Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 517.9

О ТЕОРЕМЕ ВИНЕРА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ

И. И. Струкова

Аннотация. Рассматриваются периодические на бесконечности функции со значениями в комплексном банаховом пространстве. Вводятся понятия канонического и обобщенного рядов Фурье периодической на бесконечности функции. Получен аналог теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для периодических на бесконечности функций, ряды Фурье которых суммируемы с весом. Приводятся критерий представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы чисто периодической и исчезающей на бесконечности функций, а также спектральный критерий периодичности на бесконечности функции. Результаты статьи получены с существенным использованием спектральной теории изометрических представлений.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.114

Ключевые слова: банахово пространство, медленно меняющаяся на бесконечности функция, периодическая на бесконечности функция, ряд Фурье, теорема Винера.

§ 1. Основные понятия и результаты

Пусть X — комплексное банахово пространство, $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Пусть $\mathbb{J}$ — один из промежутков $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Символом $C_b = C_b(\mathbb{J}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{J}$ функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{J}} \|x(t)\|_X$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из C_b, $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$ — замкнутое подпространство исчезающих на бесконечности функций, т. е. функций, для которых выполняется условие $\lim\limits_{|t| \to \infty} \|x(t)\| = 0$.

В банаховом пространстве $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим полугруппу операторов $S : \mathbb{J} \to \operatorname{End} C_{b,u}$, действующих по правилу

$$(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau), \quad t, \tau \in \mathbb{J}. \tag{1}$$

Отметим, что S — группа операторов, если $\mathbb{J} = \mathbb{R}$.

Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $(S(t)x - x) \in C_0(\mathbb{J}, X)$ для любого $t \in \mathbb{J}$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим через $C_{\mathrm{sl},\infty} = C_{\mathrm{sl},\infty}(\mathbb{J}, X)$. Примерами таких функций являются

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 16–01–00197) и Российского научного фонда (код проекта № 14–21–00066).

1) $x_1(t) = \sin\ln(1+t^2)$, $t \in \mathbb{R}$;

2) $x_2(t) = \operatorname{arctg} t$, $t \in \mathbb{R}$;

3) $x_3 : \mathbb{R}_+ \to X$, $x_3(t) = c + x_0(t)$, $t \geq 0$, где c — вектор из банахова пространства X и x_0 — любая функция из $C_0(\mathbb{R}_+, X)$;

4) любая непрерывно дифференцируемая функция x из $C_b(\mathbb{R}, X)$ со свойством $x' \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Такое определение медленно меняющейся на бесконечности функции рассматривалось в [1–5]. В теории дифференциальных уравнений (см. [6, 3.6.3]) использовалось эквивалентное (если рассматривать функции из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$) определение, при этом функции назывались *стационарными на бесконечности.*

В статьях Пака [7, с. 123] и Караматы [8] положительная непрерывная функция $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ называлась *медленно меняющейся*, если при любом $\lambda > 0$ выполнено $\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1$ при $x \to +\infty$.

Определение 2. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *периодической на бесконечности периода* $\omega > 0$ (*ω-периодической на бесконечности*), если

$$(S(\omega)x - x) \in C_0(\mathbb{J}, X)$$

или, что эквивалентно, $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t+\omega) - x(t)\|_X = 0$.

Таким образом, каждая периодическая на бесконечности периода ω функция x является решением разностного уравнения вида $x(t+\omega)-x(t) = y(t)$, $t \in \mathbb{J}$, где $y \in C_0(\mathbb{J}, X)$, а каждая медленно меняющаяся на бесконечности функция является периодической на бесконечности любого периода. Периодические на бесконечности функции, определенные на $\mathbb{R}^N$, со значениями в комплексном банаховом пространстве рассматривались в [9, 10]. В [2] было дано определение почти периодической на бесконечности функции.

Множество ω-периодических на бесконечности функций обозначим символом $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$.

Отметим,что оба множества $C_{\mathrm{sl},\infty}(\mathbb{J}, X)$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ образуют линейные замкнутые подпространства из банахова пространства $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Банахово пространство $C_\omega = C_\omega(\mathbb{J}, X)$ непрерывных периодических периода ω функций, определенных на $\mathbb{J}$ со значениями в X, образует замкнутое подпространство в $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$. Таким образом, имеют место включения $C_{\mathrm{sl},\infty}(\mathbb{J}, X) \subset C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, при этом все эти подпространства инвариантны относительно операторов $S(t)$, $t \in \mathbb{J}$.

Если $X = \mathbb{C}$, то в обозначениях рассматриваемых функциональных пространств опускается символ X, например, $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J})$ обозначает пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, \mathbb{C})$.

