*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1*

*УДК 512.54*

# О $\mathscr{M}_p$–ДОБАВЛЯЕМЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

**Б. Гао, Ц. Танг, Л. Мяо**

**Аннотация.** Подгруппа $K$ группы $G$ называется *$\mathscr{M}_p$-добавляемой в $G$*, если существует подгруппа $B$ в $G$ такая, что $G = KB$ и $TB < G$ для каждой максимальной подгруппы $T$ в $K$ такой, что $|K : T| = p^\alpha$. Целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения. Пусть $p$ — простой делитель $|G|$ и $H$ — $p$-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую $p$-подгруппу группы $G$. Предположим, что в $H$ имеется подгруппа $D$ такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Тогда $G$ $p$-нильпотентна, если и только если всякая подгруппа $T$ в $H$ со свойством $|T| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G$ и $N_G(T_p)/C_G(T_p)$ — $p$-группа.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.103

**Ключевые слова:** $p$-нильпотентная подгруппа, композиционный фактор, $\mathscr{M}_p$-добавляемая подгруппа, конечная группа.

## 1. Введение

Все подгруппы в статье конечны. Большая часть обозначений стандартна (см. [1–3]). Пусть $\pi$ — множество простых чисел. Неединичная подгруппа $H$ в группе $G$ называется *$\mathscr{M}_\pi$-добавляемой в $G$* [4], если существует подгруппа $B$ такая, что $G = HB$ и $H_1B < G$ для каждой максимальной подгруппы $H_1$ в $H$ со свойством $\pi(H : H_1) \subseteq \pi$. Если $\pi = \{p\}$, то $H$ называется *$\mathscr{M}_p$-добавляемой подгруппой.* Если $\pi = \pi(G)$, то $H$ — $\mathscr{M}$-добавляемая подгруппа. С использованием определения $\mathscr{M}_p$-добавляемой подгруппы в [4] получены следующие основные результаты.

**Теорема 1.** *Пусть $p$ — наименьший простой делитель порядка группы $G$ и $H$ — $p$-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую $p$-подгруппу группы $G$. Если $H$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G$, то $G$ $p$-сверхразрешима.*

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — группа, $\pi(G) = \{p_1, p_2 = p, \dots, p_n\}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, и $H$ — $p$-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую $p$-подгруппу группы $G$. Если $H$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G$, то $G$ $p$-сверхразрешима.*

В [5] обобщены два приведенных выше утверждения следующим образом.

**Теорема 3.** *Пусть $G$ — конечная группа и $H$ — $p$-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую $p$-подгруппу $P$ группы $G$, где $p$ — наименьший простой делитель $|G|$. Предположим, что в $H$ имеется подгруппа $D$ такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Если всякая подгруппа $T$ в $H$ со свойством $|T| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G$, то $G$ $p$-сверхразрешима.*

This research is supported by NSFC (Grant #11271016) and Qing Lan project of Jiangsu Province and High-level personnel of support program of Yangzhou University. Long Miao is the corresponding author.

**Теорема 4.** *Пусть $G$ — группа, $\pi(G) = \{p_1, p_2 = p, \dots, p_n\}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, и пусть $H$ — $p$-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую $p$-подгруппу $P$ группы $G$. Предположим, что в $H$ имеется подгруппа $D$ такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Если всякая подгруппа $T$ в $H$ со свойством $|T| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G$, то $G$ $p$-сверхразрешима.*

В конце работы [4] авторы делают следующее

Замечание. В простой группе $G = A_5$ силовская 5-подгруппа $\mathscr{M}$-добавляема в $G$. Поэтому ограничения на простое число $p$ в теоремах 1 и 2 существенны.

Напомним, что подгруппа $H$ в группе $G$ называется *дополняемой в* $G$, если существует подгруппа $K$ в $G$ такая, что $G = HK$ и $H \cap K = 1$. В 1937 г. в [6] Холл установил, что группа $G$ разрешима тогда и только тогда, когда каждая силовская подгруппа в $G$ дополняема в $G$. Более того, в 1982 г. в [7] Арад и Уорд доказали, что группа $G$ разрешима тогда и только тогда, когда ее силовские 2- и 3-подгруппы дополняемы в $G$. Простые числа 2 и 3 удовлетворяют ограничениям теорем 1 и 2 соответственно. В продолжение этих работ мы устанавливаем следующий структурный результат.

