Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 514.764.2+517.954

КИЛЛИНГОВЫ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ НА 2–ТОРЕ

В. А. Шарафутдинов

Аннотация. Симметричное тензорное поле на римановом многообразии называется *киллинговым*, если симметричная часть его ковариантной производной равна нулю. Имеется взаимно однозначное соответствие между киллинговыми тензорными полями и первыми интегралами геодезического потока, полиномиально зависящими от скорости. Поэтому киллинговы тензорные поля тесно связаны с задачей интегрируемости геодезического потока. В частности, остается открытым вопрос: существует ли на двумерном торе риманова метрика, допускающая неприводимое киллингово тензорное поле валентности ≥ 3? Мы приводим два необходимых условия на риманову метрику на 2-торе для существования неприводимого киллингова тензорного поля. Первое условие относится к киллинговым тензорным полям произвольной валентности и связано с замкнутыми геодезическими. Второе условие получено для киллинговых тензорных полей валентности 3 и связано с изолиниями гауссовой кривизны.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.115

Ключевые слова: киллингово поле, интегрируемость геодезическогоо потока, тензорный анализ, метод сферических гармоник.

§ 1. Введение

Хотя основным предметом настоящей статьи являются киллинговы тензорные поля на двумерном торе, снабженном римановой метрикой, постановка задачи возможна для любого риманова многообразия. Здесь мы приведем основные определения в общем случае и введем некоторые обозначения, по возможности следуя [1, § 3.3].

Для риманова многообразия (M, g) пусть τ'_M — кокасательное расслоение и $S^m\tau'_M$ — расслоение симметричных ковариантных тензоров валентности m. Последнее обозначение будет обычно сокращаться до S^m, если из контекста ясно, о каком многообразии идет речь. Пространство $C^\infty(S^m)$ гладких сечений этого расслоения есть $C^\infty(M)$-модуль гладких ковариантных симметричных тензорных полей валентности m на M. Сумма $S^* = \bigoplus\limits_{m=0}^{\infty} S^m$ является расслоением градуированных коммутативных алгебр по отношению к произведению $fh = \sigma(f \otimes h)$, где σ — симметрирование. Если $(U; x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат на M, то пространство $C^\infty(S^*; U)$ гладких сечений над U является свободной коммутативной $C^\infty(U)$-алгеброй с образующими $dx^i \in C^\infty(\tau'_M; U)$ $(1 \leq i \leq n)$, т. е. любое поле $f \in C^\infty(S^m; U)$ однозначно представимо в виде $f = f_{i_1 \dots i_m}\, dx^{i_1} \dots dx^{i_m}$. Коэффициенты этого представления

Работа частично выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–05929–а).

$f_{i_1\dots i_m} \in C^\infty(U)$, называемые *координатами* (или *компонентами*) *поля* f (относительно рассматриваемой системы координат), симметричны по индексам $(i_1,\dots,i_m)$.

Дифференциальный оператор $d = \sigma\nabla : C^\infty(S^m) \to C^\infty(S^{m+1})$, где ∇ — ковариантная производная по отношению к связности Леви-Чивиты, называется *внутренним дифференцированием*. Говорим, что $f \in C^\infty(S^m)$ является *киллинговым тензорным полем*, если

$$df = 0. \tag{1.1}$$

Оператор d и произведение связаны правилом Лейбница $d(fh) = (df)h + f(dh)$, из которого вытекает утверждение: если f и h — киллинговы тензорные поля, то поле fh также киллингово. Говорим, что киллингово тензорное поле $f \in C^\infty(S^m)$ $(m \neq 2)$ *неприводимо*, если его нельзя представить в виде конечной суммы $f = \sum\limits_i u_i v_i$, где все u_i и v_i — киллинговы поля положительных валентностей. При $m = 2$ дополнительно потребуем, чтобы f было отлично от полей вида cg $(c = \mathrm{const})$. Это требование исключает метрический тензор из числа неприводимых киллинговых полей.

Будучи записанной в координатах для поля валентности m, (1.1) является системой из $\binom{n+m}{m+1}$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно $\binom{n+m-1}{m}$ координат поля f, где $n = \dim M$. В силу переопределенности этой системы ненулевые киллинговы тензорные поля существуют далеко не на любом римановом многообразии. По нашему мнению, самым интересным является двумерный случай, когда степень переопределенности системы (1.1) равна единице. В этом случае, грубо говоря, исключив из (1.1) все координаты поля f (хотя возможность такого исключения весьма проблематична), мы получим одно уравнение на метрику g.

Пусть $\pi : TM \to M$ — касательное расслоение. Точки многообразия TM обозначаем парами (x,ξ), где $x \in M$ и $\xi \in T_xM$. Если $(U; x^1,\dots,x^n)$ — локальная система координат на M с областью определения $U \subset M$, то на TM определена соответствующая локальная система координат $(\pi^{-1}(U); x^1,\dots,x^n,\xi^1,\dots,\xi^n)$, где $\xi = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. Только такие координаты используются на TM в дальнейшем. Каждому тензорному полю $f \in C^\infty(S^m)$ сопоставим функцию $F \in C^\infty(TM)$, определяемую в координатах равенством $F(x,\xi) = f_{i_1\dots i_m}(x)\,\xi^{i_1}\dots\xi^{i_m}$. Отметим, что $F(x,\xi)$ является однородным многочленом степени m по переменной ξ. Сопоставление $f \mapsto F$ отождествляет алгебру $C^\infty(S^*)$ с подалгеброй алгебры $C^\infty(TM)$, состоящей из полиномиальных по ξ функций.

Обозначим через H векторное поле на TM, порождающее геодезический поток. В координатах оно выражается равенством

$$H = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^i_{jk}(x)\,\xi^j\xi^k\frac{\partial}{\partial \xi^i}, \tag{1.2}$$

где Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля метрики g. Пусть $TM \supset \Omega M$ — многообразие единичных касательных векторов. Поскольку геодезический поток сохраняет норму вектора, H может рассматриваться в качестве дифференциального оператора первого порядка на ΩM, т. е. $H : C^\infty(\Omega M) \to C^\infty(\Omega M)$. Операторы d и H связаны следующим образом: если $f \in C^\infty(S^m)$ и $F = f_{i_1\dots i_m}\xi^{i_1}\dots\xi^{i_m} \in C^\infty(TM)$ — соответствующий полином, то

$$HF = (df)_{i_1\dots i_{m+1}}\,\xi^{i_1}\dots\xi^{i_{m+1}}.$$

В частности, поле f киллингово тогда и только тогда, когда $HF = 0$, т. е. когда F является первым интегралом геодезического потока. Таким образом, задача отыскания киллинговых тензорных полей эквивалентна задаче нахождения первых интегралов геодезического потока, полиномиально зависящих от ξ.

Ввиду указанной связи с интегрируемыми динамическими системами эта задача рассматривалась многими математиками, начиная с классических работ Дарбу [2] и Биркгофа [3], и продолжает исследоваться в настоящее время. Мы не приводим здесь соответствующих ссылок из-за недостатка места, отсылая читателя к [4], где приведена обширная библиография. В частности, классифицированы метрики на поверхностях, допускающие неприводимые киллинговы тензорные поля валентностей 1 и 2. Но, насколько нам известно, большинство вопросов о метриках, допускающих неприводимые киллинговы тензорные поля валентности ≥ 3, остаются открытыми.

Обычно задача ставится следующим образом: требуется определить, существуют ли на данном многообразии римановы метрики, допускающие неприводимые киллинговы тензорные поля данной валентности, и, по возможности, найти все такие метрики. В настоящей статье обсуждается более скромная задача: для данного риманова многообразия (M, g) требуется выяснить, существуют ли на нем неприводимые киллинговы тензорные поля данной валентности m, и, по возможности, эффективно описать все такие поля. Как мы сейчас покажем, в нашей постановке задача в принципе эффективно решается при условии, что мы умеем решать эллиптические уравнения на данном римановом многообразии.

Если не оговорено противное, термин «риманово многообразие» означает гладкое (т. е. класса C^∞) компактное многообразие без края с гладкой римановой метрикой. Для риманова многообразия (M, g) обозначим через $-\delta : C^\infty(S^{m+1}) \to C^\infty(S^m)$ оператор, сопряженный с d относительно естественного L^2-скалярного произведения, определенного на $C^\infty(S^m)$. В локальных координатах оператор δ, называемый *дивергенцией*, задается формулой $(\delta f)_{i_1\dots i_m} = g^{pq}\nabla_p f_{qi_1\dots i_m}$. Поскольку оператор δd эллиптичен [1, теорема 3.3.2], его ядро конечномерно. Это ядро совпадает с пространством киллинговых тензорных полей валентности m, как видно из равенства $(\delta df, f)_{L^2} = -(df, df)_{L^2}$. Если мы найдем ядро оператора δd для данного m и для всех меньших валентностей, то сможем эффективно описать все неприводимые киллинговы поля валентности m на (M, g).

Размерность $\binom{n+m-1}{m}$ расслоения S^m быстро растет с ростом m и $n = \dim M$. В § 2 мы сведем задачу к аналогичному вопросу для эллиптического оператора $\delta p d$ (определение p приведено ниже), действующего на расслоении размерности $\frac{n+2m-2}{n+m-2}\binom{n+m-2}{m}$. В частности, это расслоение двумерно при $n = 2$. Это сведение осуществляется путем разложения многочлена $F \in C^\infty(\Omega M)$ в ряд Фурье по сферическим гармоникам относительно переменной ξ и замены уравнения $HF = 0$ цепочкой уравнений, связывающей гармоники разных степеней. Основной вывод § 2 состоит в следующем: киллингово поле f валентности m определяется своей старшей гармоникой pf однозначно с точностью до киллингова поля валентности $m - 2$. Метод сферических гармоник широко применяется для численного решения кинетического уравнения и родственных ему уравнений [5, гл. 8], но иногда он с успехом работает и в теоретических вопросах. Например, некая разновидность этого метода использована в [6] для доказательства спектральной жесткости поверхности отрицательной кривизны.

В § 3 мы рассматриваем киллинговы тензорные поля на двумерном торе. Благодаря наличию глобальных изотермических координат ядро оператора δpd явно описывается, оно оказывается двумерным. Теорема 3.4 дает некоторое необходимое и достаточное условие (нелокального характера) на метрику для существования неприводимого киллингова тензорного поля валентности m. К сожалению, проверка этого условия ненамного проще исходной задачи, так что пока остается открытым основной вопрос: существуют ли на двумерном торе метрики, допускающие неприводимые киллинговы тензорные поля валентности $m \geq 3$? Тем не менее необходимое условие, даваемое следствием 3.5, позволяет отрицательно ответить на этот вопрос для многих конкретных метрик. Достаточно лишь найти две замкнутые геодезические, интегралы по которым от некоторых функций φ_m и ψ_m линейно независимы, причем эти две функции явно выражаются через метрику и направление геодезической.