Примерами периодических на бесконечности функций являются

1) предельно периодические функции, т. е. любая функция $x : \mathbb{J} \to X$, представимая в виде $x = y + y_0$, где $y \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, $y_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$;

2) функция $\bar{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ такая, что она совпадает с $x \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$ на $\mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} \|\bar{x}(t)\|_X = 0$;

3) любая функция из $C_{\mathrm{sl},\infty}(\mathbb{J}, X)$;

4) любая функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, представимая в виде $x = \sum\limits_{k=-n}^{n} x_k(t) e^{i\frac{2\pi k}{\omega} t}$, $t \in \mathbb{J}$, $n \in \mathbb{N}$, где $x_k \in C_{\mathrm{sl},\infty}(\mathbb{J}, X)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Отметим следующее свойство пространств $C_{\mathrm{sl},\infty}(\mathbb{J})$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J})$: пространство $C_{\mathrm{sl},\infty}(\mathbb{J})$ несепарабельно (семейство функций $\{x_\alpha, \alpha \geq 0\}$ из $C_b(\mathbb{R}_+)$ вида

$x_\alpha(t) = \exp(i\alpha \ln(1+t))$, $\alpha, t \geq 0$, обладает свойством $\|x_\alpha - x_\beta\|_\infty \geq \sqrt{2}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \neq \beta$). Следовательно, несепарабельным является и банахово пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J})$.

Если X — банахова алгебра, то все введенные в рассмотрение функциональные пространства являются банаховыми алгебрами (с операцией поточечного умножения $(xy)(t) = x(t)y(t)$, $t \in \mathbb{J}$, для функций x, y из рассматриваемого пространства). Каждая из таких алгебр коммутативна, если коммутативна алгебра X, и является C^*-алгеброй, если X — C^*-алгебра. В частности, коммутативными C^*-алгебрами являются алгебры $C_{\mathrm{sl},\infty}(\mathbb{J})$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J})$.

Определение 3. *Каноническим рядом Фурье* функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \quad t \in \mathbb{J},$$

где функции $x_n : \mathbb{J} \to X$, $n \in \mathbb{Z}$, определяются формулами

$$x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t+\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}\, d\tau, \quad t, \tau \in \mathbb{J}, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

и называются *каноническими коэффициентами Фурье* функции x.

Ясно, что если $x \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$, то $x_k(t) \equiv x_k = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}\, d\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, — обычные коэффициенты Фурье функции x.

Определение 4. *Обобщенным рядом Фурье* функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \quad t \in \mathbb{J}, \tag{3}$$

где y_n, $n \in \mathbb{Z}$, — функции из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ такие, для которых $y_n - x_n \in C_0(\mathbb{J}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, а функции x_n, $n \in \mathbb{Z}$, определяются формулой (2).

Отметим, что если функция $\bar{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ такова, что она совпадает с $x \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$ на $\mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} \|\bar{x}(t)\| = 0$, то $\bar{x} \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и один из ее обобщенных рядов Фурье имеет вид $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $y_n(t) \equiv x_n$, $n \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$, x_n, $n \in \mathbb{Z}$, — коэффициенты Фурье функции x, и $y_n(t) = 0$ при $t \leq -1$, причем y_n — непрерывная функция.

Лемма 1. *Канонические коэффициенты Фурье x_n, $n \in \mathbb{Z}$ (определенные формулой (2)), функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ являются медленно меняющимися на бесконечности функциями, т. е. $x_n \in C_{\mathrm{sl},\infty}(\mathbb{J}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Утверждение леммы вытекает из равенств

$$x_n(t+\omega) - x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega (S(\omega)x - x)(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}\, d\tau, \quad t \in \mathbb{J}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Непосредственно из определения 4 и леммы 1 следует, что коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ обладают свойством $y_n \in C_{\mathrm{sl},\infty}(\mathbb{J}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 5. Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье

$$x(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, \quad t \in \mathbb{J},$$

периодической на бесконечности функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ *сходится к x относительно подпространства* $C_0(\mathbb{J}, X)$, если существует последовательность функций (x_n^0) из $C_0(\mathbb{J}, X)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{J}} \left\| x(t) - \sum_{k=-n}^{n} y_k(t) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t} + x_n^0(t) \right\|_X = 0.$$

Важно отметить, что данное определение корректно, т. е. сходимость не зависит от выбора обобщенного ряда Фурье функции x. Это объясняется тем, что $y_n - x_n \in C_0(\mathbb{J}, X)$, где x_n, $n \in \mathbb{Z}$, — канонические коэффициенты Фурье функции x, определяемые по формуле (2).

Символом $\|y_n\|_\sim$, $n \in \mathbb{Z}$, обозначим величину $\inf\limits_{x_0\in C_0(\mathbb{J},X)} \|y_n - x_0\|_\infty$.

Определение 6. Будем говорить, что функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ имеет *абсолютно сходящийся ряд Фурье,* если существует обобщенный ряд Фурье (3) этой функции такой, что $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\|_\infty < \infty$ (или, что то же самое, если $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_\sim < \infty$, где x_n, $n \in \mathbb{Z}$, — канонические коэффициенты Фурье функции x).