**Теорема 5.** *Пусть $H$ — 5-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую 5-подгруппу $P$ в $G$. Предположим, что в $H$ имеется подгруппа $D$ со свойством $D_5 \neq 1$ и $|H : D| = 5^\alpha$. Если всякая подгруппа $T$ группы $H$ такова, что $|T| = |D|$ и $\mathscr{M}_5$-добавляема в $G$, то каждый композиционный фактор $E/K$ группы $G$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) *$E/K$ — циклическая группа порядка 5;*
(2) *$E/K$ — $5'$-подгруппа;*
(3) *группа $E/K$ изоморфна группе $A_5$.*

Теорема 5.8 из [8] утверждает, что $G$ разрешима, если $(|G|, 15) = 1$. Из теоремы 5 немедленно вытекает

**Следствие 6.** *Пусть $\pi = \{3, 5\}$. Для каждого $p \in \pi$ пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$ и $H$ — $p$-нильпотентная подгруппа в $G$, содержащая $P$. Если в $H$ имеется подгруппа $D$ со свойством $D_p \neq 1$, $|H : D| = p^\alpha$, и всякая подгруппа $T$ в $H$ такая, что $|T| = |D|$, $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G$, то $G$ разрешима.*

Далее, известная теорема Фробениуса [3, теорема 5.8] утверждает, что группа $G$ $p$-нильпотентна, если $N_G(U)/C_G(U)$ — $p$-группа для каждой $p$-подгруппы $U$ в $G$. В настоящей работе мы заменяем некоторые условия теоремы Фробениуса и получаем следующий основной результат.

**Теорема 7.** *Пусть $p$ — простой делитель $|G|$ и $H$ — $p$-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую $p$-подгруппу группы $G$. Предположим, что в $H$ имеется подгруппа $D$ такая, что $D_p \neq 1$ и $|H : D| = p^\alpha$. Тогда $G$ $p$-нильпотентна в том и только том случае, когда всякая подгруппа $T$ группы $H$ со свойством $|T| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G$ и $N_G(T_p)/C_G(T_p)$ — $p$-группа.*

## 2. Предварительные сведения

Для удобства читателя приведем результаты, используемые ниже.

**Лемма 2.1** [4, леммы 2, 3]. *Пусть $H$ — подгруппа группы $G$ и $p$ — простой делитель $|G|$. Если подгруппа $H$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G$, то справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $H \leq M \leq G$, то $H$ также $\mathscr{M}_p$-добавляема в $M$.*

(2) *Если $N \trianglelefteq G$ и $N \leq H$, то подгруппа $H/N$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G/N$.*

(3) *Если $K$ — нормальная $p'$-подгруппа, то подгруппа $HK/K$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G/K$.*

**Лемма 2.2** [4, лемма 4]. *Пусть $H$ — $\mathscr{M}_p$-добавляемая подгруппа группы $G$, и пусть $B$ — $\mathscr{M}_p$-добавление к $H$. Если $H_1$ — максимальная подгруппа в $H$ и $p \mid |H : H_1|$, то $|G : H_1B| = |H : H_1|$.*

**Лемма 2.3** [2, теорема 1.8.17]. *Пусть $N$ — разрешимая нормальная подгруппа группы $G$. Если $N \cap \Phi(G) = 1$, то $F(N)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы $G$, содержащихся в $N$.*

**Лемма 2.4** [9, теорема 4.5]. *Пусть $G$ — группа и $H$ — подгруппа в $G$. Если $|G : H| = n$, то $G/H_G \hookrightarrow S_n$.*

**Лемма 2.5** [2, лемма 3.6.10]. *Пусть $K$ — нормальная подгруппа группы $G$ и $P$ — $p$-подгруппа в $G$, где $p$ — простой делитель $|G|$. Тогда $N_{G/K}(PK/K) = N_G(P_1)K/K$, где $P_1$ — силовская $p$-подгруппа группы $PK$.*

**Лемма 2.6.** *Пусть $H$ — 5-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую 5-подгруппу $P$ группы $G$. Если подгруппа $H$ $\mathscr{M}_5$-добавляема в $G$, то каждый композиционный фактор $E/K$ группы $G$ удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) *группа $E/K$ циклическая порядка 5;*