Система (1.1) обладает следующим интересным свойством. Каждое уравнение этой системы является линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно координат поля f, но эту систему нельзя разрешить относительно всех первых производных этих координат. Однако, как показано в [1, теорема 2.2.2], после m-кратного дифференцирования получается система, которую можно разрешить относительно всех производных порядка $m+1$ всех координат поля f. В частности, киллингово тензорное поле валентности m на связном многообразии (необязательно компактном) однозначно определяется значениями своих производных порядка $\leq m$ в одной точке. Это позволяет оценить сверху размерность пространства киллинговых полей валентности m некоторой величиной, явно выражающейся через m и n. В § 4 мы применим некую разновидность этого подхода для изучения киллинговых тензорных полей валентности 3 на двумерном торе. На этом пути получается некоторое новое необходимое условие, связанное в поведением изолиний гауссовой кривизны. Заметим также (хотя это замечание не используется в настоящей статье), что аналогичным свойством обладает система, определяющая конформно киллинговы тензорные поля [7].

Кратко обсудим так называемый *кодифференциал Биркгофа — Колокольцова* (термин предложен в [8]). Он рассматривается лишь в двумерном случае. Биркгофу [3] принадлежит следующее наблюдение. Если геодезический поток поверхности допускает первый интеграл $F(x,p)$, являющийся однородным многочленом по импульсу p, то некоторая линейная комбинация коэффициентов этого многочлена является голоморфной функцией в изотермической системе координат. Этот факт систематически использовал В. Н. Колокольцов [9]. В частности, он получил правило преобразования этой линейной комбинации при голоморфной замене координат, что и позволило определить кодифференциал Биркгофа — Колокольцова как сечение одномерного комплексного расслоения $\otimes^m T^{(1,0)}M$, зависящее от многочлена $F(x,p)$ степени m, который является интегралом геодезического потока двумерного риманова многообразия (M,g). В настоящей статье это понятие не используется. Вместо него мы используем *старшую гармонику* pf киллингова тензорного поля f. Это вполне традиционный объект метода сферических гармоник. Эквивалентность этих двух понятий демонстрируется в конце § 2. При этом оказывается, что правило преобразования Колокольцова совпадает со стандартным правилом преобразования координат тензора pf при замене координат. Принципиальным является то обстоятельство, что старшая гармоника определена и в многомерном случае.

Наша теорема 2.2 является многомерным обобщением результата Биркгофа. Ситуация сильно упрощается в случае 2-тора благодаря наличию глобальной изотермической системы координат. Упомянутая голоморфная функция в этом случае постоянна, т. е. определяется двумя действительными числами. Правило преобразования этой пары чисел при замене глобальной изотермической системы координат дается определением 3.1, вводящим понятие *постоянного псевдовектора веса* m. Последнее значительно проще, чем «старшая гармоника» или «кодифференциал Биркгофа — Колокольцова», и вполне достаточно для изучения киллинговых тензорных полей на 2-торе.

Отметим, что используемый нами в § 4 подход к исследованию уравнения (4.7) в некоторой мере аналогичен методу из [8], где получены сильные, но локальные результаты о киллинговых тензорных полях валентности 3 на произвольной поверхности. Совершенно иной подход к исследованию киллинговых тензорных полей на 2-торе предложен в [10]; правда, пока, как говорят авторы, он не привел к окончательным результатам.

§ 2. Метод сферических гармоник для киллинговых тензорных полей

Мы будем использовать анализ симметричных тензорных полей, первоначально развитый в [11]. Этот аппарат был затем систематически изложен в [1], но некоторые нужные нам технические детали не вошли в эту книгу. Сравнительно недавно опубликованная статья [7] содержит [11] в качестве собственного подмножества. Поэтому мы по большей части будем отсылать читателя к [7] за доказательствами технических утверждений.

Пусть (M, g) — риманово многообразие. Через $i : S^m \to S^{m+2}$ обозначаем оператор симметричного умножения на метрический тензор, т. е. $if = fg = \sigma(f \otimes g)$. Сопряженным к i является оператор j свертки с метрическим тензором, в координатах задаваемый формулой $(jf)_{i_1\dots i_m} = g^{pq} f_{pqi_1\dots i_m}$. Тензор jf называется *следом* тензора f. Пусть $p : S^m \to S^m$ — ортогональное проектирование на ядро оператора j.

Обозначим через $\operatorname{Ker}^m j$ подрасслоение расслоения S^m, состоящее из *бесследовых* тензоров, т. е. из тензоров f, удовлетворяющих $jf = 0$. Эта терминология введена в [7], и мы будем ее придерживаться, хотя возможно, что «расслоение гармонических тензоров» является более удачным именем для этого расслоения. Заметим, что для $f \in C^\infty(\operatorname{Ker}^m j)$ дивергенция δf тоже бесследовое поле, поскольку операторы j и δ перестановочны [7, лемма 3.2]. Поэтому определена пара взаимно сопряженных операторов

$$C^\infty(\operatorname{Ker}^m j) \underset{-\delta}{\overset{pd}{\rightleftarrows}} C^\infty(\operatorname{Ker}^{m+1} j). \tag{2.1}$$

Эллиптичность оператора δpd доказана в [7, теорема 2.1]. Заметим, что ядра операторов δpd и pd совпадают, как видно из равенств

$$(\delta pdf, f)_{L^2} = -(pdf, df)_{L^2} = -(p^2df, df)_{L^2} = -(pdf, pdf)_{L^2}.$$

Следовательно, ядро оператора pd конечномерно.

Дальнейшие формулы немного различаются в случаях тензорных полей четной и нечетной валентности. Поэтому будем сначала обсуждать случай четной валентности, а затем приводить соответствующие формулы для нечетной валентности. Оба случая можно объединить за счет усложнения обозначений.

Согласно [7, лемма 2.3] любое поле $f \in C^\infty(S^{2m})$ единственным образом представимо в виде

$$f = \sum_{k=0}^{m} i^{m-k} f^{(k)}, \quad f^{(k)} \in C^\infty(\operatorname{Ker}^{2k} j). \tag{2.2}$$

Представление (2.2) фактически совпадает с разложением многочлена $F \in C^\infty(\Omega M)$ в ряд Фурье по сферическим гармоникам относительно переменной ξ. Поэтому поле $f^{(k)}$ будем называть *гармоникой степени* $2k$ поля f. В частности, $f^{(m)} = pf$ — старшая гармоника. Удобно также считать, что $f^{(k)} = 0$ при $k > m$. Для поля $f \in C^\infty(S^{2m+1})$ нечетной валентности разложение (2.2) остается в силе, но теперь $f^{(k)} \in C^\infty(\operatorname{Ker}^{2k+1} j)$.

Для тензорных полей $f \in C^\infty(S^{2m})$ и $b \in C^\infty(S^{2m+1})$ уравнение $df = b$ эквивалентно следующей цепочке уравнений [7, теорема 10.2], связывающей гармоники этих полей:

$$pdf^{(k)} + \frac{2k+2}{n+4k+2}\delta f^{(k+1)} = b^{(k)} \quad (k = 0, \dots, m), \tag{2.3}$$

где $n = \dim M$. Для $f \in C^\infty(S^{2m+1})$ и $b \in C^\infty(S^{2m+2})$ эта цепочка немного видоизменяется и выглядит следующим образом:

$$\delta f^{(0)} = nb^{(0)}, \quad pdf^{(k)} + \frac{2k+3}{n+4k+4}\delta f^{(k+1)} = b^{(k+1)} \quad (k = 0, \dots, m). \tag{2.4}$$

Системы (2.3) и (2.4) представляют основные уравнения метода сферических гармоник. Эти уравнения легко обобщаются на случай, когда решение и правая часть кинетического уравнения $HF = B$ являются не многочленами, а произвольными гладкими функциями на ΩM, а также на случай более общего уравнения, содержащего слагаемые, ответственные за поглощение и рассеяние.

Итак, киллинговость поля $f \in C^\infty(S^{2m})$ эквивалентна системе уравнений

$$pdf^{(k)} + \frac{2k+2}{n+4k+2}\delta f^{(k+1)} = 0 \quad (k = 0, \dots, m), \tag{2.5}$$

а киллинговость поля $f \in C^\infty(S^{2m+1})$ эквивалентна системе уравнений

$$\delta f^{(0)} = 0, \quad pdf^{(k)} + \frac{2k+3}{n+4k+4}\delta f^{(k+1)} = 0 \quad (k = 0, \dots, m). \tag{2.6}$$

Напомним [1, с. 39], что тензорное поле $f \in C^\infty(S^m)$ называется *потенциальным*, если существует такое $v \in C^\infty(S^{m-1})$, что $f = dv$.

Лемма 2.1. *Если f — киллингово тензорное поле, то дивергенция $\delta f^{(k)}$ является потенциальным тензорным полем для каждого из слагаемых представления* (2.2).

Доказательство. Для определенности рассматриваем киллингово поле f четной валентности. Утверждение о потенциальности поля $\delta f^{(0)} = 0$ тривиально. Поскольку оператор p тождествен на S^1, уравнение (2.5) при $k = 0$ можно переписать в виде $df^{(0)} + \frac{2}{n+2}\delta f^{(1)} = 0$, откуда следует потенциальность поля $\delta f^{(1)}$. Далее доказательство ведем индукцией по k. Согласно [7, лемма 2.4] равенство

$$dpf^{(k)} = pdf^{(k)} + \frac{2k}{n+4k-2} i\delta f^{(k)}$$

справедливо для любого тензорного поля $f^{(k)}$ валентности $2k$. В нашем случае $pf^{(k)} = f^{(k)}$, поскольку $jf^{(k)} = 0$, и предыдущая формула упрощается до следующей:

$$pdf^{(k)} = df^{(k)} - \frac{2k}{n+4k-2} i\delta f^{(k)}.$$

Согласно предположению индукции $\delta f^{(k)} = dv$ для некоторого v. Подставляя это значение в предыдущую формулу и учитывая перестановочность операторов i и d [7, лемма 3.2], имеем

$$pdf^{(k)} = d\Big(f^{(k)} - \frac{2k}{n+4k-2} iv\Big).$$

Вместе с (2.5) это дает

$$d\Big(f^{(k)} - \frac{2k}{n+4k-2} iv\Big) + \frac{2k+2}{n+4k+2}\delta f^{(k+1)} = 0,$$

откуда следует потенциальность поля $\delta f^{(k+1)}$. $\square$

Теорема 2.2. *Киллингово тензорное поле валентности m определяется своей старшей гармоникой однозначно с точностью до слагаемого вида iv, где v — произвольное киллингово тензорное поле валентности $m-2$. Для того чтобы тензорное поле $f \in C^\infty(\mathrm{Ker}^m j)$ было старшей гармоникой некоторого киллингова тензорного поля, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло уравнению*

$$pdf = 0 \tag{2.7}$$

и имело потенциальную дивергенцию, т. е. $\delta f = dv$ для некоторого v.

