие. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Нумерация алгебры с артиновой решеткой конгруэнций отделима тогда и только тогда, когда она эффективно отделима.*

Таким образом, отделимые нумерации алгебр с артиновыми решетками конгруэнций вычислимы в смысле Ю. Л. Ершова, т. е. ядра таких нумераций совпадают с ядрами подходящих вычислимых нумераций некоторых семейств рекурсивно перечислимых множеств.

Следствие 3.2. *Отделимая нумерация алгебры с конечным числом конгруэнций эффективно отделима.*

В частности, эффективно отделима любая отделимая нумерация конечной алгебры эффективной сигнатуры.

Еще более частным случаем (в случае пустой сигнатуры) является эффективная отделимость отделимой нумерации любого конечного множества.

Следствие 3.3. *Решетка конгруэнций всякой алгебры, обладающей отделимой, но не эффективно отделимой нумерацией бесконечна.*

В самом деле, в этом случае решетка конгруэнций не может быть артиновой, а значит, она бесконечна.

Для алгебр с нётеровыми решетками конгруэнций теорема 3.1 не имеет места. Согласно следствию 3.2 такие алгебры должны быть бесконечными. Простейшей бесконечной алгеброй с нётеровой решеткой конгруэнций является алгебра следования $S = (\omega; s)$, где $s(x) = x + 1$. Более того, легко понять, что всякая ненулевая конгруэнция алгебры следования имеет конечный индекс. Покажем, что уже эта алгебра имеет отделимые (даже рекурсивно отделимые) нумерации, алгоритмические сложности нумерационных эквивалентностей которых превосходят любую наперед заданную арифметическую сложность.

Предложение 3.1. *Алгебра следования S имеет континуум нумераций, нумерационные эквивалентности которых рекурсивно отделимы.*

Доказательство. Пусть $E = \{\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \mid \varepsilon_k \in \{0, 1\}, k \in \omega\}$ — множество всех счетно-бесконечных последовательностей из нулей и единиц. Очевидно, что E имеет мощность континуума. Удобно представлять E в виде двоичного дерева с соответствующим естественным частичным упорядочением, левые ветвления которого помечены нулем, правые — единицей, а вершина — пустым множеством. Пусть $S_0, S_1, \ldots$ — равномерно рекурсивное дизъюнктное разбиение натурального ряда на счетное число рекурсивных копий алгебры следования, т. е. $S_k \cong S = (\omega; s)$, $s(x) = x + 1$ и s_k — первый элемент алгебры S_k. Объединение этих алгебр есть абсолютно свободная алгебра от бесконечного рекурсивного множества порождающих. Сопоставим каждой последовательности $\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots$ из E конгруэнцию θ^*_ε этой алгебры как конгруэнтное замыкание множества θ_ε, определенного следующим образом:

если $\varepsilon_k = 0$, то $\langle s_k, s_{k+1}\rangle \in \theta_\varepsilon$,

если $\varepsilon_k = 1$ то $\langle s(s_k), s_{k+1}\rangle \in \theta_\varepsilon$.

Неформально, конгруэнция θ^*_ε «склеивает» первые элементы экземпляров S_k и S_{k+1} алгебры S (второй элемент экземпляра S_k с первым элементом экземпляра S_{k+1}), если $\varepsilon_k = 0$ (если $\varepsilon_k = 1$), с соответствующими «склейками» всех образов отождествленных первых (первого и второго) элементов. Очевидно, что определенное таким образом отображение φ из множества E всех счетно-бесконечных последовательностей из нулей и единиц в множество всех конгруэнций рекурсивной абсолютно свободной алгебры $\big(\bigcup\limits_{k\in\omega} S_k; s\big)$ инъективно, поэтому мощность множества конгруэнций этой алгебры не меньше мощности E, т. е. континуума. Остается заметить, что каждая из построенных конгруэнций абсолютно свободной алгебры есть нумерация алгебры следования. При этом если в последовательности ε имеется бесконечно много единиц, то каждый класс $\varphi(\varepsilon)$-конгруэнтности конечен. Если в ε начиная с некоторого n все ε_n равны нулю, то почти все $\varphi(\varepsilon)$-классы бесконечны и рекурсивны. В любом случае имеем рекурсивно отделимую нумерацию. Предложение доказано.