Обобщенные коэффициенты Фурье периодической на бесконечности функции могут сходиться к нулю сколь угодно медленно. Далее приведен соответствующий

Пример. Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такую, что $\operatorname{supp}\varphi \subset [0, 1]$ и $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Возьмем произвольную числовую последовательность (α_n), $n \geq 1$, со свойством $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Далее построим последовательность функций (x_n) из $C_{\mathrm{sl},\infty}(\mathbb{R}_+)$ с непересекающимися носителями:

$$x_1(t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{t-2^m}{\ln(m+2)}\right), & t \in [2^m, 2^m + \ln(m+2)],\ m \geq 0, \\ 0, & t \notin \bigcup\limits_{m\geq 0} [2^m, 2^m + \ln(m+2)], \end{cases}$$

$$x_n(t) = \begin{cases} \alpha_n x_1(t - (n-1)\ln(n+2)), & t \geq 2^n, \\ 0, & t \in [0, 2^n),\ n \geq 2. \end{cases}$$

Поскольку $\|x_n\|_\sim = \alpha_n$, $n \geq 1$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n(t)e^{int}$ равномерно сходится к некоторой функции x периода 2π. Этот ряд является обобщенным рядом Фурье для x (но не является каноническим). Ввиду произвольности выбора последовательности (α_n) со свойством $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ получаем, что обобщенные коэффициенты Фурье функций из $C_{2\pi,\infty}(\mathbb{R})$ могут сколь угодно медленно сходиться к нулю.

Заметим, что если функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ дважды непрерывно дифференцируема и $x', x'' \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, то $x', x'' \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$. Непосредственный подсчет канонических коэффициентов Фурье функции x'' показывает, что канонический ряд Фурье функции x абсолютно сходится.

Отметим также, что если функция x имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ее канонический ряд Фурье сходится к x относительно подпространства

$C_0(\mathbb{J}, X)$. Однако канонический ряд Фурье функции x может не быть абсолютно сходящимся, хотя функция имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье в смысле определения 6.

Символом $A_\omega(\mathbb{R})$ обозначим замкнутую подалгебру функций из $C_\omega(\mathbb{R})$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье. Одним из основных результатов статьи является теорема 2, в которой следующая знаменитая теорема Винера (см. [11]) распространяется на периодические на бесконечности функции, ряды Фурье которых суммируемы с весом.

Теорема 1 [11]. *Если функция $f \in A_\omega(\mathbb{R})$ обладает свойством $f(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то функция $1/f$ также имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Пусть X — банахова алгебра с единицей e.

Определение 7. Функцию $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ назовем *обратимой относительно подпространства* $C_0(\mathbb{J}, X)$ (или *обратимой на бесконечности*), если существует функция $y \in C_b(\mathbb{J}, X)$ такая, что $xy - e, yx - e \in C_0(\mathbb{J}, X)$, где $e(t) \equiv e$, $t \in \mathbb{J}$. Функцию y будем называть *обратной к x относительно подпространства* $C_0(\mathbb{J}, X)$.

Непосредственно из определения 7 следует, что функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде $x = y + x_0$, где $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$, а функция $y \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ такова, что $\inf\limits_{t\in\mathbb{J}} \|y(t)\|_X > 0$. Из определения 7 также следует, что функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$ тогда и только тогда, когда существует такое число $A > 0$, что $\inf\limits_{|t|>A} \|x(t)\|_X > 0$.

Если y_1, y_2 — функции, обратные к $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$, то $y_1 - y_2 \in C_0(\mathbb{J}, X)$.

Рассмотрим функцию $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ и введем обозначение $d_a(k) = \|a_k\|_\sim$, $k \in \mathbb{Z}$, где a_k — k-й канонический коэффициент Фурье функции a, определяемый по формуле (2). Для рассматриваемой функции будем считать выполненным одно из условий следующего предположения.

Предположение 1. *Для функции $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ выполнено одно из следующих условий:*

(1) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_a(k) < \infty$, *т. е. функция a обладает абсолютно сходящимся рядом Фурье;*

(2) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_a(k)\alpha(k) < \infty$, *где $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ — неубывающий субэкспоненциальный вес, т. е. для функции α выполнены следующие три условия:*

а) $\lim\limits_{|k|\to\infty} \frac{\ln \alpha(k)}{|k|} = 0$,

б) $\alpha(k) \geq 1$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}$,

в) $\alpha(k+n) \leq \alpha(k)\alpha(n)$ *для всех* $k, n \in \mathbb{Z}$;

(3) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_a(k)\beta(k) < \infty$, *где $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ — функция, для которой выполнены следующие условия:*

а) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\beta(k)} < \infty$,

б) $\lim\limits_{|k|\to\infty} \frac{\ln \beta(k)}{|k|} = 0$,

в) *существует постоянная $C(\beta) > 0$ такая, что* $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\beta(k-j)\beta(j)} \leq C(\beta)\frac{1}{\beta(k)}$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}$, г) $\lim\limits_{m\to\infty}\beta_0(m) = 0$, *где функция* $\beta_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *определяется равенством* $\beta_0(m) = \sup\limits_{|k|\ge 2} \sum\limits_{|j|\le m-1} \frac{\beta(k)}{\beta(mk+j)}$, $m \ge 1$;

(4) $d_a(k) \le M\gamma^{|k|}$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ *для некоторых постоянных* $M = M(a) > 0$ *и* $\gamma = \gamma(a) \in (0,1)$;