Доказательство. Рассмотрим лишь случай четной валентности. Если старшая гармоника киллингова поля $f \in C^\infty(S^{2m})$ равна нулю, то (2.2) может быть записано в виде $f = i\sum\limits_{k=0}^{m-1} i^{m-k-1} f^{(k)}$. Последнее уравнение цепочки (2.5) выполняется тривиальным образом, а оставшиеся уравнения цепочки эквиваленты киллинговости поля $v = \sum\limits_{k=0}^{m-1} i^{m-k-1} f^{(k)}$.

Необходимость. Потенциальность поля $\delta f^{(m)}$ доказана в лемме 2.1, а уравнение (2.7) для $f^{(m)}$ совпадает с (2.5) при $k = m$.

Достаточность. Пусть $f^{(m)} \in C^\infty(\mathrm{Ker}^{2m} j)$ удовлетворяет уравнению $pdf^{(m)} = 0$ и имеет потенциальную дивергенцию, т. е.

$$dv = \delta f^{(m)} \tag{2.8}$$

для некоторого $v \in C^\infty(S^{2m-2})$. Разложим поле v в ряд Фурье по сферическим гармоникам

$$v = \sum_{k=0}^{m-1} i^{m-k-1} v^{(k)}, \quad jv^{(k)} = 0$$

и заметим, что соответствующий ряд для поля $\delta f^{(m)}$ состоит из одного слагаемого. Поэтому цепочка уравнений, вытекающая из равенства (2.8), выглядит следующим образом:

$$pdv^{(k)} + \frac{2k+2}{n+4k+2}\delta v^{(k+1)} = 0 \ (k = 0, \dots, m-2), \quad pdv^{(m-1)} = \delta f^{(m)}.$$

Положив $f^{(k)} = v^{(k)}$ для $0 \le k \le m-2$ и $f^{(m-1)} = -\frac{2m}{n+4m-2} v^{(m-1)}$, перепишем эту систему в виде

$$pdf^{(k)} + \frac{2k+2}{n+4k+2}\delta f^{(k+1)} = 0 \quad (k = 0, \dots, m-1).$$

Вместе с уравнением $pdf^{(m)} = 0$ это дает (2.5), что означает киллинговость поля $f = \sum\limits_{k=0}^{m} i^{m-k} f^{(k)}$. $\square$

Допустим, что удалось найти ядро оператора pd из (2.1), и пусть тензорные поля $(f_1, \dots, f_r)$ образуют базис этого ядра. В каком случае тензорное поле

$$f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_r f_r \quad (\alpha_i \in \mathbb{C})$$

является старшей гармоникой некоторого киллингова поля? Согласно теореме 2.2 необходимым и достаточным условием является потенциальность поля δf, т. е. разрешимость уравнения

$$dv = \alpha_1 \delta f_1 + \dots + \alpha_r \delta f_r. \tag{2.9}$$

Набор тензорных полей δf_i $(1 \le i \le r)$ вполне может оказаться линейно зависимым. Выберем максимальную линейно независимую подсистему этого набора и, сменив нумерацию, обозначим ее через $(\delta f_1, \dots, \delta f_s)$, где $s \le r$. Тогда (2.9) заменится уравнением с меньшим числом параметров

$$dv = \alpha_1 \delta f_1 + \dots + \alpha_s \delta f_s \tag{2.10}$$

и наша задача сводится к вопросу: для каких наборов коэффициентов $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ уравнение (2.10) разрешимо?

В связи с (2.1) уместно ввести определение: поле $f \in C^\infty(\mathrm{Ker}^m j)$ называется *j-потенциальным*, если существует такое $v \in C^\infty(\mathrm{Ker}^{m-1} j)$, что $f = pdv$. Условия «поле f потенциально» и «поле f j-потенциально» никак не связаны друг с другом, т. е. ни одно из них не следует из другого для произвольного $f \in C^\infty(\mathrm{Ker}^m j)$. Однако для киллингова поля f каждая из дивергенций $\delta f^{(k)}$ его гармоник является как потенциальным, так и j-потенциальным тензорным полем. Первое утверждение доказано в лемме 2.1, а второе видно непосредственно из (2.5).

Для полноты приведем следующее простое утверждение.

Лемма 2.3. *Допустим, что для некоторого $m \ge 2$ риманово многообразие (M, g) не допускает неприводимых киллинговых тензорных полей валентностей $1, \dots, m-1$. Тогда любое киллингово тензорное поле валентности m на (M, g), старшая гармоника которого не равна тождественно нулю, неприводимо.*

Доказательство. Напомним, что мы исключили метрический тензор из числа неприводимых киллинговых полей. Любое приводимое киллингово поле представимо в виде многочлена с постоянными коэффициентами от нескольких неприводимых киллинговых полей и метрического тензора. В условиях леммы это означает, что при нечетном m любое приводимое киллингово тензорное поле валентности m тождественно равно нулю, а при $m = 2k$ любое приводимое киллингово тензорное поле валентности m имеет вид cg^k ($c = \mathrm{const}$). Старшая гармоника такого поля равна нулю. $\square$

В заключение параграфа обсудим двумерный случай. В этом случае размерность расслоения S^m равна $m+1$, а расслоение $\mathrm{Ker}^m j$ двумерно при $m > 0$.

В окрестности любой точки двумерного риманова многообразия (M, g) можно ввести изотермические координаты (x, y), в которых метрика выглядит так:

$$g = e^{2\mu(x,y)}(dx^2 + dy^2) = \lambda(z)|dz|^2 \quad (z = x + iy,\ \lambda(z) = e^{2\mu(x,y)}). \tag{2.11}$$

Символы Кристоффеля этой метрики выражаются равенствами

$$\Gamma^1_{11} = \mu_x,\ \Gamma^1_{12} = \mu_y,\ \Gamma^1_{22} = -\mu_x, \Gamma^2_{11} = -\mu_y,\ \Gamma^2_{12} = \mu_x,\ \Gamma^2_{22} = \mu_y. \tag{2.12}$$

Напомним, что ΩM — расслоение единичных касательных окружностей. Если (x, y) — изотермические координаты на M и (x, y, ξ^1, ξ^2) — соответствующие координаты на TM, то координаты (x, y, θ) на ΩM определяются равенствами $\xi^1 = e^{-\mu}\cos\theta$, $\xi^2 = e^{-\mu}\sin\theta$. Подставив значения (2.12) символов Кристоффеля в (1.2), получаем выражение для оператора H в изотермических координатах

$$H = e^{-\mu}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} + (-\mu_x\sin\theta + \mu_y\cos\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right). \tag{2.13}$$

Для поля $f \in C^\infty(\operatorname{Ker}^m j)$ запишем уравнение $pdf = 0$ в изотермических координатах. Условие $jf = 0$ означает, что

$$f_{\underbrace{1\dots1}_{m-k}\underbrace{2\dots2}_{k}} + f_{\underbrace{1\dots1}_{m-k-2}\underbrace{2\dots2}_{k+2}} = 0 \quad (0 \le k \le m-2). \tag{2.14}$$

Соответствующая полю f функция $F \in C^\infty(\Omega M)$ получается из многочлена $f_{i_1\dots i_m}\xi^{i_1}\dots\xi^{i_m}$ подстановкой $\xi^1 = e^{-\mu}\cos\theta$, $\xi^2 = e^{-\mu}\sin\theta$. С помощью (2.14) это дает

$$F(x, y, \theta) = e^{-m\mu(x,y)}(f_{1\dots1}(x, y)\cos m\theta + f_{1\dots12}(x, y)\sin m\theta). \tag{2.15}$$

Используя (2.13) и (2.15), найдем функцию HF, которую затем опять разложим в ряд Фурье по переменной θ; для этого достаточно вспомнить элементарные тригонометрические формулы $2\cos\theta\cos m\theta = \cos(m-1)\theta + \cos(m+1)\theta$, $2\cos\theta\sin m\theta = \dots$. Уравнение $pdf = 0$ эквивалентно равенству нулю коэффициентов при $\cos(m+1)\theta$ и $\sin(m+1)\theta$ в ряде Фурье для функции HF. Приравняв эти коэффициенты к нулю, приходим к системе Коши — Римана

$$\frac{\partial(e^{-2m\mu}f_{1\dots1})}{\partial x} - \frac{\partial(e^{-2m\mu}f_{1\dots12})}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(e^{-2m\mu}f_{1\dots1})}{\partial y} + \frac{\partial(e^{-2m\mu}f_{1\dots12})}{\partial x} = 0. \tag{2.16}$$

Приведенный вывод уравнений (2.16) взят из [11]. Как отмечено выше, фактически этот результат принадлежит Биркгофу [3], хотя его терминология и аргументация сильно отличаются от наших.

§ 3. Киллинговы тензорные поля на двумерном торе

Напомним [4, § 6.5], что на двумерном торе $\mathbb{T}^2$, снабженном римановой метрикой g, существует глобальная изотермическая система координат. Точнее, существует такая решетка $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, что $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/\Gamma$ и метрика g выражается формулой (2.11), где $\lambda(z) = e^{2\mu(x,y)}$ — Γ-периодическая гладкая функция на плоскости. Глобальные изотермические координаты на торе определены однозначно с точностью до замен вида $z = az' + b$ или $z = a\bar{z}' + b$ с комплексными постоянными $a \ne 0$ и b. Преобразования второго вида можно исключить из рассмотрения, зафиксировав ориентацию тора и рассматривая лишь координаты, согласованные с ориентацией. Более того, в дальнейшем, исследуя инвариантность тех или иных соотношений, ограничимся рассмотрением преобразований вида $z = az'$, поскольку сдвиг на постоянный вектор не меняет вида тензорных формул. Группа таких преобразований совпадает с мультипликативной группой $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Коммутативность этой группы позволяет ввести следующее определение (далее через i обозначается мнимая единица).