Отметим, что эффективно порожденное топологическое пространство для каждой из построенных выше нумераций алгебры следования совпадает с рекурсивно порожденным пространством и является дискретным.

Следствие 3.4. *Для любого класса арифметической иерархии Клини — Мостовского существует отделимая нумерация алгебры с нётеровой решеткой конгруэнций, алгоритмическая сложность нумерационной эквивалентности которой не принадлежит данному классу.*

В [10] доказано, что следующие алгебры имеют нерекурсивные негативные нумерации:

а) арифметика Пеано $(\omega; s, +, *)$, где s — функция следования (в частности, нерекурсивной негативной нумерацией обладают алгебра следования и арифметика Пресбургера, и любые их позитивные нумерации, очевидно, рекурсивны);

(б) всякое бесконечное рекурсивно представимое поле $(F; 0, 1, +, *)$ (заметим, что любое поле есть простая алгебра);

(в) всякая рекурсивно представимая абелева группа без кручения;

(г) всякое бесконечное рекурсивно представимое векторное пространство над конечным полем;

(д) абсолютно свободная алгебра термов эффективной сигнатуры от свободного эффективного множества порождающих.

Примеры такого рода, которые легко умножить, показывают, что в определенном смысле негативные алгебры не менее естественны, нежели позитивные. В пользу этого наблюдения говорит также следующий факт.

Пусть K_{EffSep} — класс эффективно отделимых алгебр, K_{ArtSep} — класс отделимо нумерованных алгебр с артиновыми решетками конгруэнций. Все позитивные и негативные алгебры являются K_{EffSep}-алгебрами. Согласно теореме 3.1 всякая K_{ArtSep}-алгебра есть K_{EffSep}-алгебра, т. е. для класса алгебр с артиновыми решетками конгруэнций понятия отделимой и эффективно отделимой нумерации совпадают. В классе K_{ArtSep} присутствует весьма обширный и важный подкласс K_{ArtNeg} негативно нумерованных алгебр с артиновыми решетками конгруэнций, причем многие естественные K_{ArtNeg}-алгебры нерекурсивны. Пусть K_{ArtPos} — класс позитивно нумерованных алгебр с артиновыми решетками конгруэнций, тогда K_{ArtPos} также есть подкласс класса K_{ArtSep}. Очевидно, что $K_{\mathrm{ArtSep}} \setminus K_{\mathrm{ArtPos}} \neq \varnothing$ (например, связное двоеточие). Известно, что всякая K_{ArtPos}-алгебра, мощность решетки конгруэнций которой меньше континуума, рекурсивна [6], т. е. является K_{ArtNeg}-алгеброй. Класс нерекурсивных негативных алгебр с условием минимальности для решетки конгруэнций, т. е. $K_{\mathrm{ArtNeg}} \setminus K_{\mathrm{ArtPos}}$, как следует из вышесказанного, весьма богат. Известно также, что существуют как нерекурсивные позитивные [6], так и нерекурсивные негативные алгебры с нётеровыми решетками конгруэнций (для негативных алгебр соответствующие примеры почти тривиальны). Насколько богат класс $K_{\mathrm{ArtPos}} \setminus K_{\mathrm{ArtNeg}}$? Обширность указанной разности классов означала бы, что нерекурсивные позитивные алгебры с естественными условиями конечности встречаются «не менее часто», чем нерекурсивные негативные.

Вопрос «$K_{\mathrm{ArtPos}} \setminus K_{\mathrm{ArtNeg}} \neq \varnothing$?» в настоящий момент открыт.