(2) *$E/K$ — $5'$-подгруппа;*

(3) *группа $E/K$ изоморфна $A_5$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно и $G$ — контрпример наименьшего порядка. Тогда $G$ не 5-разрешима. В силу теорем 1 и 2 из [4] получаем, что $2 \mid |G|$ и $3 \mid |G|$. Если $5 \nmid |G|$, то каждый композиционный фактор группы $G$ является $5'$-группой. Поэтому $15 \mid |G|$. По предположению существует подгруппа $B$ группы $G$ такая, что $G = HB$ и $H_iB < G$ для всякой максимальной подгруппы $H_i$ в $H$ такой, что $|H : H_i| = 5$. Пусть $i = 1, 2, \ldots, n$. Ясно, что $H_i = P_iH_{5'}$, где $P_i$ — максимальная подгруппа в $P$. Кроме того, по лемме 2.2 имеем $|G : H_iB| = |H : H_i| = 5$, и тогда по лемме 2.4 группа $G/(H_iB)_G$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_5$. Если $(H_iB)_G = 1$ для некоторого $i$, то группа $G$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_5$. Поэтому в силу строения группы $S_5$ порядок $|G|$ равен 120 или 60, т. е. каждый композиционный фактор группы $G$ является 2-подгруппой или изоморфен группе $A_5$; противоречие. Тем самым можно утверждать, что $(H_iB)_G \neq 1$ для любого $i$. Согласно структуре группы $S_5$ порядок $|G/(H_iB)_G|$ равен 120, 60, 20, 10 или 5 и потому каждый композиционный фактор группы $G/(H_iB)_G$ является циклической группой порядка 5, $5'$-подгруппой или изоморфен $A_5$.

Если $H(H_iB)_G < G$ для некоторого $i$, то подгруппа $H(H_iB)_G$ удовлетворяет условиям теоремы в силу леммы 2.1(1). Поэтому теорема остается верной для $(H_iB)_G$, поскольку $1 < (H_iB)_G \trianglelefteq H(H_iB)_G$. Следовательно, каждый композиционный фактор группы $G$ есть циклическая группа порядка 5 или $5'$-подгруппа, или он изоморфен $A_5$; противоречие. Тем самым можно утверждать, что $H(H_iB)_G = G$ для каждого $i$. Так как группа $H$ 5-нильпотентна, группа $G/(H_iB)_G$ тоже 5-нильпотентна. Поэтому группа $G/\bigcap\limits_{i=1}^{n}(H_iB)_G$ 5-нильпотентна.

Очевидно, $P \cap (H_iB)_G = P_i$ для каждой подгруппы $H_i$ группы $H$. Имеем

$$P \cap \left( \bigcap_{i=1}^{n} (H_iB)_G \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (P \cap (H_iB)_G) = \bigcap_{i=1}^{n} P_i = \Phi(P),$$

поэтому группа $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (H_iB)_G$ 5-нильпотентна по теореме Тейта [3, IV.4.7]. Значит, группа $G$ 5-разрешима; противоречие.

Итоговое противоречие завершает наше доказательство.

**Лемма 2.7.** *Пусть $p$ — простой делитель $|G|$ и $H$ — $p$-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую $p$-подгруппу $P$ группы $G$. Предположим, что в $H$ имеется подгруппа $D$ со свойством $|H : D| = p^{n-1}$, где $|P| = p^n$. Если всякая подгруппа $T$ в $H$ такая, что $|T| = |D|$, $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G$ и $N_G(T_p)/C_G(T_p)$ — $p$-группа, то $G$ $p$-нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно, и пусть $G$ — контрпример наименьшего порядка. Пусть $T$ — подгруппа группы $H$ такая, что $|T| = |D|$. По предположению существует подгруппа $B$ в $G$ такая, что $G = TB$ и $T_{p'}B < G$. Это значит, что всякая подгруппа порядка $p$ в $P$ $\mathscr{M}$-добавляема в $G$. Так как $G$ не $p$-нильпотентна, в $G$ имеется минимальная не $p$-нильпотентная подгруппа $A$ вида $A = A_p \rtimes Q$, где $Q$ — силовская $q$-подгруппа группы $A$. Допустим, что $A < G$. Если $|A_p| = p$, то $A_p \leq C_A(A_p)$, поскольку

$$N_A(A_p)/C_A(A_p) \cong (N_G(A_p) \cap A)C_G(A_p)/C_G(A_p) \leq N_G(A_p)/C_G(A_p)$$