Определение 3.1. *Псевдовекторным полем* X *веса* m на римановом торе $(\mathbb{T}^2, g)$ называется правило, сопоставляющее каждой глобальной изотермической системе координат пару функций (X^1, X^2) на $\mathbb{T}^2$, которые преобразуются по правилу

$$(X^1 + iX^2)(z) = a^m(X'^1 + iX'^2)(z'), \quad (X^1 - iX^2)(z) = \bar{a}^m(X'^1 - iX'^2)(z') \tag{3.1}$$

при замене $z = az'$. Если при этом функции (X^1, X^2) постоянны, то говорим о постоянном псевдовекторе X веса m. Аналогично *псевдоковекторным полем* (или 1-*псевдоформой*) ω веса m на $(\mathbb{T}^2, g)$ называется правило, сопоставляющее каждой глобальной изотермической системе координат пару функций (ω_1, ω_2) на $\mathbb{T}^2$, которая преобразуется по правилу

$$\omega_1 + i\omega_2 = \bar{a}^{-m}(\omega'_1 + i\omega'_2), \quad \omega_1 - i\omega_2 = a^{-m}(\omega'_1 - i\omega'_2).$$

Если X и ω — псевдовекторное и псевдоковекторное поля одинакового веса соответственно, то $X^1\omega_1 + X^2\omega_2$ — инвариантная функция на торе. Сделаем также следующее замечание по поводу (3.1). Если X^1 и X^2 действительны для одной глобальной изотермической системы координат, то это справедливо для любой глобальной изотермической системы координат; в этом случае говорим о *действительном* псевдовекторном поле X веса m. Для действительного X два равенства из (3.1) эквивалентны. В общем случае эти равенства независимы.

Теорема 3.2. *Для двумерного риманова тора ядро эллиптического оператора*

$$\delta pd : C^\infty(\mathrm{Ker}^m j) \to C^\infty(\mathrm{Ker}^m j) \tag{3.2}$$

двумерно и состоит из тензорных полей $f \in C^\infty(\mathrm{Ker}^m j)$, координаты которых относительно глобальной изотермической системы координат имеют вид

$$f_{1\dots1} = e^{2m\mu}c^1, \quad f_{1\dots12} = e^{2m\mu}c^2, \tag{3.3}$$

где $c = (c^1, c^2)$ — постоянный псевдовектор веса m. Образ оператора (3.2) состоит из тензорных полей $f \in C^\infty(\mathrm{Ker}^m j)$, все компоненты которых относительно глобальной изотермической системы координат имеют нулевые средние значения, т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{T}^2} f_{i_1\dots i_m}\, d\sigma = 0, \tag{3.4}$$

где $d\sigma = e^{2\mu}\, dxdy$ — форма площади.

Первое утверждение этой теоремы имеется также в [9].

Доказательство. Прежде всего отметим, что формулы (3.3) определяют все координаты тензора f в силу (2.14).

Как ранее отмечали, ядро оператора (3.2) совпадает с ядром pd. Если тензорное поле $f \in C^\infty(\mathrm{Ker}^m j)$ удовлетворяет уравнению $pdf = 0$, то согласно (2.16) $e^{-2m\mu}(f_{1\dots1} + if_{1\dots12})$ — голоморфная функция на торе. Следовательно, эта функция постоянна, т. е. равенства (3.3) справедливы в любой глобальной изотермической системе координат с некоторыми комплексными постоянными c^1 и c^2. Эти постоянные действительны в случае действительного f. Отправляясь от правила преобразования компонент тензорного поля при замене координат, легко убедиться, что $c = (c^1, c^2)$ есть постоянный псевдовектор веса m. Тем самым утверждение о ядре оператора δpd доказано. Утверждение об образе следует отсюда, поскольку этот оператор самосопряжен. □

В случае $m = 1$ теорема 3.2 приводит к известному интегралу Клеро для геодезических на поверхности вращения. Действительно, пусть f — киллингово ковекторное поле на римановом торе. Оно лежит в ядре оператора (3.2), так как $\mathrm{Ker}^1 j = S^1$. Согласно теореме 3.2 в глобальных изотермических координатах $f_1 = e^{2\mu}c^1$, $f_2 = e^{2\mu}c^2$ для некоторого постоянного вектора c. Поскольку поле f киллингово, функция

$$f_1\dot{x} + f_2\dot{y} = e^{2\mu}(c^1\dot{x} + c^2\dot{y})$$

постоянна на любой геодезической $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Без ограничения общности можно считать, что $\|\dot{\gamma}\|^2 = e^{2\mu}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 1$, т. е. что $\dot{x} = e^{-\mu}\cos\varphi$, $\dot{y} = e^{-\mu}\sin\varphi$, где $\varphi = \varphi(t)$ — угол, образуемый геодезической с координатной линией $y = \mathrm{const}$. Поэтому вдоль любой геодезической $e^{\mu}(c^1\cos\varphi + c^2\sin\varphi) = \mathrm{const}$. Это и есть интеграл Клеро в изотермических координатах. В частности, если глобальные изотермические координаты выбрать так, что $c = (1, 0)$, то интеграл Клеро принимает традиционный вид: $e^{\mu}\cos\varphi = \mathrm{const}$.

Следствие 3.3. *Любое тензорное поле $f \in C^\infty(\mathrm{Ker}^m j)$ единственным образом представимо в виде*

$$f = \tilde{f} + f^s, \tag{3.5}$$

где $\tilde{f}$ лежит в образе оператора $pd : C^\infty(\mathrm{Ker}^{m-1} j) \to C^\infty(\mathrm{Ker}^m j)$, а $f^s \in C^\infty(\mathrm{Ker}^m j)$ имеет нулевую дивергенцию: $\delta f^s = 0$.

Слагаемые представления (3.5) будем называть соответственно *j-потенциальной* и *j-соленоидальной* частями поля f.

Доказательство. Мы ищем поля $v \in C^\infty(\mathrm{Ker}^{m-1} j)$ и $f^s \in C^\infty(\mathrm{Ker}^m j)$, удовлетворяющие системе

$$pdv + f^s = f, \quad \delta f^s = 0.$$

Применив к первому из этих уравнений оператор δ, имеем

$$\delta pdv = \delta f. \tag{3.6}$$

Обратно, если мы установим, что δf лежит в образе оператора δpd, то уравнение (3.6) разрешимо и остается определить f^s равенством $f^s = f - pdv$.

Итак, осталось проверить, что в глобальных изотермических координатах каждая из компонент поля δf имеет нулевое среднее значение для любого $f \in C^\infty(\mathrm{Ker}^m j)$. В силу (2.14) достаточно осуществить эту проверку для компонент $(\delta f)_{1\dots1}$ и $(\delta f)_{1\dots12}$. Вычисляем дивергенцию, используя соотношение $f_{1\dots122} = -f_{1\dots1}$:

$$\begin{aligned}(\delta f)_{1\dots1} &= g^{pq}\nabla_p f_{1\dots1q} = e^{-2\mu}(\nabla_1 f_{1\dots1} + \nabla_2 f_{1\dots12}),\\ (\delta f)_{1\dots12} &= g^{pq}\nabla_p f_{1\dots12q} = e^{-2\mu}(\nabla_1 f_{1\dots12} + \nabla_2 f_{1\dots122}) = e^{-2\mu}(-\nabla_2 f_{1\dots1} + \nabla_1 f_{1\dots12}).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Используя (2.12) и определение ковариантных производных, вычисляем

$$\nabla_1 f_{1\dots1} = \frac{\partial f_{1\dots1}}{\partial x} - m\Gamma^p_{11} f_{1\dots1p} = \frac{\partial f_{1\dots1}}{\partial x} - m\mu_x f_{1\dots1} + m\mu_y f_{1\dots12}.$$

Аналогично

$$\nabla_2 f_{1\dots1} = \frac{\partial f_{1\dots1}}{\partial y} - m\mu_y f_{1\dots1} - m\mu_x f_{1\dots12},$$

$$\nabla_1 f_{1\dots12} = \frac{\partial f_{1\dots12}}{\partial x} - m\mu_y f_{1\dots1} - m\mu_x f_{1\dots12},$$

$$\nabla_2 f_{1\dots12} = \frac{\partial f_{1\dots12}}{\partial y} + m\mu_x f_{1\dots1} - m\mu_y f_{1\dots12}.$$

Подставляя эти значения в (3.7), приходим к неожиданно простым формулам

$$(\delta f)_{1\dots1} = e^{-2\mu}\left(\frac{\partial f_{1\dots1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{1\dots12}}{\partial y}\right), \quad (\delta f)_{1\dots12} = e^{-2\mu}\left(-\frac{\partial f_{1\dots1}}{\partial y} + \frac{\partial f_{1\dots12}}{\partial x}\right). \quad (3.8)$$

Разумеется, этот факт должен иметь инвариантное объяснение, не зависящее от вычислений в координатах (я даже догадываюсь, каким должно быть это объяснение, но не буду здесь это обсуждать). Так или иначе, из этих формул следует, что выражения

$$(\delta f)_{1\dots1}\, d\sigma = \left(\frac{\partial f_{1\dots1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{1\dots12}}{\partial y}\right) dxdy, \quad (\delta f)_{1\dots12}\, d\sigma = \left(-\frac{\partial f_{1\dots1}}{\partial y} + \frac{\partial f_{1\dots12}}{\partial x}\right) dxdy$$

интегрируются к нулю по тору. □

Для каждого целого $m \ge 0$ и для каждого постоянного псевдовектора $c = (c^1, c^2)$ веса $m+1$ введем тензорное поле $Z^{m,c} \in C^\infty(\operatorname{Ker}^m j)$ на двумерном римановом торе, потребовав, чтобы в глобальных изотермических координатах

$$Z^{m,c}_{1\dots1} = e^{2m\mu}(c^1\mu_x + c^2\mu_y), \quad Z^{m,c}_{1\dots12} = e^{2m\mu}(c^2\mu_x - c^1\mu_y). \quad (3.9)$$

Остальные компоненты этого тензорного поля определяются равенствами (2.14), в которых надо букву f заменить на $Z^{m,c}$. Легко убедиться в корректности этого определения, т. е. что компоненты этого поля преобразуются должным образом при изменении глобальных изотермических координат, используя то, что c — псевдовектор веса $m+1$. Первый индекс в обозначении $Z^{m,c}$ есть валентность этого тензорного поля, а второй индекс напоминает о его зависимости от псевдовектора c веса $m+1$. Следует особо оговорить случай $m = 0$, в котором $Z^{0,c} = c^1\mu_x + c^2\mu_y = d\mu(c)$ — инвариантно определенная функция на торе.