Легко доказывается

Предложение 3.2. *Среди нумерованных алгебр существуют как подпрямо неразложимые, так и алгебры с артиновыми решетками конгруэнций, нумерационные эквивалентности которых обладают собственными вполне перечислимыми подмножествами, но не являются отделимыми.*

Приведем набросок доказательства. Пусть γ — фиксированная сильно вычислимая нумерация, сопоставляющая каждому натуральному числу n простую алгебру $\gamma(n)$, изоморфную $P = (\{0,1\}; p)$, где $p(0) = 0$, $p(1) = 0$, т. е. по номеру алгебры можно равномерно эффективно определить все ее элементы и действия операций. Удобно считать, что объединение основных множеств алгебр $\gamma(n)$ есть $\omega \setminus \{0\}$ и $\gamma(m) \cap \gamma(n) = \varnothing$ для различных m, n. Пусть, далее α, β — пара непересекающихся неперечислимых множеств, объединение которых есть ω. Построим эквивалентность η на $\omega \setminus \{0\}$ следующим образом: $\langle x, y\rangle \in \eta \leftrightarrow (x = y) \vee (\exists m \exists n : x \in \gamma(m) \wedge y \in \gamma(n) \wedge m, n \in \alpha) \vee (p(x) = x \wedge p(y) = y) \vee (p(x) \neq x \wedge p(y) \neq y \wedge \gamma^{-1}(x) \in \beta \wedge \gamma^{-1}(y) \in \beta)$, где $\gamma^{-1}(x)$ обозначает номер алгебры, содержащей число x. Неформально все элементы всех алгебр с γ-номерами из α «склеиваются» в единственной неподвижной точке алгебры P, туда же «засылаются» неподвижные точки всех алгебр, а все остальные элементы (γ-номера которых лежат в β и которые не являются неподвижными точками в содержащих их алгебрах) «склеиваются» во второй смежный класс. Легко заметить, что η является конгруэнцией, фактор-алгебра по которой изоморфна P и η не является отделимой. Добавив к полученной алгебре точку 0 и доопределив в этой точке значение операции p как любое число, не являющееся неподвижной точкой, получим трехэлементную нумерованную алгебру P^*, которая имеет рекурсивное η-замкнутое подмножество $\{0\}$, но не является отделимой. В то же время P^* изоморфна алгебре $(\{0,1,2\}; p)$, $p(0) = 0$, $p(1) = 0$, $p(2) = 1$, которая, как легко заметить, подпрямо неразложима (в любой ее ненулевой конгруэнции содержится пара $\langle 0, 1\rangle$) и в силу конечности имеет артинову решетку конгруэнций.

Следствие 3.5. *Существуют нумерации как подпрямо неразложимых алгебр, так и алгебр с артиновыми решетками конгруэнций, эффективно порожденные пространства которых нетривиальны, но неотделимы.*

Таким образом, следствие 2.4, верное для класса простых алгебр, нельзя обобщить на собственные расширения этого класса с более слабыми условиями конечности.

4. Аксиомы отделимости

В этом разделе рассмотрим некоторые усиления условия отделимости нумерации, которые во многих естественных случаях оказываются достаточными для ее эффективной отделимости и даже негативности.

Выше рассматривались отделимые нумерации, которые естественно назвать T_0-*отделимыми.* Попытка усиления понятия отделимости приводит к следующему определению.

Определение 4.1. Нумерация называется T_1-*отделимой* (T_2-, T_3-, T_4-*отделимой*), если для всякой пары натуральных чисел, различных по модулю ее нумерационной эквивалентности, найдутся перечислимая окрестность первого числа, не содержащая второе, и перечислимая окрестность второго, не содержащая первое (найдутся непересекающиеся перечислимые окрестности этих чисел; для всякого элемента и замкнутого в эффективно порожденной топологии множества, не содержащего этот элемент, найдутся их непересекающиеся окрестности; для всякой пары непересекающихся замкнутых множеств найдутся их непересекающиеся окрестности).

Обозначим через K_m $(0 \leq m \leq 4)$ класс пространств, гомеоморфных эффективно порожденным пространствам, для которых выполняется аксиома T_m-отделимости.

Предложение 4.1 [6]. $K_m \setminus K_{m+1} \neq \varnothing$ *для* $m \in \{0, 1\}$, $K_3 = K_4$.