(5) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_a(k)(1+|k|)^q < \infty$ *для некоторого* $q > 1$;

(6) $d_a(k) = 0$ *при* $|k| \ge m$ *для некоторого* $m = m(a) \in \mathbb{N}$ *(т. е. существует обобщенный ряд Фурье функции* a*, имеющий конечное число отличных от нуля коэффициентов Фурье).*

Основным результатом данной работы является

Теорема 2. *Если для обратимой относительно подпространства* $C_0(\mathbb{J}, X)$ *функции* $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ *выполнено одно из условий* (1)–(4) *предположения* 1, *то любая обратная к ней относительно подпространства* $C_0(\mathbb{J}, X)$ *функция* b *удовлетворяет соответствующему условию:*

$(1')$ $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_b(k) < \infty$;

$(2')$ $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_b(k)\alpha(k) < \infty$;

$(3')$ $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_b(k)\beta(k) < \infty$;

$(4')$ $d_b(k) \le N\gamma^{|k|}$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ *для некоторых постоянных* $N = N(b) > 0$ *и* $\gamma_1 = \gamma_1(b) \in (0,1)$.

Если же для функции a *выполнено одно из условий* (5), (6), *то обратная к ней относительно* $C_0(\mathbb{J}, X)$ *функция* b *удовлетворяет условию* $(1')$.

Рассмотрим последовательность операторов (A_N) из $\operatorname{End} C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ вида $A_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} S(k\omega)$, $N \ge 1$, причем $\|A_N\| = 1$, $N \ge 1$.

Справедлив следующий критерий представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы периодической и исчезающей на бесконечности функций.

Теорема 3. *Для того чтобы функция* $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ *была представима в виде* $x = x_1 + x_0$, *где* $x_1 \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$, *необходимо и достаточно, чтобы в* $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ *существовал* $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x$.

В теореме 6 получен спектральный критерий периодичности на бесконечности функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$.

Один из основных результатов данной статьи (а именно теорема 2) близок к результатам, полученным в [12]. Однако в [12] рассматриваются только три класса функций и не рассматриваются функции, определенные на полуоси. К тому же в данной статье получен ряд дополнительных результатов, которые отсутствуют в [12].

§ 2. О гармоническом анализе периодических векторов и операторов

Пусть $\mathscr{X}$ — комплексное банахово пространство и $T : \mathbb{R} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$ — сильно непрерывное изометрическое представление.

Пусть $L^1(\mathbb{R})$ — банахова алгебра определенных на $\mathbb{R}$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных функций со сверткой функций в качестве умножения:

$$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R},\ f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Банахово пространство $\mathscr{X}$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля с помощью формулы

$$fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)x\,dt, \quad x \in \mathscr{X},\ f \in L^1(\mathbb{R}). \tag{4}$$

Используемые далее понятия из спектральной теории модулей можно найти в [13–20].

Далее через $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ обозначается преобразование Фурье

$$\hat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

функции $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Определение 8. *Спектром Бёрлинга* вектора $x \in \mathscr{X}$ называется множество $\Lambda(x)$ чисел из $\mathbb{R}$ вида

$$\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0 \text{ для любой функции } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ с } \hat{f}(\lambda_0) \neq 0\}.$$

Из определения следует, что $\Lambda(x) = \mathbb{R} \backslash \{\mu_0 \in \mathbb{R} :$ существует функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $\hat{f}(\mu_0) \neq 0$ и $fx = 0\}$.

Лемма 2 (см. [14–18]). *Для любых $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathscr{X}$ справедливы следующие свойства:*

(1) *из условия $fx = 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ следует, что $x = 0$ (т. е. $L^1(\mathbb{R})$-модуль $\mathscr{X}$ невырожденный);*

(2) *$\Lambda(x)$ — замкнутое подмножество из $\mathbb{R}$, причем $\Lambda(x) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;*

(3) *$\Lambda(fx) \subset (\operatorname{supp} \hat{f}) \cap \Lambda(x)$;*

(4) *$fx = 0$, если $(\operatorname{supp} \hat{f}) \cap \Lambda(x) = \varnothing$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\hat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;*

(5) *$\Lambda(x) = \{\lambda_0\}$ — одноточечное множество тогда и только тогда, когда вектор $x \neq 0$ удовлетворяет равенствам $T(t)x = \exp(i\lambda_0 t)x$, $t \in \mathbb{R}$.*

Банахово пространство $C_b(\mathbb{R}, X)$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля (см. [13, 18]) с помощью операции свертки

$$(f*x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)(S(-\tau)x)(t)\,d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-\tau)x(\tau)\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $f \in L^1(\mathbb{R})$, $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$.

Банахово пространство $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ является замкнутым подмодулем пространства $C_b(\mathbb{R}, X)$, а структура банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля на нем задается формулой (4), где $\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и $T(t) = S(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Определение 9. Число $\lambda_0 \in \Lambda(x)$ отнесем к *несущественному спектру* $\Lambda_0(x)$ функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$, если существует функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что

$\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $f * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Множество $\Lambda_{\mathrm{ess}}(x) = \Lambda(x) \backslash \Lambda_0(x)$ назовем *существенным спектром* функции x.