Теорема 3.4. *Если риманов тор $(\mathbb{T}^2, g)$ допускает действительное неприводимое киллингово тензорное поле валентности $m \ge 1$, то тензорное поле $Z^{m-1,c}$ потенциально для некоторого постоянного действительного псевдовектора $c \ne 0$ веса m. Обратно, предположим, что для некоторого $m \ge 1$ риманов тор $(\mathbb{T}^2, g)$ не допускает неприводимых киллинговых тензорных полей валентностей $1, \dots, m-1$ (это условие отсутствует в случае $m = 1$). Если тензорное поле $Z^{m-1,c}$ потенциально для некоторого $c \ne 0$, то на этом торе существует неприводимое киллингово тензорное поле валентности m.*

Доказательство. Необходимость. Пусть f — действительное неприводимое киллингово тензорное поле валентности m и pf — его старшая гармоника. Поле pf не равно тождественно нулю, иначе f было бы приводимо.

Согласно теореме 2.2 поле pf лежит в ядре оператора δpd и имеет потенциальную дивергенцию. Применяя теорему 3.2, в глобальных изотермических координатах получаем

$$(pf)_{1\dots 1} = e^{2m\mu}c^1, \quad (pf)_{1\dots 12} = e^{2m\mu}c^2 \tag{3.10}$$

для некоторого действительного постоянного псевдовектора $c \neq 0$ веса m. Мы уже вычисляли координаты дивергенции произвольного поля $pf \in C^\infty(\operatorname{Ker}^m j)$ при доказательстве следствия 3.3, а именно

$$(\delta pf)_{1\dots 1} = e^{-2\mu}\Big(\frac{\partial (pf)_{1\dots 1}}{\partial x} + \frac{\partial (pf)_{1\dots 12}}{\partial y}\Big),$$

$$(\delta pf)_{1\dots 12} = e^{-2\mu}\Big(-\frac{\partial (pf)_{1\dots 1}}{\partial y} + \frac{\partial (pf)_{1\dots 12}}{\partial x}\Big).$$

Подставляя сюда значения (3.10) координат поля pf, имеем

$$(\delta pf)_{1\dots 1} = 2me^{2(m-1)\mu}(c^1\mu_x + c^2\mu_y), \quad (\delta pf)_{1\dots 12} = 2me^{2(m-1)\mu}(c^2\mu_x - c^1\mu_y). \tag{3.11}$$

Сравнивая это с определением (3.9) поля $Z^{m,c}$, видим, что тензорное поле $Z^{m-1,c} = \frac{1}{2m}\delta(pf)$ потенциально.

Достаточность. Пусть поле $Z^{m-1,c}$ потенциально для некоторого $c \neq 0$. Определим тензорное поле $h \in C^\infty(\operatorname{Ker}^m j)$, положив в глобальных изотермических координатах

$$h_{1\dots 1} = e^{2m\mu}c^1, \quad h_{1\dots 12} = e^{2m\mu}c^2.$$

Согласно теореме 3.2 поле h лежит в ядре оператора δpd. Кроме того, это поле имеет потенциальную дивергенцию, поскольку $\delta h = 2mZ^{m-1,c}$. Применяя теорему 2.2, получаем киллингово тензорное поле f, для которого h является старшей гармоникой. Согласно лемме 2.3 киллингово тензорное поле f неприводимо. $\square$

Теорема 3.4 фактически сводит задачу нахождения киллинговых тензорных полей валентности m на двумерном римановом торе к следующему вопросу: для каких постоянных псевдовекторов c веса $m-1$ уравнение

$$dv = Z^{m-1,c} \tag{3.12}$$

разрешимо? На первый взгляд, это уравнение не проще исходного уравнения (1.1). Заметим однако, что порядок уравнения (3.12) ниже, чем порядок уравнения (1.1). Действительно, будучи записанным в координатах, (1.1) является системой из $m+2$ линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно координат поля f. Соответствующая система для (3.12) состоит из m уравнений, правда, неоднородных.

В случае $m = 1$ потенциальность поля $Z^{0,c}$ означает, что $Z^{0,c} = c^1\mu_x + c^2\mu_y = 0$ (потенциальное тензорное поле валентности нуль есть тождественно равная нулю функция). Путем изменения глобальной изотермической системы координат можно добиться, чтобы $c = (1,0)$, и мы приходим к утверждению: $\mu_x = 0$. Таким образом, при $m = 1$ теорема 3.4 эквивалентна классическому результату: если на двумерном римановом торе существует нетривиальное киллингово векторное поле, то $\mu = \mu(y)$ в некоторой глобальной изотермической системе координат.

В случае $m = 2$ потенциальность поля $Z^{1,c}$ означает существование такой функции $v \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$, что

$$v_x = e^{2\mu}(c^1\mu_x + c^2\mu_y), \quad v_y = e^{2\mu}(c^2\mu_x - c^1\mu_y).$$

Опять меняем глобальные изотермические координаты так, чтобы $c = (1, 0)$, и получаем

$$v_x = e^{2\mu}\mu_x, \quad v_y = -e^{2\mu}\mu_y.$$

Исключив функцию v из этой системы, приходим к уравнению $\partial^2 e^{2\mu}/\partial x\partial y = 0$. Таким образом, при $m = 2$ теорема 3.4 эквивалентна классическому результату: если на двумерном римановом торе существует неприводимое киллингово тензорное поле валентности 2, то в некоторой глобальной изотермической системе координат метрика имеет вид $g = (a(x) + b(y))(dx^2 + dy^2)$.

Следствие 3.5. *Если риманов тор $(\mathbb{T}^2, g)$ допускает действительное неприводимое киллингово тензорное поле валентности $m + 1 \geq 1$, то для некоторого постоянного действительного псевдовектора $c \neq 0$ веса $m + 1$ равенство*

$$\oint\limits_\gamma e^{m\mu}((c^1\mu_x + c^2\mu_y)\cos m\varphi + (c^2\mu_x - c^1\mu_y)\sin m\varphi)\,dt = 0 \qquad (3.13)$$

справедливо для любой замкнутой геодезической γ, где $\varphi = \varphi(t)$ — угол, образуемый геодезической с координатной линией $y =$ const глобальной изотермической системы координат.

Доказательство. Как известно [1, лемма 4.3.1], любое потенциальное тензорное поле лежит в ядре лучевого преобразования, т. е. интегрируется к нулю вдоль любой замкнутой геодезической. В нашем случае поле $Z^{m,c}$ потенциально по теореме 3.4, следовательно,

$$\oint\limits_\gamma Z^{m,c}_{i_1\dots i_m}\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m}\,dt = 0 \qquad (3.14)$$

для любой замкнутой геодезической γ. Если $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, то

$$Z^{m,c}_{i_1\dots i_m}\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m} = \sum_{k\geq 0}\binom{m}{k} Z^{m,c}_{1\dots 1\underbrace{2\dots 2}_{k}}\dot x^{m-k}\dot y^k.$$

Мы считаем биномиальный коэффициент $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ равным нулю при $k > m$, что позволяет нам не указывать верхний предел суммирования в правой части. Разделяя слагаемые, соответствующие четным и нечетным k, имеем

$$Z^{m,c}_{i_1\dots i_m}\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m} = \sum_{k\geq 0}\binom{m}{2k} Z^{m,c}_{1\dots 1\underbrace{2\dots 2}_{2k}}\dot x^{m-2k}\dot y^{2k} + \sum_{k\geq 0}\binom{m}{2k+1} Z^{m,c}_{1\dots 1\underbrace{2\dots 2}_{2k+1}}\dot x^{m-2k-1}\dot y^{2k+1}.$$

Поскольку $jZ^{m,c} = 0$, справедливы равенства

$$Z^{m,c}_{1\dots 1\underbrace{2\dots 2}_{2k}} = (-1)^k Z^{m,c}_{1\dots 1}, \quad Z^{m,c}_{1\dots 1\underbrace{2\dots 2}_{2k+1}} = (-1)^k Z^{m,c}_{1\dots 12},$$

с помощью которых предыдущая формула принимает вид

$$Z^{m,c}_{i_1\dots i_m}\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m}=Z^{m,c}_{1\dots 1}\sum_{k\ge 0}(-1)^k\binom{m}{2k}\dot x^{m-2k}\dot y^{2k}$$
$$+Z^{m,c}_{1\dots 12}\sum_{k\ge 0}(-1)^k\binom{m}{2k+1}\dot x^{m-2k-1}\dot y^{2k+1}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|\dot\gamma\|^2=e^{2\mu}(\dot x^2+\dot y^2)=1$, т. е. что $\dot x=e^{-\mu}\cos\varphi$, $\dot y=e^{-\mu}\sin\varphi$, и последняя формула превращается в следующую:

$$Z^{m,c}_{i_1\dots i_m}\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m}=e^{-m\mu}\big(Z^{m,c}_{1\dots 1}\cos m\varphi+Z^{m,c}_{1\dots 12}\sin m\varphi\big).$$

Подставляя сюда значения (3.9) компонент тензора $Z^{m,c}$, имеем

$$Z^{m,c}_{i_1\dots i_m}\dot\gamma^{i_1}\dots\dot\gamma^{i_m}=e^{m\mu}((c^1\mu_x+c^2\mu_y)\cos m\varphi+(c^2\mu_x-c^1\mu_y)\sin m\varphi).$$

Наконец, подставляя это выражение в (3.14), приходим к (3.13). $\square$

Переписав (3.13) в виде

$$c^1\oint\limits_\gamma e^{m\mu}(\mu_x\cos m\varphi-\mu_y\sin m\varphi)\,dt+c^2\oint\limits_\gamma e^{m\mu}(\mu_y\cos m\varphi+\mu_x\sin m\varphi)\,dt=0,$$

находим, что отношение

$$\frac{\oint_\gamma e^{m\mu}(\mu_x\cos m\varphi-\mu_y\sin m\varphi)\,dt}{\oint_\gamma e^{m\mu}(\mu_y\cos m\varphi+\mu_x\sin m\varphi)\,dt}\tag{3.15}$$

не должно зависеть от γ. Таким образом, если удастся найти две замкнутые геодезические, для которых отношение (3.15) принимает разные значения, то данный риманов тор не допускает неприводимых киллинговых тензорных полей валентности $m+1$.