является $p$-группой. Поэтому $N_A(A_p) = C_A(A_p)$ и, значит, группа $A$ $p$-нильпотентна; противоречие. Если $|A_p| > p$, то по лемме 2.1(1) $A$ удовлетворяет условиям теоремы. Тем самым из минимальности $G$ следует, что $A$ $p$-нильпотентна; противоречие. Следовательно, можно утверждать, что $G = A = P \rtimes Q$. По теореме IV5.4 из [5] $G = p^a q^b$ и группа $Q$ циклическая. Если $p < q$, то группа $G$ $p$-нильпотентна по теореме 3; противоречие. Если $p < q$, то в силу теоремы 4 группа $G$ $p$-сверхразрешима и потому сверхразрешима. Пусть $L$ — минимальная нормальная подгруппа в $G$ порядка $p$. По предположению $L$ $\mathscr{M}$-добавляема в $G$. Так как всякая собственная подгруппа в $G$ нильпотентна, $G$ $p$-нильпотентна; противоречие.

Итоговое противоречие завершает доказательство.

**Лемма 2.8.** *Пусть $p$ — простой делитель $|G|$ и $H$ — $p$-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую $p$-подгруппу $P$ группы $G$. Тогда $G$ $p$-нильпотентна, если и только если $H$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G$ и $N_G(P)/C_G(P)$ — $p$-группа.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что утверждение неверно и $G$ — контрпример наименьшего порядка. Подгруппа $P$ не является абелевой силовской подгруппой, иначе $N_G(P) = C_G(P)$, поскольку $N_G(P)/C_G(P)$ — $p$-группа. Поэтому $G$ — $p$-нильпотентная группа по теорема Бернсайда; противоречие.

Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа в $H$, и пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — все максимальные подгруппы в $P$. Так как $H$ $p$-нильпотентна, $H$ содержит максимальную подгруппу $H_i = P_iH_{p'}$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. По предположению существует подгруппа $B$ в $G$ такая, что $G = HB$ и $H_iB < G$ для всякой максимальной подгруппы $H_i$ в $H$. По лемме 2.2 $|G : H_iB| = |H : H_i| = p$, и тогда группа $G/(H_iB)_G$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_p$ по лемме 2.4. Если $(H_iB)_G = 1$ для некоторого $i$, то $|G_p| = p$; противоречие. Поэтому $(H_iB)_G \neq 1$ для всех $(H_iB)_G$. Ясно, что $P \cap (H_iB)_G = P_i$, тем самым

$$P \cap \left( \bigcap_{i=1}^{n} (H_iB)_G \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (P \cap (H_iB)_G) = \bigcap_{i=1}^{n} P_i = \Phi(P).$$

Если $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (H_iB)_G = 1$, то $\Phi(P) = 1$; противоречие. Поэтому группа $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (H_iB)_G$ $p$-нильпотентна по теореме Тейта. Пусть $S$ — нормальная холлова $p'$-подгруппа. Если $s \neq 1$, то $G/S$ удовлетворяет условиям теоремы. Из минимальности $G$ следует, что $G/S$ — $p$-нильпотентна и потому $G$ тоже $p$-нильпотентна. Поэтому $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (H_iB)_G = \Phi(P)$ и, следовательно, $G$ $p$-нильпотентна; противоречие.

Итоговое противоречие завершает доказательство.

## 3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 5. Допустим, что утверждение неверно и $G$ — контрпример наименьшего порядка. Прежде всего получаем, что $2 \mid |G|$ и $3 \mid |G|$ по теоремам 3.3 и 3.5 из [5]. Если $5 \nmid |G|$, то каждый композиционный фактор группы $G$ является $5'$-группой; противоречие. Поэтому $15 \mid |G|$. Пусть $T$ — подгруппа группы $H$ такая, что $|T| = |D|$. Если $D_p = P$, то в силу леммы 2.8 каждый композиционный фактор группы $G$ является циклической группой порядка 5 или $5'$-подгруппой или изоморфен $A_5$; противоречие. Поэтому можно утверждать, что $|H : D| \neq 1$.

По условию теоремы существует подгруппа $B$ группы $G$ такая, что $G = TB$ и $T_iB < G$ для всякой максимальной подгруппы $T_i$ в $T$ со свойством $|T : T_i| = 5$. Далее, по леммам 2.2 и 2.4 $|G : T_iB| = |T : T_i| = 5$ и группа $G/(T_iB)_G$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_5$. Если $(T_iB)_G = 1$ для некоторого $i$, то $G$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_5$. Поэтому $|G|$ равен 120 или 60 в силу структуры $S_5$. Значит, каждый композиционный фактор группы $G$ есть 2-подгруппа или изоморфен $A_5$; противоречие. Тем самым можно утверждать, что $(T_iB)_G \neq 1$ для каждого $i$.