Определение 10. Пусть $x \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$ и $\bar{x}$ — функция из $C_b(\mathbb{R}, X)$, совпадающая с x на $\mathbb{R}_+$ и обладающая свойством $\lim\limits_{t \to -\infty} \bar{x}(t) = 0$. *Существенным спектром* $\Lambda_{\mathrm{ess}}(x)$ функции x назовем множество $\Lambda_{\mathrm{ess}}(\bar{x})$.

Данное определение корректно, т. е. не зависит от выбора продолжения $\bar{x} \in C_b(\mathbb{R}, X)$ функции x на $\mathbb{R}$ (если $\bar{x}_1$ — еще одно такое продолжение x на $\mathbb{R}$, то $\bar{x}_1 - \bar{x} \in C_0(\mathbb{R}, X)$).

Заметим, что существенный спектр функции $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x(t) = \exp it^2$, $t \in \mathbb{R}$, пуст. Если $x(t) = y(t) + x_0(t)$, $t \geq 0$, где $y \in C_\omega(\mathbb{R}_+, X)$ и $x_0 \in C_0(\mathbb{R}_+, X)$, то $\Lambda_{\mathrm{ess}}(x) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$. Если $z \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$ — нечетная периодическая функция, то функция $z_1 : t \mapsto z(|t|)$ не является периодической, но z_1 периодическая на бесконечности периода ω, а ее существенный спектр содержится в множестве $\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.

Определение 11. Вектор $x_0 \in \mathscr{X}$ назовем *периодическим вектором* периода $\omega > 0$ (относительно представления T), если $T(\omega)x_0 = x_0$.

Множество периодических (периода ω) векторов обозначим через $\mathscr{X}_\omega = \mathscr{X}_\omega(T)$. Оно образует замкнутое подпространство в $\mathscr{X}$, инвариантное относительно операторов $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 4. *Для того чтобы вектор $x_0 \in \mathscr{X}$ был периодическим периода $\omega > 0$ (т. е. $x_0 \in \mathscr{X}_\omega$), необходимо и достаточно, чтобы имело место включение*

$$\Lambda(x_0) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость. Если $x_0 \in \mathscr{X}_\omega$, то по определению $T(\omega)x_0 - x_0 = 0$. Тогда для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ из формулы (4) получаем, что

$$f(T(\omega)x_0 - x_0) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T(-\tau)(T(\omega)x_0 - x_0)\, d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T(-\tau + \omega)x_0\, d\tau - fx_0$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} (T(\omega)f)(u)T(-u)x_0\, du - fx_0 = (T(\omega)f - f)x_0 = 0.$$

Если $\lambda_0 \notin \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$, то рассмотрим $f \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$. Тогда $\hat{g}(\lambda_0) = (e^{i\lambda_0\omega} - 1)\hat{f}(\lambda_0) \neq 0$ для $g = S(\omega)f - f \in L^1(\mathbb{R})$. Отсюда получаем, что найдена функция $g \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $gx = (S(\omega)f - f)x = 0$ и $\hat{g}(\lambda_0) \neq 0$. Из определения 9 следует, что $\lambda_0 \notin \Lambda(x_0)$. Таким образом, доказано включение (5).

Достаточность. Пусть для $\Lambda(x_0)$ выполнено (5). Рассмотрим вектор $y_0 = T(\omega)x_0 - x_0$. Если функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\operatorname{supp} \hat{f}$ — компакт, то из свойства 3 леммы 2 следует, что $\Lambda(fy_0) \subset \operatorname{supp} \hat{f} \cap \Lambda(y_0) \subset \operatorname{supp} \hat{f} \cap \Lambda(x_0) \subset \operatorname{supp} \hat{f} \cap \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ есть конечное множество вида $\left\{\frac{2\pi}{\omega}k_1, \ldots, \frac{2\pi}{\omega}k_n\right\}$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$.

Из доказательства теоремы 1 в [13] и теоремы 3.2.7 в [17] следует, что вектор fx_0 представим в виде

$$fx_0 = x_1 + \cdots + x_n,$$

где $\Lambda(x_j) = \left\{\frac{2\pi}{\omega}k_j\right\}$, $T(t)x_j = e^{i\frac{2\pi}{\omega}k_j t}x_j$, $1 \leq j \leq n$. Тогда

$$fy_0 = f(T(\omega)x_0 - x_0) = (T(\omega) - I)fx_0 = \sum_{j=1}^{n}(e^{i2\pi k_j} - 1)x_j = 0.$$

Поскольку множество функций из $L^1(\mathbb{R})$, имеющих преобразование Фурье с компактным носителем, плотно в $\mathscr{X}$ и $L^1(\mathbb{R})$-модуль $\mathscr{X}$ невырожденный (см. свойство 1 леммы 2), то $T(\omega)x_0 - x_0 = 0$. Стало быть, $x_0 \in \mathscr{X}_\omega$. Теорема доказана.