§ 4. Киллингово поле валентности 3 на двумерном торе

Пусть $(\mathbb{T}^2,g)=(\mathbb{R}^2/\Gamma,e^{2\mu}(dx^2+dy^2))$ — двумерный риманов тор. Для каждого постоянного псевдовектора $c=(c^1,c^2)$ веса 3 введем тензорное поле $T^c\in C^\infty(\mathrm{Ker}^2 j)$, полагая в глобальной изотермической системе координат

$$T^c_{11}=-T^c_{22}=e^{4\mu}(-c^2\mu_x+c^1\mu_y),\quad T^c_{12}=e^{4\mu}(c^1\mu_x+c^2\mu_y).\tag{4.1}$$

Отметим, что (4.1) лишь обозначениями отличается от (3.9) в случае $m=2$. Действительно,

$$T^c=Z^{2,c^\perp},\quad \text{где } c^\perp=(-c^2,c^1).$$

Если c — постоянный псевдовектор веса 3, то $c^\perp$ также постоянный псевдовектор веса 3.

Пусть $f\in C^\infty(S^3)$ — действительное неприводимое киллингово тензорное поле валентности 3 на торе $(\mathbb{T}^2,g)$. Уравнения (2.6) в данном случае выглядят так:

$$\delta f^{(0)}=0,\quad pdf^{(0)}+\frac12\delta f^{(1)}=0,\quad pdf^{(1)}=0.\tag{4.2}$$

Согласно теореме 3.2 последнее уравнение этой системы означает, что в глобальных изотермических координатах

$$f^{(1)}_{111}=-f^{(1)}_{122}=\frac13c^1e^{6\mu},\quad f^{(1)}_{112}=-f^{(1)}_{222}=\frac13c^2e^{6\mu}\tag{4.3}$$

для некоторого действительного постоянного псевдовектора $0 \ne c = (c^1, c^2)$ веса 3. Коэффициент 1/3 здесь включен для упрощения дальнейших формул. Дивергенцию этого тензорного поля мы уже вычисляли (формулы (3.11)): $\delta f^{(1)} = 2Z^{2,c}$. Таким образом, система (4.2) сводится к следующей:

$$\delta f^{(0)} = 0, \quad pdf^{(0)} = -Z^{2,c}. \tag{4.4}$$

Вычисляем дивергенцию ковекторного поля $f^{(0)}$ по стандартным правилам

$$\delta f^{(0)} = g^{pq}\nabla_p f_q^{(0)} = e^{-2\mu}\left(\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial f_2^{(0)}}{\partial y}\right).$$

Поэтому первое уравнение системы (4.4) в глобальных изотермических координатах выглядит так:

$$\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial f_2^{(0)}}{\partial y} = 0.$$

Удовлетворим это уравнение, полагая

$$f_1^{(0)} = -\nabla_2 u = -u_y, \quad f_2^{(0)} = \nabla_1 u = u_x, \tag{4.5}$$

где $u(x, y)$ — гладкая действительная функция на плоскости, производные u_x и u_y которой Г-периодичны. Функция u определяется полем $f^{(0)}$ однозначно с точностью до аддитивной постоянной.

Определение оператора d с помощью (4.5) дает

$$(df^{(0)})_{11} = -\nabla_1\nabla_2 u, \quad (df^{(0)})_{12} = \frac{1}{2}(\nabla_1\nabla_1 u - \nabla_2\nabla_2 u), \quad (df^{(0)})_{22} = \nabla_1\nabla_2 u.$$

Обратим внимание, что поле $df^{(0)}$ оказалось бесследовым:

$$j(df^{(0)}) = e^{-2\mu}((df^0)_{11} + (df^0)_{22}) = 0.$$

Поэтому $pdf^{(0)} = df^{(0)}$. Итак, второе из уравнений (4.4) в изотермических координатах записывается в виде системы

$$\nabla_1\nabla_2 u = Z_{11}^{2,c}, \quad \frac{1}{2}(\nabla_1\nabla_1 u - \nabla_2\nabla_2 u) = -Z_{12}^{2,c}.$$

Сравнивая (3.9) и (4.1), находим, что $Z_{11}^{2,c} = T_{12}^c$, $Z_{12}^{2,c} = -T_{11}^c$. Поэтому предыдущая система переписывается так:

$$\frac{1}{2}(\nabla_1\nabla_1 u - \nabla_2\nabla_2 u) = T_{11}^c, \quad \nabla_1\nabla_2 u = T_{12}^c. \tag{4.6}$$

Запишем систему (4.6) в инвариантном виде. Для этого прежде всего заметим, что гессиан $\nabla\nabla u = (\nabla_i\nabla_j u)$ функции u является корректно определенным симметричным тензорным полем на торе, поскольку частные производные этой функции Г-периодичны. Риманов лапласиан $\Delta u = \mathrm{tr}(\nabla\nabla u) = g^{ij}\nabla_i\nabla_j u$ — корректно определенная функция на торе. Рассмотрим теперь бесследовую часть гессиана

$$\nabla\nabla u - \frac{1}{2}(\Delta u)g,$$

где g — метрический тензор. В изотермических координатах

$$\left(\nabla\nabla u - \frac{1}{2}(\Delta u)g\right)_{11} = -\left(\nabla\nabla u - \frac{1}{2}(\Delta u)g\right)_{22} = \frac{1}{2}(\nabla_1\nabla_1 u - \nabla_2\nabla_2 u),$$

$$\left(\nabla\nabla u - \frac{1}{2}(\Delta u)g\right)_{12} = \nabla_1\nabla_2 u.$$

Сравнив эти равенства с (4.6), видим, что система (4.6) эквивалентна уравнению

$$\nabla\nabla u - \frac{1}{2}(\Delta u)g = T^c. \tag{4.7}$$

Приведенные рассуждения обратимы, т. е. если $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ — решение уравнения (4.7) с Γ-периодическими производными, то формулы (4.3) и (4.5) определяют киллингово поле валентности 3, которое неприводимо при $c \neq 0$. Таким образом, доказана

Лемма 4.1. *Риманов тор $(\mathbb{R}^2/\Gamma, e^{2\mu}(dx^2+dy^2))$ допускает неприводимое киллингово тензорное поле валентности 3 тогда и только тогда, когда для некоторого постоянного псевдовектора $c \neq 0$ веса 3 уравнение (4.7) обладает решением $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ с Γ-периодическими производными u_x и u_y.*

В этом параграфе мы получим два необходимых условия разрешимости уравнения (4.7), представляющих определенный интерес.

Покажем, что уравнение (4.7) можно разрешить относительно всех третьих производных функции u. Обратим внимание, что на этот раз рассуждение проводится в произвольных координатах. Введем временное обозначение $v = \frac{1}{2}\Delta u$. Дифференцируя (4.7), имеем

$$\nabla_i\nabla_j\nabla_k u = g_{jk}\nabla_i v + \nabla_i T^c_{jk}. \tag{4.8}$$

Согласно формуле коммутации ковариантных производных

$$\nabla_1\nabla_1\nabla_2 u - \nabla_2\nabla_1\nabla_1 u = -R^1{}_{112}\nabla_1 u - R^2{}_{112}\nabla_2 u,$$

$$\nabla_1\nabla_2\nabla_2 u - \nabla_2\nabla_1\nabla_2 u = -R^1{}_{212}\nabla_1 u - R^2{}_{212}\nabla_2 u,$$

где $R = (R^i{}_{jk\ell})$ — тензор кривизны. Подставляя в левые части этих равенств значения третьих производных из (4.8), приходим к системе

$$g_{12}\nabla_1 v - g_{11}\nabla_2 v = -R^1{}_{112}\nabla_1 u - R^2{}_{112}\nabla_2 u + \nabla_2 T^c_{11} - \nabla_1 T^c_{12},$$

$$g_{22}\nabla_1 v - g_{12}\nabla_2 v = -R^1{}_{212}\nabla_1 u - R^2{}_{212}\nabla_2 u + \nabla_2 T^c_{12} - \nabla_1 T^c_{22}.$$

Решая эту систему, получаем

$$\nabla_1 v = -R^{12}{}_{12}\nabla_1 u + \nabla_2(T^c)^2_1 - \nabla_1(T^c)^2_2,$$

$$\nabla_2 v = -R^{12}{}_{12}\nabla_2 u - \nabla_2(T^c)^1_1 + \nabla_1(T^c)^1_2,$$

где $(T^c)^i_j = g^{ip}T^c_{pj}$. Из условия $\operatorname{tr} T^c = g^{ij}T^c_{ij} = 0$ следует, что

$$\nabla_1(T^c)^2_2 = -\nabla_1(T^c)^1_1, \quad \nabla_2(T^c)^1_1 = -\nabla_2(T^c)^2_2,$$

и предыдущие две формулы можно записать единообразно:

$$\nabla_i v = -R^{12}{}_{12}\nabla_i u + \nabla^p T^c_{ip},$$

где $\nabla^p = g^{pq}\nabla_q$. Напомним, что в двумерном случае $R_{ijk\ell} = K(g_{ik}g_{j\ell} - g_{i\ell}g_{jk})$, где K — гауссова кривизна и, следовательно, $R^{12}{}_{12} = K$. Таким образом, предыдущая формула приобретает вид

$$\nabla_i v = -K\nabla_i u + \nabla^p T^c_{ip}.$$

Подставляя это значение в (4.8), получаем окончательную формулу

$$\nabla_i\nabla_j\nabla_k u = g_{jk}\big(-K\nabla_i u + \nabla^p T^c_{ip}\big) + \nabla_i T^c_{jk}. \tag{4.9}$$

Теперь мы собираемся вывести некоторое условие разрешимости системы (4.9). В случае, когда в левых частях уравнений стоят третьи частные производные, стандартным методом получения таких условий разрешимости является дифференцирование уравнений и использование симметричности четвертых производных. Поскольку в нашем случае уравнения написаны в ковариантных производных, нам придется использовать соответствующие формулы коммутации.