Если $H(T_iB)_G < G$ для некоторого $i$, то $H(T_iB)_G$ удовлетворяет условиям теоремы по лемме 2.1. Поэтому каждый композиционный фактор группы $H(T_iB)_G$ циклический порядка 5 или является $5'$-подгруппой, или изоморфен $A_5$, поэтому $(T_iB)_G$, так как $1 < (T_iB)_G \trianglelefteq H(T_iB)_G$. В силу структуры группы $S_5$ каждый композиционный фактор группы $G$ является циклической группой порядка 5 или $5'$-подгруппой, или изоморфен $A_5$; противоречие.

Стало быть, можно утверждать, что $H(T_iB)_G = G$. Так как $H$ 5-нильпотентна, группа $G/(T_iB)_G$ 5-нильпотентна, поэтому $|G/(T_iB)_G| = 5$ в силу структуры $S_5$, т. е. $T_iB = (T_iB)_G \trianglelefteq G$ для каждой подгруппы $T_i$ в $T$ со свойством $|T : T_i| = 5$. Пусть $P_1 = P \cap T_iB$. Тогда $P_1$ — силовская подгруппа группы $T_iB$, а также максимальная подгруппа в $P$. Тем самым $H_1 = P_1H_{5'}$ — 5-нильпотентная подгруппа в $T_iB$, содержащая силовскую 5-подгруппу группы $T_iB$.

Если $|H : D| = 5$, то по лемме 2.1(1) $H_1$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $T_iB$. Поэтому по лемме 2.6 $T_iB$ удовлетворяет условиям теоремы и, следовательно, является композиционным фактором группы $G$; противоречие. Если $|H : D| > 5$, то $T_iB$ удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому каждый композиционный фактор группы $T_iB$ является циклической группой порядка 5 или $5'$-подгруппой или изоморфен $A_5$ и является композиционным фактором группы $G$; противоречие.

Итоговое противоречие завершает доказательство.

Доказательство теоремы 7. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что утверждение неверно и $G$ — контрпример наименьшего порядка. Получим противоречие из следующих шагов.

Шаг 1. $O_{p'}(G) = 1$.

Допустим, что $O_{p'}(G) \neq 1$. Рассмотрим фактор-группу $G/O_{p'}(G)$. По леммам 2.1(3) и 2.5 $G/O_{p'}(G)$ удовлетворяет условиям теоремы, и из минимальности выбора $G$ следует, что группа $G/O_{p'}(G)$ $p$-нильпотентна. Поэтому группа $G$ $p$-нильпотентна; противоречие. Значит, $O_{p'}(G) = 1$.

Шаг 2. $G$ не является неабелевой простой группой.

Пусть $T$ — подгруппа группы $H$ такая, что $|T| = |D|$. По предположению существует подгруппа $B$ в $G$ такая, что $G = TB$ и $T_iB < G$ для каждой максимальной подгруппы $T_i$ в $H$ такой, что $|T : T_i| = p$. Из леммы 2.2 следует, что $|G : T_iB| = |T : T_i| = p$. Поэтому группа $G/(T_iB)_G$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_p$. Если $(T_iB)_G = 1$ для некоторого $i$, то $G$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_p$; противоречие.

Шаг 3. $|D_p| \neq |P| > p$ и $|D_p| \neq p$.

Если $|D_p| = |P|$, то $G$ $p$-нильпотентна по лемме 2.8; противоречие. Если $|P| = p$, то $|D_p| = |P|$ в силу выбора $D$; противоречие. Если $|D_p| = p$, то всякая подгруппа $T$ в $H$ со свойством $|T| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G$ и $|T_p| = p$. Поэтому $G$ $p$-нильпотентна по лемме 2.7; противоречие.

Шаг 4. $O_p(G) \neq 1$.