Для $m = 0$ тривиальный пример дается связным двоеточием, так как если α — рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество, то двухэлементное множество $\{\alpha, \omega \setminus \alpha\}$ с естественной нумерацией, сопоставляющей каждому числу содержащее его множество, есть эффективно порожденное отделимое и не T_1-отделимое пространство.

Для $m = 1$ в [6] построен пример эффективно порожденного пространства, гомеоморфного счетно-бесконечному пространству Зарисского, поскольку непустыми вполне перечислимыми подмножествами в этом примере являются все коконечные множества, и только они.

Для $m = 3$ вопрос также тривиален, так как в предположении T_1-отделимости для счетных топологических пространств регулярность и нормальность равносильны.

Для $m = 2$ вопрос открыт.

В случае рекурсивно порожденных пространств ситуацию полностью описывает

Предложение 4.2 [6]. *Нумерация рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда рекурсивно порожденное топологическое пространство совершенно нормально.*

В частности, в этом случае выполняются все аксиомы T_m-отделимости ($m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$).

Определение 4.2. Нумерация называется *эффективно T_1-отделимой* (*T_2-отделимой*), если для нее существует вычислимая последовательность T_1-отделяющих (T_2-отделяющих) множеств.

Для T_1-отделимых (T_2-отделимых) нумераций естественно возникает вопрос о справедливости усиленных аналогов теоремы 2.1: всякая ли T_1-отделимая (T_2-отделимая) нумерованная алгебра аппроксимируется эффективно T_1-отделимыми (T_2-отделимыми)?

Если (A, ν) — нумерованная алгебра и K — класс нумерованных алгебр, однотипных с A, то назовем A *простой относительно класса* K (K*-простой*), если никакая ее неединичная фактор-алгебра не принадлежит K. Через $K_1 (K_2)$ обозначим класс эффективно T_1-отделимых (T_2-отделимых) нумерованных алгебр. Для алгебр пустой сигнатуры (т. е. нумерованных множеств) верна

Теорема 4.1. *Существует T_1-отделимое, но не T_2-отделимое нумерованное множество, никакое фактор-множество которого не является эффективно T_1-отделимым.*

Доказательству предпошлем следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Для любого счетного семейства множеств* $\Gamma = \{\gamma_i \mid i \in \omega\}$ *и всякого бесконечного* $\alpha \subseteq \omega$ *существует такое бесконечное* $\beta \subseteq \alpha$, *что никакое бесконечное подмножество* β *не принадлежит* Γ.

Доказательство основано на неэффективной диагонализации. Пусть γ_0, $\gamma_1, \ldots$ — фиксированный пересчет всех бесконечных множеств семейства Γ и $a_0, a_1, \ldots$ — пересчет в порядке строгого возрастания всех чисел из множества α. Построим подмножество β множества α по шагам.

Шаг 0. Если γ_0 содержит число из $\omega \setminus \alpha$, то $\beta_0 = \alpha$, в противном случае полагаем $\beta_0 = \alpha \setminus \{a_m\}$, где a_m — второй в порядке возрастания элемент из α, входящий в γ_0 (в этом случае γ_0 целиком содержится в α).

Шаг $s+1$. Если γ_{s+1} содержит число из $\omega \setminus \beta_s$, то $\beta_{s+1} = \beta_s$. В противном случае полагаем $\beta_{s+1} = \beta_s \setminus \{a_m\}$, где a_m — второй в порядке возрастания элемент из β_s, входящий в γ_s и превосходящий все ранее (т. е. на предыдущих шагах) использованные числа a_m. Конец шага $s+1$.