Дифференцируя (4.9), имеем

$$\nabla_i\nabla_j\nabla_k\nabla_\ell u = g_{k\ell}\big(-K\nabla_i\nabla_j u - \nabla_i K\cdot\nabla_j u + \nabla_i\nabla^p T^c_{jp}\big) + \nabla_i\nabla_j T^c_{k\ell}.$$

Альтернируем это равенство по индексам (i,j) и записываем результат в виде

$$\begin{aligned} g_{k\ell}\big(-\nabla_j K\cdot\nabla_i u + \nabla_i K\cdot\nabla_j u - \nabla_i\nabla^p T^c_{jp} + \nabla_j\nabla^p T^c_{ip}\big)\\ = \big(\nabla_i\nabla_j T^c_{k\ell} - \nabla_j\nabla_i T^c_{k\ell}\big) - (\nabla_i\nabla_j\nabla_k\nabla_\ell u - \nabla_j\nabla_i\nabla_k\nabla_\ell u). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Покажем, что правая часть этой формулы тождественно равна нулю. Действительно, согласно формуле коммутации для ковариантных производных

$$\begin{aligned} \nabla_i\nabla_j T^c_{k\ell} - \nabla_j\nabla_i T^c_{k\ell} &= -R^p{}_{kij}T^c_{p\ell} - R^p{}_{\ell ij}T^c_{kp},\\ \nabla_i\nabla_j\nabla_k\nabla_\ell u - \nabla_j\nabla_i\nabla_k\nabla_\ell u &= -R^p{}_{kij}\nabla_p\nabla_\ell u - R^p{}_{\ell ij}\nabla_k\nabla_p u. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Подставляя в правую часть последнего равенства значения вторых производных функции u из (4.7), получаем

$$\nabla_i\nabla_j\nabla_k\nabla_\ell u - \nabla_j\nabla_i\nabla_k\nabla_\ell u = -R^p{}_{kij}T^c_{p\ell} - R^p{}_{\ell ij}T^c_{kp} - \frac{1}{2}(\Delta u)R_{\ell kij} - \frac{1}{2}(\Delta u)R_{k\ell ij}.$$

Сумма двух последних слагаемых в правой части равна нулю в силу симметрий тензора кривизны, и формула упрощается до следующей:

$$\nabla_i\nabla_j\nabla_k\nabla_\ell u - \nabla_j\nabla_i\nabla_k\nabla_\ell u = -R^p{}_{kij}T^c_{p\ell} - R^p{}_{\ell ij}T^c_{kp}.$$

Из последней формулы и (4.11) видно, что правая часть равенства (4.10) действительно равна нулю. Теперь (4.10) приобретает вид

$$-\nabla_j K\cdot\nabla_i u + \nabla_i K\cdot\nabla_j u = \nabla_i\nabla^p T^c_{jp} - \nabla_j\nabla^p T^c_{ip}.$$

Полагая здесь $(i,j)=(1,2)$, приходим к равенству

$$-\nabla_2 K\cdot\nabla_1 u + \nabla_1 K\cdot\nabla_2 u = \nabla_1\nabla^p T^c_{2p} - \nabla_2\nabla^p T^c_{1p},$$

которое может быть записано в виде

$$\Big(-\nabla_2 K\frac{\partial}{\partial x^1} + \nabla_1 K\frac{\partial}{\partial x^2}\Big)u = \nabla_1\nabla^p T^c_{2p} - \nabla_2\nabla^p T^c_{1p}. \tag{4.12}$$

Обозначим через $\nabla^\perp K$ векторное поле, получающееся из градиента ∇K поворотом на прямой угол в положительном направлении, считая тор ориентированным и координаты выбранными так, что кратчайший поворот от $\partial/\partial x^1$ до $\partial/\partial x^2$ происходит в положительном направлении. Тогда

$$\nabla^\perp K = \big(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\big)^{-1/2}\Big(-\nabla_2 K\frac{\partial}{\partial x^1} + \nabla_1 K\frac{\partial}{\partial x^2}\Big)$$

и уравнение (4.12) приобретает окончательный вид:

$$(\nabla^{\perp} K)u = \Phi^c, \tag{4.13}$$

где

$$\Phi^c = \big(g_{11}g_{22} - g_{12}^2\big)^{-1/2}\big(\nabla_1\nabla^p T^c_{2p} - \nabla_2\nabla^p T^c_{1p}\big). \tag{4.14}$$

Из (4.13) следует, что Φ^c — корректно определенная гладкая функция на торе. В этом легко убедиться и непосредственно, проверив что правая часть равенства (4.14) не зависит от выбора координат.

Подставив значения (4.1) компонент тензора T^c в (4.14), после несложных вычислений получим выражение для функции Φ^c в глобальных изотермических координатах:

$$\Phi^c = c^1\Lambda_1 + c^2\Lambda_2, \tag{4.15}$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \mu_{xxx} - 3\mu_{xyy} + 10\mu_x\mu_{xx} - 20\mu_y\mu_{xy} - 10\mu_x\mu_{yy} + 8\mu_x^3 - 24\mu_x\mu_y^2, \\ \Lambda_2 &= 3\mu_{xxy} - \mu_{yyy} + 10\mu_y\mu_{xx} + 20\mu_x\mu_{xy} - 10\mu_y\mu_{yy} + 24\mu_x^2\mu_y - 8\mu_y^3. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Как мы знаем, $c = (c^1, c^2)$ есть псевдовектор веса 3. Равенство (4.15) наводит на мысль, что $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ должно быть 1-псевдоформой веса 3. Этот факт вовсе не очевиден из (4.16). Чтобы внести ясность, найдем комплексный вариант формул (4.16). Используя равенства

$$e^{2\mu} = \lambda, \quad \partial_x = \partial_z + \partial_{\bar z}, \quad \partial_y = i(\partial_z - \partial_{\bar z}),$$

посредством несложных вычислений приводим формулы (4.16) к виду

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 2\frac{\lambda_{zzz} + \lambda_{\bar z\bar z\bar z}}{\lambda} + 4\frac{\lambda_z\lambda_{zz} + \lambda_{\bar z}\lambda_{\bar z\bar z}}{\lambda^2} - 2\frac{\lambda_z^3 + \lambda_{\bar z}^3}{\lambda^3}, \\ \Lambda_2 &= i\bigg(2\frac{\lambda_{zzz} - \lambda_{\bar z\bar z\bar z}}{\lambda} + 4\frac{\lambda_z\lambda_{zz} - \lambda_{\bar z}\lambda_{\bar z\bar z}}{\lambda^2} - 2\frac{\lambda_z^3 - \lambda_{\bar z}^3}{\lambda^3}\bigg). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Очевиден инвариантный характер этих формул, выражающийся на нашем языке утверждением: $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ есть 1-псевдоформа веса 3. Слагаемые из правых частей формул (4.17) доставляют нам три примера 1-псевдоформ веса 3:

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)} &= \big(\Lambda_1^{(1)}, \Lambda_2^{(1)}\big) = \frac{1}{\lambda}(\lambda_{zzz} + \lambda_{\bar z\bar z\bar z}, i(\lambda_{zzz} - \lambda_{\bar z\bar z\bar z})), \\ \Lambda^{(2)} &= \big(\Lambda_1^{(2)}, \Lambda_2^{(2)}\big) = \frac{1}{\lambda^2}(\lambda_z\lambda_{zz} + \lambda_{\bar z}\lambda_{\bar z\bar z}, i(\lambda_z\lambda_{zz} - \lambda_{\bar z}\lambda_{\bar z\bar z})), \\ \Lambda^{(3)} &= \big(\Lambda_1^{(3)}, \Lambda_2^{(3)}\big) = \frac{1}{\lambda^3}\big(\lambda_z^3 + \lambda_{\bar z}^3, i\big(\lambda_z^3 - \lambda_{\bar z}^3\big)\big). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Подчеркнем, что эти 1-псевдоформы не содержат никакого произвола, т. е. определяются лишь метрикой g, равно как и участвующая в (4.15) 1-псевдоформа веса 3

$$\Lambda = 2\Lambda^{(1)} + 4\Lambda^{(2)} - 2\Lambda^{(3)}. \tag{4.19}$$

В левой части уравнения (4.13) стоит производная функции u вдоль изолинии γ функции K, параметризованной так, что $\|\dot\gamma\| = \|\nabla K\|$. Интегрируя (4.13) по γ, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.2. *Пусть $(\mathbb{T}^2, g) = (\mathbb{R}^2/\Gamma, \lambda)$ — двумерный риманов тор. Если этот тор допускает действительное неприводимое киллингово тензорное поле валентности 3, то определяемая формулами (4.18), (4.19) 1-псевдоформа Λ веса 3 удовлетворяет следующему условию.*

Найдутся постоянный действительный псевдовектор $c \neq 0$ веса 3 и действительная функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ с Γ-периодическими частными производными, для которых справедливо следующее утверждение.

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{T}^2$ — дуга изолинии $\{K = K_0\}$, не содержащая критических точек функции K (где K — гауссова кривизна) и параметризованная так, что $\|\dot\gamma\| = \|\nabla K\|$. Обозначим через $\tilde\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ поднятие кривой γ относительно накрытия $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma = \mathbb{T}^2$. Тогда

$$\int\limits_a^b (c^1\Lambda_1(\gamma(t)) + c^2\Lambda_2(\gamma(t))\, dt = u(\tilde\gamma(b)) - u(\tilde\gamma(a)). \tag{4.20}$$

Поскольку функция $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ имеет Γ-периодические производные u_x и u_y, она единственным образом представима в виде

$$u(x, y) = w(x, y) + \alpha_1 x + \alpha_2 y, \tag{4.21}$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ и w — Γ-периодическая функция. Выражение $\alpha = \alpha_1\, dx + \alpha_2\, dy$ является корректно определенной замкнутой 1-формой на торе, не зависящей от выбора глобальных изотермических координат. Обозначим через $\sigma = [\alpha] \in H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ одномерный класс когомологий, определяемый формой α.

Рассмотрим случай, когда участвующая в теореме 4.2 кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{T}^2$ замкнута. Если $\tilde\gamma(t) = (\tilde\gamma^1(t), \tilde\gamma^2(t))$ — поднятие этой кривой, то вектор $\tilde\gamma(b) - \tilde\gamma(a)$ принадлежит решетке Γ. Используя представление (4.21), запишем правую часть равенства (4.20) в виде

$$u(\tilde\gamma(b)) - u(\tilde\gamma(a)) = [w(\tilde\gamma(b)) - w(\tilde\gamma(a))] + [\alpha_1(\tilde\gamma^1(b) - \tilde\gamma^1(a)) + \alpha_2(\tilde\gamma^2(b) - \tilde\gamma^2(a))].$$

Разность, стоящая в первых квадратных скобках, равна нулю, поскольку w — Γ-периодическая функция. Выражение во вторых квадратных скобках, очевидно, равно $\langle\sigma, [\gamma]\rangle$, где $[\gamma] \in H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ — одномерный класс когомологий, определяемый циклом γ, и

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \times H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

— каноническое спаривание одномерных дерамовских когомологий и гомологий. Тем самым приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.3. *Пусть $(\mathbb{T}^2, g)$ — двумерный риманов тор. Если этот тор допускает действительное неприводимое киллингово тензорное поле валентности 3, то определяемая формулами (4.18), (4.19) 1-псевдоформа Λ веса 3 удовлетворяет следующему условию.*

Найдутся постоянный действительный псевдовектор $c \neq 0$ веса 3 и класс когомологий $\sigma \in H^1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ такие, что равенство

$$\oint\limits_\gamma (c^1\Lambda_1 + c^2\Lambda_2)\, dt = \langle\sigma, [\gamma]\rangle \tag{4.22}$$

справедливо для любой замкнутой кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{T}$, являющейся частью изолинии $\{K = K_0\}$, не содержащей критических точек гауссовой кривизны и параметризованной так, что $\|\dot\gamma\| = \|\nabla K\|$.