Пусть $O_p(G) = 1$. В силу шага 2 в $G$ имеется минимальная нормальная подгруппа, скажем $L$. Рассмотрим $LH$. Если $LH < G$, то всякая подгруппа $T$ группы $H$ такая, что $|T| = |D|$, $\mathscr{M}_p$-добавляема в $LH$ по лемме 2.1(1). Кроме того,

$$N_{LH}(T_p)/C_{LH}(T_p) \cong (N_G(T_p) \cap LH)C_G(T_p)/C_G(T_p) \leq N_G(T_p)/C_G(T_p)$$

— $p$-группа. Поэтому группа $LH$ удовлетворяет условиям теоремы. Из минимальности группы $G$ следует, что группа $LH$ $p$-нильпотентна и $L$ также $p$-нильпотентна. Из шага 1 вытекает, что $1 \neq L \leq O_p(G)$; противоречие. Поэтому можно утверждать, что $LH = G$ для всякой минимальной нормальной подгруппы $L$ в $G$. Тогда $G/L = LH/L \cong H/H \cap L$ $p$-нильпотентна. Стало быть, $L$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в $G$ и $L \nleq \Phi(G)$.

Пусть $T$ — подгруппа группы $H$ такая, что $|T| = |D|$. По условию существует подгруппа $B$ группы $G$ такая, что $G = TB$ и $T_iB < G$ для всякой максимальной подгруппы $T_i$ группы $T$. В силу леммы 2.2 $|G : T_iB| = |T : T_i| = p$, и потому группа $G/(T_iB)_G$ изоморфна подгруппе симметрической группы $S_p$ по лемме 2.4. Если существует $(T_iB)_G$ такая, что $(T_iB)_G = 1$, то $G \hookrightarrow S_p$, поэтому $|P| = p$, что противоречит шагу 3. Тем самым можно утверждать, что $(T_iB)_G \neq 1$ и $L \leq (T_iB)_G$ для каждой $T_iB$. Если $|H : D| = p$, то положим $N = (T_iB)_p$. Ясно, что $N$ — максимальная подгруппа группы $P$ и $NH_{p'}$ — $p$-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую подгруппу $N$ группы $T_iB$. В силу леммы 2.1(1) группа $NH_{p'}$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $T_iB$. Кроме того,

$$N_{T_iB}(N)/C_{T_iB}(N) \cong (N_G(N) \cap T_iB)C_G(N)/C_G(N) \leq N_G(N)/C_G(N)$$

— $p$-группа. Поэтому из леммы 2.8 следует, что $T_iB$ $p$-нильпотентна и, значит, $L$ тоже $p$-нильпотентна. В силу шага 1 $L$ — $p$-группа и $O_p(G) \neq 1$; противоречие. Следовательно, можно утверждать, что $|H : D| > p$. Пусть $X = H \cap T_iB$. Тогда

$$|G : T_iB| = |HT_iB : T_iB| = |H : H \cap T_iB| = |H : X| = p.$$

Если $X = 1$, то $|P| = p$, что противоречит шагу 3. Поэтому $X \neq 1$, $|D| < |X|$ и $X$ — $p$-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую $p$-подгруппу группы $T_iB$. Кроме того, по предположению и лемме 2.1(1) каждая подгруппа $S$ группы $X$ со свойством $|S| = |D|$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $T_iB$. С другой стороны,

$$N_{T_iB}(S_p)/C_{T_iB}(S_p) \cong (N_G(S_p) \cap T_iB)C_G(S_p)/C_G(S_p) \leq N_G(S_p)/C_G(S_p)$$

— $p$-группа. Из минимальности $G$ следует, что $T_iB$ $p$-нильпотентна и $L$ тоже нильпотентна. Из шага 1 следует, что $1 \neq L \leq O_p(G)$; противоречие.

Шаг 5. Пусть $N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$, содержащаяся в $O_p(G)$. Тогда $|D_p| > |N|$.

Если $|D_p| = |N|$, то в силу предположения $T = NH_{p'}$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G$. Существует подгруппа $B$ в $G$ такая, что $G = TB$ и $T_iB < G$ для всякой максимальной подгруппы $T_i$ группы $T$ такой, что $|T : T_i| = p$. Очевидно, что $N \cap T_iB = 1$. По лемме 2.2 $p = |G : T_iB| = |NT_iB : T_iB| = |N|$. Поэтому $|D_p| = |N| = p$, что противоречит шагу 3. Если $|D_p| < |N|$, то выберем собственную подгруппу $L$ в $N$ такую, что $|D_p| = |L|$. Пусть $T = LH_{p'}$. По предположению существует подгруппа $B$ группы $G$ такая, что $G = TB$ и $T_iB < G$ для всякой максимальной подгруппы $T_i$ в $T$ со свойством $|T : T_i| = p$. Ясно, что $G = N(T_iB) = L(T_iB)$ и $N \cap T_iB = 1$. Поэтому $|N(T_iB)| = |L(T_iB)|$ и, значит, $|N||(T_iB)| = |L||(T_iB)|$, т. е. $|N| = |L|$; противоречие.