Определим $\beta = \bigcap\limits_{s \in \omega} \beta_s$. Легко заметить, что β бесконечно и $\omega \setminus \beta$ имеет непустое пересечение с каждым бесконечным Γ-множеством. Тем более эти пересечения непустые для любого расширения множества $\omega \setminus \beta$. Множество β уместно было бы назвать Γ-*иммунным*, так как предложенная конструкция обеспечивает непустоту пересечения каждого бесконечного Γ-множества с дополнением β. Допустим, что некоторое бесконечное подмножество γ множества β есть Γ-множество. Тогда по построению $\omega \setminus \gamma$ имеет непустое пересечение с любым Γ-множеством, в частности с γ, что невозможно; противоречие. Лемма доказана.

Пусть η — эквивалентность на ω с бесконечным числом смежных классов, для которой эффективно порожденная топология есть топология Зарисского, т. е. η-замкнутыми рекурсивно перечислимыми множествами являются те и только те, дополнения которых состоят из объединений конечных совокупностей η-классов. Пример такой эквивалентности, как отмечалось выше, можно найти в [6]. Рассмотрим нумерованное множество $(\omega/\eta, \nu)$, где нумерация ν обозначает естественное проектирование в классы η-эквивалентности. Пусть $\mathrm{tr}(\eta)$ — характеристическая трансверсаль эквивалентности η. Поскольку число эффективно отделимых эквивалентностей (а значит, и их характеристических трансверсалей) счетно, по лемме 4.1 существует бесконечное подмножество α множества $\mathrm{tr}(\eta)$, никакое бесконечное подмножество которого не является характеристической трансверсалью никакой эффективно отделимой эквивалентности. Пусть $a_0, a_1 \ldots$ — пересчет в порядке строгого возрастания всех чисел из α. Без ограничения общности можно считать, что $a_0 = 0$. Построим расширение η^* эквивалентности η, определенное следующим образом: $x = y \,(\mathrm{mod}\, \eta^*) \leftrightarrow \exists u, v \in \mathrm{tr}(\eta) \exists n \in \omega (a_n \leq u, v < a_{n+1}) \wedge x = u \,(\mathrm{mod}\, \eta) \wedge y = v \,(\mathrm{mod}\, \eta)$.

Неформально η^* получается из η «склеиванием» всех η-классов, минимальные η-представители которых лежат в полуинтервале линейно упорядоченного множества $(\alpha; \leq)$ между a_n и a_{n+1}, включая a_n. Очевидно, что $\mathrm{tr}(\eta^*) = \alpha$. Ясно также, что для всякого расширения η^{**} эквивалентности η^* справедливо $\mathrm{tr}(\eta^{**}) \subseteq \mathrm{tr}(\eta^*)$. Так как каждый η^*-класс получается из η «склеиванием» конечного числа η-классов, дополнение каждой точки в ω/η^* вполне перечислимо и соответствующее эффективно порожденное пространство также является пространством Зарисского. Никакой бесконечный фактор-объект для ω/η^* не является эффективно отделимым, так как иначе его характеристическая трансверсаль принадлежала бы классу характеристических трансверсалей эффективно отделимых эквивалентностей, что противоречит выбору α. Следовательно, никакой бесконечный фактор-объект нумерованного множества $(\omega/\eta^*, \nu^*)$, $\nu^*(x) = x/\eta^*)$, не является эффективно отделимым.

Если фактор-объект нумерованного множества $(\omega/\eta^*, \nu^*)$ по эквивалентности η^{**} конечен, то хотя бы один смежный η^{**}-класс состоит из бесконечного числа η^*-классов. Пусть это будет класс x/η^{**}. Тогда если $x \neq y \pmod{\eta^{**}}$, то любая вполне перечислимая окрестность элемента y/η^{**} содержит элемент x/η^{**}, т. е. конечные факторы вообще не могут быть T_1-отделимыми.

Таким образом, T_1-отделимое нумерованное множество $(\omega/\eta^*, \nu^*)$ не имеет гомоморфных образов, являющихся эффективно T_1-отделимыми. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Существует K_1-простая T_1-отделимая нумерованная алгебра, эффективно порожденное топологическое пространство которой является пространством Зарисского.*

Простейшими примерами эффективно T_2-отделимых нумераций являются позитивные и негативные нумерации. Более того, легко заметить, что в этих случаях имеет место равномерная T_2-отделимость, т. е. существует эффективная процедура, определенная на каждой паре чисел, различных по модулю нумерационной эквивалентности, значением которой является пара рекурсивно перечислимых индексов непересекающихся множеств, замкнутых относительно нумерационной эквивалентности, отделяющих эту пару чисел. Приведем пример T_2-отделимого нумерованного множества, не имеющего вычислимых факторов, эффективно порожденное пространство которого дискретно.