Из равенств $T(t+\omega)x - T(t)x = T(t)(T(\omega)x - x) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, для любого $x \in \mathscr{X}_\omega$ следует, что $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathscr{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x$, является непрерывной периодической функцией. Рассмотрим ее ряд Фурье

$$\varphi_x(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},$$

где $x_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)xe^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}\,d\tau$, $n \in \mathbb{Z}$.

Определение 12. Ряд $x \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n$ назовем *рядом Фурье* вектора $x \in \mathscr{X}_\omega$, а векторы x_n, $n \in \mathbb{Z}$, — *коэффициентами Фурье* вектора x.

Если ряд Фурье вектора $x \in \mathscr{X}$ абсолютно сходится, т. е. выполнено условие $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty$, то справедливо равенство $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n = \lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=-N}^{N} x_n$.

Наряду с изометрическим (не обязательно периодическим) представлением $T : \mathbb{J} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$ рассмотрим представление $\widetilde{T} : \mathbb{J} \to \operatorname{End}(\operatorname{End}\mathscr{X})$, $\widetilde{T}(t)A = T(t)AT(-t)$, $t \in \mathbb{J}$, $A \in \operatorname{End}\mathscr{X}$.

Определение 13. Оператор $A \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ назовем *периодическим* (относительно представления $\widetilde{T}$) *периода* $\omega > 0$, если

$$\widetilde{T}(\omega)A = T(-\omega)AT(\omega) = A$$

(т. е. оператор A перестановочен с оператором $T(\omega)$), и функция $t \mapsto T(t)AT(-t)$: $\mathbb{J} \to \operatorname{End}\mathscr{X}$ непрерывна в равномерной операторной топологии.

Множество ω-периодических операторов образует замкнутую подалгебру $\operatorname{End}_\omega \mathscr{X} = (\operatorname{End}\mathscr{X})_\omega$ из алгебры $\operatorname{End}\mathscr{X}$.

В соответствии с определением 11 рассмотрим ряд Фурье $A \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ оператора A относительно представления $\widetilde{T}$, где $A_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)AT(-\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}\,d\tau$.

Определим двустороннюю последовательность $(d_A(n))$, положив $d_A(n) = \|A_n\|_{\mathscr{X}}$, $n \in \mathbb{Z}$. Для рассматриваемого оператора будем считать выполненным одно из условий следующего предположения.

Предположение 2. *Для оператора $A \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ выполнено одно из условий:*

(1) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k) < \infty$, *т. е. оператор A обладает абсолютно сходящимся рядом Фурье;*

(2) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k)\alpha(k) < \infty$, *где $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ — неубывающий субэкспоненциальный вес, т. е. для функции α выполнены следующие три условия:*

а) $\lim\limits_{|k|\to\infty} \frac{\ln\alpha(k)}{|k|} = 0$,

б) $\alpha(k) \geq 1$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}$,

в) $\alpha(k+n) \leq \alpha(k)\alpha(n)$ *для всех* $k, n \in \mathbb{Z}$;

(3) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k)\beta(k) < \infty$, *где* $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ — *функция, для которой выполнены следующие условия:*

а) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\beta(k)} < \infty$,

б) $\lim\limits_{|k|\to\infty} \frac{\ln\beta(k)}{|k|} = 0$,

в) *существует постоянная* $C(\beta) > 0$ *такая, что* $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\beta(k-j)\beta(j)} \le C(\beta)\frac{1}{\beta(k)}$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}$,

г) $\lim\limits_{m\to\infty} \beta_0(m) = 0$, *где функция* $\beta_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ *определяется равенством* $\beta_0(m) = \sup\limits_{|k|\ge 2} \sum\limits_{|j|\le m-1} \frac{\beta(k)}{\beta(mk+j)}$, $m \ge 1$;

(4) $d_A(k) \le M\gamma^{|k|}$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ *для некоторых постоянных* $M = M(A) > 0$ *и* $\gamma = \gamma(A) \in (0,1)$;

(5) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k)(1+|k|)^q < \infty$ *для некоторого* $q > 1$;

(6) $d_A(k) = 0$ *при* $|k| \ge m$ *для некоторого* $m = m(A) \in \mathbb{N}$ (*т. е. ряд Фурье оператора* A *имеет конечное число отличных от нуля коэффициентов Фурье*).

Концепция рядов Фурье периодических операторов рассматривалась в [14, 17, 21, 22]. Из теорем 1, 3–5, а также следствия из теоремы 3 в [22] следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. *Пусть оператор* $A \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ *обратим и для него выполнено одно из условий* (1)–(4) *предположения* 2. *Тогда обратный оператор* $B = A^{-1} \in \operatorname{End}\mathscr{X}$ *удовлетворяет соответствующему условию:*

(1′) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k) < \infty$;

(2′) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k)\alpha(k) < \infty$;

(3′) $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k)\beta(k) < \infty$;

(4′) $d_B(k) \le N\gamma^{|k|}$ *для всех* $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ *для некоторых постоянных* $N = N(B) > 0$ *и* $\gamma_1 = \gamma_1(B) \in (0,1)$.