В отличие от теоремы 4.2 здесь нет упоминания о функции u. Поэтому утверждение теоремы 4.3 может рассматриваться в качестве некоего необходимого условия для разрешимости уравнения (4.7).

Следствие 4.4. *В условиях теоремы* 4.3 *пусть* γ — *замкнутая стягиваемая кривая, являющаяся частью изолинии* $\{K = K_0\}$, *и* D — *гомеоморфная кругу замкнутая область на торе, ограниченная кривой* γ. *Предположим, что в* D *имеется ровно одна критическая точка функции* K, *причем эта точка принадлежит внутренности области* D, *невырожденна и ее индекс равен* 0 *или* 2 (*т. е. это точка локального максимума или минимума*). *Тогда*

$$\int_D (c^1\Lambda_1 + c^2\Lambda_2)\, d\sigma = 0, \tag{4.23}$$

где $d\sigma$ — *форма площади.*

Следствие 4.5. *В условиях теоремы* 4.3 *пусть* D — *кольцевая область на торе, гомеоморфная произведению отрезка на окружность. Предположим, что* D *не содержит критических точек функции* K *и обе граничные окружности этой области являются частями изолиний* $\{K = K_0\}$ *и* $\{K = K_1\}$. *Тогда*

$$\int_D (c^1\Lambda_1 + c^2\Lambda_2)\, d\sigma = \pm\langle\sigma, [\gamma]\rangle(K_1 - K_0), \tag{4.24}$$

где γ — *одна из граничных окружностей области* D.

Для доказательства следствий 4.4 и 4.5 достаточно заметить, что если параметризация $\gamma(t)$ изолинии выбрана так, как указано в теореме 4.3, то $dt \wedge dK = \pm d\sigma$.

В заключение вернемся к уравнению (4.7) и выведем из него некоторое новое уравнение четвертого порядка на функцию u. Очевидно, что d^2u есть гессиан функции u, а pd^2u есть бесследовая часть гессиана. Поэтому уравнение (4.7) может быть записано в виде

$$pd^2u = T^c. \tag{4.25}$$

Сопряженным к оператору pd^2 является δ^2. Применяя δ^2 к обеим частям уравнения (4.25), получаем

$$\delta^2 pd^2u = \delta^2 T^c. \tag{4.26}$$

Отметим, что переход от (4.25) к (4.26) необратим. Поэтому дальнейшие выводы должны рассматриваться лишь как необходимые условия разрешимости уравнения (4.7).

Участвующий в (4.26) оператор четвертого порядка $\delta^2 pd^2$ похож на квадрат лапласиана. Чтобы установить связь между этими операторами, проведем некоторые вычисления в координатах. Прежде всего

$$(pd^2u)_{ij} = \nabla_i\nabla_j u - \frac{1}{2} g_{ij}\Delta u.$$

Поэтому

$$\delta^2 pd^2u = \nabla^i\nabla^j\left(\nabla_i\nabla_j u - \frac{1}{2} g_{ij}\Delta u\right) = \nabla^i\nabla^j\nabla_i\nabla_j u - \frac{1}{2}\Delta^2 u.$$

Переставив в первом слагаемом из правой части производные ∇^j и ∇_i с помощью соответствующей коммутационной формулы, получим

$$\delta^2 pd^2u = \frac{1}{2}\Delta^2 u - \nabla^i\bigl(R_i^j\nabla_j u\bigr),$$

где R_i^j — тензор Риччи. В двумерном случае $R_i^j = -K\delta_i^j$, где K — гауссова кривизна, и последняя формула приобретает вид

$$\delta^2 p d^2 u = \frac{1}{2}\Delta^2 u + \nabla^i(K\nabla_i u).$$

Таким образом, уравнение (4.26) эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{2}\Delta^2 u + \delta(K du) = \delta^2 T^c. \tag{4.27}$$

Теперь вычисляем правую часть уравнения (4.27). Мы уже вычисляли дивергенцию произвольного бесследового тензорного поля (формула (3.8)). Применяя эту формулу к T^c и используя (4.1), в глобальных изотермических координатах находим

$$(\delta T^c)_1 = e^{2\mu}\big(-c^2\mu_{xx} + 2c^1\mu_{xy} + c^2\mu_{yy} - 4c^2\mu_x^2 + 8c^1\mu_x\mu_y + 4c^2\mu_y^2\big),$$
$$(\delta T^c)_2 = e^{2\mu}\big(c^1\mu_{xx} + 2c^2\mu_{xy} - c^1\mu_{yy} + 4c^1\mu_x^2 + 8c^2\mu_x\mu_y - 4c^1\mu_y^2\big).$$

Подставляя эти значения в формулу

$$\delta^2 T^c = e^{-2\mu}\left(\frac{\partial(\delta T^c)_1}{\partial x} + \frac{\partial(\delta T^c)_2}{\partial y}\right),$$

получаем

$$\delta^2 T^c = -c^2\Lambda_1 + c^1\Lambda_2,$$

где $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ определяется формулами (4.16). Таким образом, уравнение (4.27) приобретает вид

$$\frac{1}{2}\Delta^2 u + \delta(K du) = -c^2\Lambda_1 + c^1\Lambda_2$$

или, в более традиционных обозначениях,

$$\frac{1}{2}\Delta^2 u + \operatorname{div}(K\nabla u) = -c^2\Lambda_1 + c^1\Lambda_2. \tag{4.28}$$

Объединив уравнения (4.13) и (4.28), приходим к следующему утверждению.

Теорема 4.6. *Если риманов тор $(\mathbb{R}^2/\Gamma, g)$ допускает неприводимое киллингово тензорное поле валентности 3, то найдется такой постоянный действительный псевдовектор $0 \neq c = (c^1, c^2)$, что система уравнений*

$$(\nabla^\perp K)u = c^1\Lambda_1 + c^2\Lambda_2, \quad \frac{1}{2}\Delta^2 u + \operatorname{div}(K\nabla u) = -c^2\Lambda_1 + c^1\Lambda_2 \tag{4.29}$$

обладает решением $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ с Γ-периодичными производными u_x и u_y. Здесь K — гауссова кривизна, а $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ — 1-псевдоформа, определяемая в глобальных изотермических координатах формулами (4.18), (4.19).

Интегрируя второе из равенств (4.29) по тору, получаем

$$-c^2\int\limits_{\mathbb{T}^2}\Lambda_1\,d\sigma + c^1\int\limits_{\mathbb{T}^2}\Lambda_2\,d\sigma = 0,$$

где $d\sigma = e^{2\mu}\,dxdy$ — форма площади. На первый взгляд, может показаться, что это равенство позволяет найти отношение c^1/c^2. На самом деле это не так, поскольку равенства

$$\int\limits_{\mathbb{T}^2}\Lambda_1\,d\sigma = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{T}^2}\Lambda_2\,d\sigma = 0 \tag{4.30}$$

справедливы всегда безотносительно к существованию киллинговых полей. Действительно, согласно (4.14), (4.15) для любого постоянного псевдовектора $c = (c^1, c^2)$ в глобальных изотермических координатах имеем

$$c^1\Lambda_1 + c^2\Lambda_2 = e^{-2\mu}(\nabla_1(\delta T^c)_2 - \nabla_2(\delta T^c)_1) = \nabla^1(\delta T^c)_2 - \nabla^2(\delta T^c)_1.$$

Введем ковекторное поле $v = (\delta T^c)^{\perp} = -(\delta T^c)_2\,dx + (\delta T^c)_1\,dy$. В терминах v предыдущая формула переписывается так:

$$c^1\Lambda_1 + c^2\Lambda_2 = -(\nabla^1 v_1 + \nabla^2 v_2) = -\delta v.$$

Следовательно,

$$c^1 \int\limits_{\mathbb{T}^2} \Lambda_1\,d\sigma + c^2 \int\limits_{\mathbb{T}^2} \Lambda_2\,d\sigma = 0.$$

Это эквивалентно (4.29) в силу произвольности c.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sharafutdinov V.* Integral geometry of tensor fields. Utrecht, The Netherlands: VSP, 1994.
2. *Darboux G.* Lecons sur la théorie generale des surfaces et les applications géometriques du calcul infenitesimal. Paris: Gauthier-Villars, 1891.
3. *Birkhoff G. D.* Dynamical systems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1927. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; V. 9).
4. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Геометрия и топология интегрируемых геодезических потоков на поверхностях. М.: УРСС, 1999.
5. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
6. *Guillemin V., Kazhdan D.* Some inverse spectral results for negatively curved 2-manifolds // Topology. 1980. V. 19. P. 301–312.
7. *Даирбеков Н. С., Шарафутдинов В. А.* Конформно киллинговы симметричные тензорные поля на римановых многообразиях // Мат. труды. 2010. Т. 15, № 1. С. 85–145.
8. *Matveev V., Shevchishin V.* Differential invariants for cubic integrals of geodesic flows on surfaces // J. Geom. Phys. 2010. V. 60. P. 833–856.
9. *Колокольцов В. Н.* Геодезические потоки на двумерных поверхностях с дополнительным первым интегралом, полиномиальным по скоростям // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т. 46. С. 994–1010.
10. *Bialy M., Mironov A.* Cubic and quartic integrals for geodesic flow on 2-torus via a system of the hydrodynamic type // Nonlinearity. IOP Publ. 2011. V. 24. P. 3541–3557.
11. *Шарафутдинов В. А.* О симметричных тензорных полях на римановом многообразии. Новосибирск, 1984. (Препринт/ВЦ СО РАН СССР; № 539).

Статья поступила 17 ноября 2014 г.

Шарафутдинов Владимир Альтафович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
sharaf@math.nsc.ru