Предложение 4.3. *Существует T_2-отделимое нумерованное множество с вполне перечислимыми элементами, никакое фактор-множество которого не является эффективно T_1-отделимым.*

Доказательство. Пусть η — позитивная совершенная эквивалентность (т. е. позитивная эквивалентность, для которой нет нетривиальных η-замкнутых рекурсивных подмножеств, см. [1]). Легко показать, что характеристическая трансверсаль эффективно отделимой эквивалентности является Π^0_3-множеством. По лемме 4.1 существует такое $\alpha \subseteq \mathrm{tr}(\eta)$, что как само α, так и любое его бесконечное подмножество не являются Π^0_3-множествами. Точно так же, как в теореме 4.1, определим эквивалентность η^*: $x = y \pmod{\eta^*} \leftrightarrow \exists u, v \in \mathrm{tr}(\eta) \exists n \in \omega (a_n \leq u, v < a_{n+1}) \wedge x = u \pmod{\eta} \wedge y = v \pmod{\eta}$, где $a_0, a_1, \ldots$ — возрастающий пересчет множества α, и рассмотрим нумерованное множество $(\omega/\eta^*, \nu^*)$, $\nu^*(x) = x/\eta^*$. Каждый η^*-класс рекурсивно перечислим, так как он является объединением конечного числа η-классов. Поскольку $\mathrm{tr}(\eta^*) = \alpha$ и $\alpha \notin \Pi^0_3$, то ν^* не вычислима, т. е. не является эффективно отделимой. Характеристическая трансверсаль бесконечного фактор-множества $(\omega/\eta^*, \nu^*)$ есть бесконечное подмножество α, и потому никакое бесконечное фактор-множество нумерованного множества $(\omega/\eta^*, \nu^*)$ также не вычислимо.

Ни один из конечных факторов не является T_1-отделимым, так как допущение существования конечного T_1-отделимого нумерованного фактор-множества (которое обязано быть рекурсивным) противоречит совершенности эквивалентности η. Предложение доказано.

Следствие 4.2. *Существует K_1-простая T_2-отделимая нумерованная алгебра, эффективно порожденное пространство которой дискретно.*

Следствия 4.1 и 4.2 дополнительно подчеркивают фундаментальную роль теоремы Ю. Л. Ершова о вычислимых нумерациях с точки зрения теории нумерованных алгебр, так как для приведенных выше естественных усилений аксиом отделимости теорема об аппроксимации T_1-отделимых (T_2-отделимых) алгебр эффективно T_1-отделимыми (T_2-отделимыми) неверна. Заметим, что нумерованные множества, построенные в теореме 4.1 и в предложении 4.3, тривиально аппроксимируются эффективно отделимыми — связными двоеточиями.

Бесконечное подмножество α множества ω назовем *наследственно высоким*, если никакое его бесконечное подмножество (включая само α) не лежит в классе Π^0_3 арифметической иерархии Клини — Мостовского. Понятие наследственно высокого множества позволяет легко доказать

Предложение 4.4. *Всякая алгебра, обладающая отделимой нумерацией с наследственно высокой характеристической трансверсалью, финитно аппроксимируема.*

Действительно, если ν — отделимая нумерация алгебры A и $\mathrm{tr}(\nu)$ наследственно высокая, то любая бесконечная фактор-алгебра нумерованной алгебры (A, ν), в том числе по нулевой конгруэнции, также имеет наследственно высокую характеристическую трансверсаль и потому не может быть эффективно отделимой. Однако по теореме 2.1 (A, ν) аппроксимируется эффективно отделимыми алгебрами, следовательно, все они конечны, т. е. A финитно аппроксимируема.