Шаг 6. Группа $G/N$ $p$-нильпотентна, где $N$ — минимальная нормальная подгруппа в $G$, содержащаяся в $O_p(G)$.

В силу шага 5 $|D_p| > |N|$ и потому всякая подгруппа $T/N$ $\mathscr{M}_p$-добавляема в $G/N$ по лемме 2.1(2). С другой стороны, $C_G(T_p)N/N \leq C_{G/N}(T_p/N)$, стало быть,

$$|N_{G/N}(T_p/N)/C_{G/N}(T_p/N)| \leq |(N_G(T_p)/N)/(C_G(T_p)N/N)|.$$

Так как

$$\begin{aligned}(N_G(T_p)/N)/(C_G(T_p)N/N) &\cong N_G(T_p)/C_G(T_p)N \\ &\cong (N_G(T_p)/C_G(T_p))/(C_G(T_p)N/C_G(T_p)),\end{aligned}$$

то $N_{G/N}(T_p/N)/C_{G/N}(T_p/N)$ — $p$-группа. Тем самым $G/N$ удовлетворяет условиям теоремы. Из минимальности $G$ следует, что группа $G/N$ $p$-нильпотентна, поэтому $O_p(G) = N$.

Шаг 7. Итоговое противоречие.

В силу шага 6 получаем, что группа $G$ $p$-разрешима, откуда $C_G(N) = N$ по шагу 1 и лемме 2.4. Так как $|N| < |D_p|$, выберем подгруппу $T$ в $H$ такую, что $N < T_p$ и $|T| = |D|$. Тогда в силу предположения существует подгруппа $B$ в $G$ такая, что $G = TB$ и $T_iB < G$ для любой максимальной подгруппы $T_i$ в $T$ со свойством $|T : T_i| = p$. Поскольку $N \not\leq \Phi(G)$, то $N \not\leq \Phi(T_p)$ и существует максимальная подгруппа $S$ в $T_p$ такая, что $T_p = NS$. Пусть $T_1 = ST_{p'}$. Имеем $p = |G : T_1B| = |NT_1B : T_1B|$ по лемме 2.2, т. е. $|N| = p$. Ясно, что $G/C_G(N) = G/N \hookrightarrow \mathrm{Aut}(N)$. Поэтому $P \leq C_G(N) = N$, что противоречит шагу 3.

Итоговое противоречие завершает доказательство.

Авторы благодарны рецензенту за внимательное прочтение статьи и предложения, улучшившие оригинальную версию.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Beijing; New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. *Guo W.* The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Sci. Press Kluwer Acad. Publ., 2000.
3. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; New York: Springer-Verl., 1967.
4. *Монахов В. С., Шнырпарков А. В.* О $p$-сверхразрешимости конечной группы с $\mu$-добавляемой силовской $p$-подгруппой // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 858–865.
5. *Tang J., Miao L.* On $\mathscr{M}_p$-supplemented subgroups of finite groups // Commun. Algebra. 2013. V. 41, N 5. P. 1913–1922.
6. *Hall P.* A characteristic property of soluble groups // J. London Math. Soc. 1937. V. 12, N 3. P. 198–200.
7. *Arad Z., Ward M. B.* New criteria for the solvability of finite groups // J. Algebra. 1982. V. 77. P. 234–246.
8. *Chen Z.* Inner outer $\Sigma$-group and minimal non-$\Sigma$-group. Chongqing: Westsouth Normal Univ. Press, 1988.
9. *Xu M.* An introduction to finite groups. Beijing: Sci. Press, 1999. (in Chinese).


*Статья поступила 26 января 2015 г.*

Baijun Gao (Байцзюнь Гао), Long Miao (Мяо Лун)
School of Mathematical Sciences, Yangzhou University,
Yangzhou 225002, People's Republic of China
lmiao@yzu.edu.cn

Juping Tang (Тан Цзюйпин)
Wuxi Institute of Technology,
Wuxi 214121, People's Republic of China