Если же для оператора A *выполнено одно из условий* (5), (6), *то оператор* B *удовлетворяет условию* (1′).

§ 3. Доказательства теорем 2 и 3

В дальнейшем символом X будем обозначать банахову алгебра с единицей, а символом $\mathscr{X}$ — фактор-пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$, которое является банаховым пространством с нормой $\|\tilde{x}\| = \inf\limits_{y\in x+C_0(\mathbb{J},X)} \|y\|$, где $\tilde{x} = x + C_0(\mathbb{J},X)$ — класс эквивалентности, содержащий функцию $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$.

Банахово пространство $\mathscr{X}$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом:

$$\tilde{x}\tilde{y} = \widetilde{xy}, \quad \tilde{x},\tilde{y} \in \mathscr{X}. \tag{6}$$

Ясно, что подпространства $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$ и $C_0(\mathbb{R},X)$ являются замкнутыми подмодулями из $L^1(\mathbb{R})$-модуля $C_b(\mathbb{R},X)$. Формула (6) не позволяет корректно задать структуру $L^1(\mathbb{R})$-модуля в $C_b(\mathbb{R}_+,X)$. Тем не менее такой структурой наделяются фактор-пространства $C_{b,u}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$. (Случай $\mathbb{J} = \mathbb{R}$ очевиден — $C_b(\mathbb{R},X)/C_0(\mathbb{R},X)$ является фактор-модулем.)

Пусть $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$. В фактор-пространстве $C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)/C_0(\mathbb{R}_+, X)$ корректно определяется сильно непрерывная группа изометрий

$$\widetilde{S} : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)/C_0(\mathbb{R}_+, X)),$$

действующая по правилу $\widetilde{S}(t)\tilde{x} = \widetilde{S(t)x}$, $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, X)/C_0(\mathbb{R}_+, X)$, где $S(t)x$ — сдвиг функции x влево (см. формулу (1)) для $t \geq 0$, а для $t < 0$ символ $\widetilde{S(t)x}$ обозначает класс эквивалентности, содержащий непрерывную функцию $x_t \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$ вида

$$x_t(s) = \begin{cases} x(s+t), & s+t > 0, \\ -t^{-1}x(0)s, & s+t \leq 0,\ s \geq 0. \end{cases}$$

Структура банахова $L^1(\mathbb{R})$-модуля на $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$ (в частности, $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$) наделяется формулой

$$f\tilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\widetilde{S}(-\tau)\tilde{x}\, d\tau, \quad f \in L^1(\mathbb{R}),\ \tilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X),$$

где $\mathbb{J} = \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$. Непосредственно из определения представления $\widetilde{S} : \mathbb{J} \to \mathrm{End}\, C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$ следует, что $\widetilde{S}(\omega)\tilde{x} = \tilde{x}$, $\tilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$. Таким образом, функция $t \mapsto \widetilde{S}(t)\tilde{x} : \mathbb{R} \to C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$ является непрерывной ω-периодической функцией, т. е. она принадлежит банахову пространству $C_\omega(\mathbb{R}, C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X))$. Стало быть, имеет место

Лемма 3. *Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ ω-периодическая на бесконечности тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\tilde{x} = x + C_0(\mathbb{J}, X)$ является ω-периодическим вектором относительно представления $\widetilde{S} \in \mathrm{End}\, C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$.*

Получен следующий спектральный критерий периодичности на бесконечности функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$.

Теорема 6. *Для того чтобы функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ была ω-периодической на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы имело место включение*

$$\Lambda_{\mathrm{ess}}(x) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}.$$

Доказательство. Рассмотрим фактор-пространство

$$\mathscr{X} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X),$$

которое, как отмечалось ранее, является банаховым $L^1(\mathbb{R})$-модулем. Непосредственно из определений 8 и 9 следует, что $\Lambda(\tilde{x}) = \Lambda_{\mathrm{ess}}(x)$, при этом без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{J} = \mathbb{R}$. Утверждение теоремы следует из леммы 3 и теоремы 4. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть функция $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$ и $b \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ — одна из обратных к a (относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$) функций. Тем самым $\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{b}\tilde{a} = \tilde{e}$ — единица алгебры $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$. Рассмотрим оператор $A \in \mathrm{End}\, C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$ вида $A\tilde{x} = \tilde{a}\tilde{x}$, $\tilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Этот оператор является ω-периодическим относительно представления $\widetilde{S} \in \mathrm{End}\, C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$, и коэффициенты A_n, $n \in \mathbb{Z}$, его ряда Фурье $A \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ относительно представления $\widetilde{S}$ имеют вид $A_n\tilde{x} = \tilde{a}_n\tilde{x}$, $\tilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, где $a_n \in C_{\mathrm{sl},\infty}(\mathbb{J}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, — канонические коэффициенты Фурье функции a. Отметим, что $\|\tilde{a}_n\| = \|a_n\|_\sim = d_a(n) = \inf\limits_{x_0\in C_0(\mathbb{J},X)} \|a_n + x_0\|$. Оператор A непрерывно обратим, и обратный к нему оператор $B = A^{-1} \in \operatorname{End} C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$ имеет вид $B\tilde{x} = \tilde{b}\tilde{x}$, где $\tilde{b} \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$ — класс эквивалентности, построенный по функции $b \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Для оператора A справедлива теорема 5, значит, любой представитель b класса $\tilde{b}$ удовлетворяет соответствующему условию из теоремы 2. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Необходимость. Пусть $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$. Тогда $A_N(x_1 + x_0) = x_1 + A_N x_0$, $N \geq 1$. Поскольку $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$, то $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x_0 = 0$, следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x = x_1$.