Особое место как в теории решеток конгруэнций универсальных алгебр, так и в теории вычислимых структур принадлежит простым алгебрам. Оказалось, что свойство T_1-отделимости (T_2-отделимости) тесно связано с негативностью нумераций не только простых алгебр, но и алгебр с артиновыми решетками конгруэнций, а также подпрямо неразложимых алгебр. В случае отделимых алгебр простейшим примером нумерованной простой алгебры, не являющейся негативной, является связное двоеточие (см. случай $m = 0$ предложения 4.1). Для T_2-отделимых простых алгебр пример не негативной алгебры неизвестен. Если такая алгебра существует, то она не имеет собственных вполне рекурсивных подмножеств [6], но согласно предложению 2.1 является эффективно отделимой, и, значит, сложность ее нумерационной эквивалентности не выходит за пределы индуктивного класса Π^0_2 иерархии Клини — Мостовского. С другой стороны (если такого примера нет), не видно явных причин, вынуждающих T_2-отделимые нумерации простых алгебр быть негативными. Таким образом, естественный вопрос о существовании не негативной T_2-отделимой (или даже хотя бы T_1-отделимой) нумерованной простой алгебры на момент написания данной статьи остается открытым.

В заключение продемонстрируем возможность наличия тесных связей между отделимостью и негативностью на двух естественных примерах алгебр, всякие T_2-отделимые (T_1-отделимые) нумерации которых негативны.

Согласно следствию 2.1 (или теореме 3.1) для простейшей подпрямо неразложимой бесконечной алгебры с артиновой решеткой конгруэнций — алгебры предшествования $(\omega; p)$, где ω — множество натуральных чисел, $p(x+1) = x$, $p(0) = 0$, всякая ее отделимая нумерация эффективно отделима.

Предложение 4.5. *Всякая T_2-отделимая нумерация алгебры предшество-*

вания негативна.

Доказательство. Пусть ν — T_2-отделимая нумерация алгебры предшествования $P = (\omega; p)$, η — нумерационная эквивалентность нумерации ν. На самом деле доказательство можно провести в гораздо более слабых предположениях T_2-отделимости элементов 0 и 1 алгебры P (т. е. $p(0) = 0$, $p(1) = 0$). Пусть α, β — η-замкнутые непересекающиеся рекурсивно перечислимые множества такие, что $0 \in \nu\alpha$ и $1 \in \nu\beta$. Тогда $x \neq y \,(\operatorname{mod} \eta) \leftrightarrow \exists n \in \omega[(p^n(x) \in \alpha \wedge p^n(y) \in \beta) \vee (p^n(y) \in \alpha \wedge p^n(x) \in \beta)]$, где $p^0(z) = z$. Предложение доказано.

Заметим, что в доказательстве предложения 4.5 не используются ни T_2-отделимость нумерации ν (достаточно предположить T_2-отделимость неподвижной точки и ее непосредственного последователя), ни теорема 2.1 об аппроксимируемости эффективно отделимыми алгебрами, ни теорема 3.1 о вычислимости отделимой нумерации алгебры с артиновой решеткой конгруэнций, что дает повод для предположения возможности наблюдения аналогичных эффектов негативности в достаточно широких классах T_2-отделимых нумерованных алгебр.

Легко построить пример отделимой нумерации алгебры предшествования, не являющейся негативной. Вопрос о существовании T_1-отделимой, но не негативной нумерации этой алгебры открыт. Сложность построения контрпримера (если он существует) связана с построением T_1-отделимой нехаусдорфовой нумерации, что само по себе сопряжено с определенными трудностями.

Отметим, что далеко не всякая негативная нумерация алгебры предшествования позитивна (а значит, и рекурсивна) [6].

Алгеброй Мальцева назовем алгебру, удовлетворяющую тождествам $\varphi(x, x, z) = z$, $\varphi(x, z, z) = x$, где φ — термальный многочлен в сигнатуре исходной алгебры [3] (алгебра из конгруэнц-перестановочного многообразия).