Достаточность. Пусть для некоторой функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ существует предел $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x = y$. Покажем, что x представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$. В силу равенств

$$S(\omega)y - y = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S((k+1)\omega)x - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k\omega)x \right)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N}(S(N\omega)x - x) \right) = 0$$

функция y периодическая, т. е. $y \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, откуда вытекает, что $A_N y = y$ для любого $N \geq 1$. Обозначив $x - y = x_0 \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$, получим следующую цепочку равенств:

$$\lim_{N\to\infty} A_N x_0 = \lim_{N\to\infty} A_N(x - y) = \lim_{N\to\infty} (A_N x - y) = y - y = 0. \tag{7}$$

По функции x_0 построим класс $\tilde{x}_0 \in \mathscr{X}$, который в силу леммы 3 является ω-периодическим вектором в пространстве $\mathscr{X} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$, т. е. $\tilde{x}_0 \in \mathscr{X}_\omega$. Наряду с операторами A_N, $N \geq 1$, рассмотрим последовательность операторов $(\widetilde{A}_N)$, $N \geq 1$, из $\operatorname{End}\mathscr{X}$ следующего вида: $\widetilde{A}_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} \widetilde{S}(k\omega)$. Тогда $\widetilde{A}_N\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0$ для любого $N \geq 1$. С другой стороны, из (7) следует справедливость равенства $\lim\limits_{N\to\infty} \widetilde{A}_N\tilde{x}_0 = \widetilde{0}$, откуда непосредственно получаем, что $\tilde{x}_0 = \widetilde{0}$. Значит, $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$, т. е. функция x представима в виде $x = y + x_0$, где $y \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баскаков А. Г., Калужина Н. С.* Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений // Мат. заметки. 2012. Т. 92, № 5. С. 643–661.
2. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68, № 1. С. 77–128.
3. *Баскаков А. Г., Калужина Н. С., Поляков Д. М.* Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов // Изв. вузов. Математика. 2014. № 7. С. 3–14.

4. *Баскаков А. Г.* Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 174–190.
5. *Струкова И. И.* Теорема Винера для периодических на бесконечности функций // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, № 4. С. 34–41.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
7. *Пак И. Н.* О суммах тригонометрических рядов // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 2. С. 91–144.
8. *Karamata M.* Sur un mode de croissance réguliére. Théorémes fundamentaux // Bull. Soc. Math. France. 1933. N 61. P. 55–62.
9. *Струкова И. И.* Гармонический анализ периодических векторов и периодических на бесконечности функций // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2014. Т. 14, № 1. С. 98–111.
10. *Струкова И. И.* О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, № 1. С. 28–38.
11. *Wiener N.* Tauberian theorems // Ann. Math. 1932. V. 33, N 1. P. 1–100.
12. *Струкова И. И.* Теорема Винера для периодических на бесконечности функций с рядами Фурье, суммируемыми с весом // Уфим. мат. журн. 2013. Т. 5, № 3. С. 144–152.
13. *Баскаков А. Г.* Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 2. С. 195–206.
14. *Баскаков А. Г.* Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 5. С. 942–952.
15. *Баскаков А. Г.* О спектральном синтезе в банаховых модулях над коммутативными банаховыми алгебрами // Мат. заметки. 1983. Т. 34, № 4. С. 573–585.
16. *Баскаков А. Г.* Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций // Мат. сб. 1984. Т. 124, № 1. С. 68–95.
17. *Баскаков А. Г.* Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов // Функциональный анализ. М.: МАИ, 2004. Т. 9. С. 3–151.
18. *Баскаков А. Г., Криштал И. А.* Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, № 3. С. 3–54.
19. *Baskakov A. G., Krishtal I. A.* Memory estimation of inverse operators // J. Function. Anal. 2014. V. 267. P. 2551–2605.
20. *Росс К., Хьюитт Э.* Абстрактный гармонический анализ. М.: Мир, 1975. Т. 2.
21. *Баскаков А. Г.* Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 2. С. 17–26.
22. *Баскаков А. Г.* Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов // Изв. РАН. Сер. мат. 1997. Т. 61, № 6. С. 3–26.
23. *Balan R., Krishtal I.* An almost periodic noncommutative Wiener's lemma // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 370, N 2. P. 339–349.
24. *Баскаков А. Г.* Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 14–28.
25. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.

Статья поступила 10 февраля 2015 г.

Струкова Ирина Игоревна
Воронежский гос. университет,
Университетская пл., 1, Воронеж 394036
`irina.k.post@yandex.ru`