Рассмотрим алгебру $M = (\omega; F)$, где $F(x, y, z) = z$ при $x = y$ и $F(x, y, z) = x$ при $x \neq y$. Очевидно, что M — алгебра Мальцева.

Предложение 4.6. *Всякая T_1-отделимая нумерация алгебры M рекурсивна.*

Доказательство. Пусть ν — T_1-отделимая нумерация алгебры M, η — нумерационная эквивалентность нумерации ν. Так же, как в случае предложения 4.5, доказательство можно провести при более слабых предположениях. Допустим, что имеется пара таких различных элементов a, b, что для подходящих η-замкнутых рекурсивно перечислимых множеств α, β имеем $a \in \nu\alpha \wedge b \notin \nu\alpha$ и $b \in \nu\beta \wedge a \notin \nu\beta$. Докажем, что элемент a вполне рекурсивен. В самом деле, пусть $\nu m = a$ и $\nu n = b$, тогда $x = m \,(\operatorname{mod} \eta) \leftrightarrow f(m, x, n) \in \beta$, где f обозначает рекурсивную функцию, представляющую операцию F в нумерации ν.

Заметим, что область значений одноместной рекурсивной функции $\lambda x.f(m, x, n)$ с параметрами m, n есть подмножество $m/\eta \cup n/\eta$ и потому не пересекается с множеством $\alpha \cap \beta$. Если $x \neq m \,(\operatorname{mod} \eta)$, то $f(m, x, n) \in \alpha$, следовательно, приведенная процедура определения принадлежности классу m/η успешно и корректно завершается для каждого $x \in \omega$, т. е. $\nu^{-1}(a)$ рекурсивно. Положим $\gamma = \nu^{-1}(a)$.

Покажем, что алгебра M простая. В самом деле, пусть $a \neq b$, θ — ненулевая конгруэнция алгебры M, «склеивающая» пару элементов a, b, а z — произвольный элемент этой алгебры. Тогда $a = f(a, b, z) = f(a, a, z) = z \,(\operatorname{mod} \theta)$, откуда следует, что θ «склеивает» любые два элемента. Поскольку M простая, согласно предложению 2.3 нумерация ν негативна.

Легко заметить, что

$$x = y \, (\mathrm{mod}\, \eta) \leftrightarrow \exists z [x \neq z \, (\mathrm{mod}\, \eta) \wedge f(x, y, z) \neq x \, (\mathrm{mod}\, \eta)].$$

В силу негативности η правая часть вышеуказанной равносильности рекурсивно перечислима, т. е. η позитивна, а значит, и рекурсивна. Предложение доказано.

Таким образом, в некоторых важных частных случаях, для известных типов алгебр, существование T_1-отделимых (T_2-отделимых) нумераций может являться достаточным условием их негативности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
2. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Науч. книга, 1999.
3. *Мальцев А. И.* К общей теории алгебраических систем // Мат. сб. 1954. Т. 35, № 1. С. 3–20.
4. *Мальцев А. И.* Конструктивные алгебры. I // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 3–60.
5. *Мальцев А. И.* Позитивные и негативные нумерации // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160, № 2. С. 278–280.
6. *Касымов Н. Х.* Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 3. С. 145–176.
7. *Касымов Н. Х.* Об алгебрах над негативными эквивалентностями // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 1. С. 76–80.
8. *Касымов Н. Х.* О полугруппах рекурсивных автоморфизмов нумерованных систем // Докл. АН Республики Узбекистан. 1996. № 12. С. 3–4.
9. *Касымов Н. Х., Морозов А. С.* Об определимости линейных порядков над негативными эквивалентностями // Алгебра и логика (в печати).
10. *Khoussainov B., Slaman T., Semukhin P.* Π^0_1-Presentations of algebras // Archive Math. Logic. 2006. V. 45, N 6. P. 769–781.

Статья поступила 6 октября 2014 г.

Касымов Надимулла Хабибуллаевич
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, 4, Ташкент 100174, Узбекистан
nadim59@mail.ru