Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 512.543

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ КОРНЕВЫМИ КЛАССАМИ ГРУПП

Е. В. Соколов, Е. А. Туманова

Аннотация. Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп. Доказано, что свободное произведение $\mathscr{K}$-группы A и $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы B с объединенной подгруппой, являющейся ретрактом в группе B, $\mathscr{K}$-аппроксимируемо. Также получено достаточное условие $\mathscr{K}$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух $\mathscr{K}$-аппроксимируемых групп, объединенная подгруппа которого является ретрактом в одном из сомножителей.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.113

Ключевые слова: корневой класс, аппроксимируемость конечными π-группами, аппроксимируемость корневыми классами, обобщенное свободное произведение.

1. Введение

Пусть $\mathscr{K}$ — некоторый класс групп. Группа G называется *аппроксимируемой классом* $\mathscr{K}$ ($\mathscr{K}$*-аппроксимируемой*), если для любого неединичного элемента g группы G существует гомоморфизм σ группы G на некоторую группу из класса $\mathscr{K}$ такой, что образ элемента g относительно гомоморфизма σ отличен от 1. Если в качестве $\mathscr{K}$ взять класс всех конечных групп, то понятие $\mathscr{K}$-аппроксимируемости совпадает с наиболее изученным понятием финитной аппроксимируемости. Мы же рассмотрим свойство аппроксимируемости корневыми классами групп.

Согласно Грюнбергу [1] содержащий хотя бы одну неединичную группу класс групп $\mathscr{K}$ называется *корневым*, если выполняются следующие три условия.

1. Если группа X принадлежит классу $\mathscr{K}$ и Y — подгруппа группы X, то группа Y также принадлежит классу $\mathscr{K}$.

2. Прямое произведение любых двух групп из класса $\mathscr{K}$ принадлежит классу $\mathscr{K}$.

3. Если $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ — субнормальный ряд группы X такой, что фактор-группы X/Y и Y/Z принадлежат классу $\mathscr{K}$, то в группе X существует нормальная подгруппа T такая, что $T \subseteq Z$ и фактор-группа X/T принадлежит классу $\mathscr{K}$.

Заметим, что в данном Грюнбергом определении корневого класса групп второе условие вытекает из первого и третьего. Кроме того, данное определение не позволяет легко разграничить корневые и некорневые классы групп. Более простая характеризация корневых классов была дана в работе [2], где показано, что корневыми являются те и только те наследственные классы групп, которые замкнуты относительно декартовых сплетений. Что же касается корневых классов, состоящих только из конечных групп, то для них известна еще более понятная и легко проверяемая характеризация: класс конечных групп корневой тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений [3].

Отметим, что корневыми являются многие активно изучаемые классы групп: класс всех периодических групп, конечных групп, конечных p-групп, конечных π-групп, разрешимых групп, разрешимых групп без кручения. Имеет смысл упомянуть и тот факт, что пересечение любых двух корневых классов групп снова корневой класс [2].

В той же работе [1] Грюнбергом установлено, что свободное произведение произвольного семейства групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{K}$, само является $\mathcal{K}$-аппроксимируемой группой тогда и только тогда, когда каждая свободная группа $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Позже Д. Н. Азаров и Тьеджо [4] доказали, что любая свободная группа аппроксимируется любым корневым классом, что полностью положительно разрешило вопрос о $\mathcal{K}$-аппроксимируемости свободного произведения $\mathcal{K}$-аппроксимируемых групп.

Аппроксимируемость корневыми классами групп обобщенных свободных произведений и HNN-расширений исследовалась в [2, 4–14]. Другие свойства корневых классов групп изучались в [2, 3, 15, 16]. Во многих случаях удается показать, что некоторое свойство конкретного корневого класса групп справедливо не только для данного корневого класса, но и в более общей ситуации, а иногда верно для всех корневых классов групп. Так, например, при изучении аппроксимируемости и отделимости корневыми классами групп утверждения, справедливые для уже привычных нам классов всех конечных групп, конечных p-групп, конечных π-групп, часто удается обобщить, накладывая на корневой класс лишь требование замкнутости относительно факторизации (сравни [17] и [11], [18] и [12]).

В данной работе рассматривается вопрос об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенного свободного произведения

$$G = (A * B; H = K, \varphi)$$

двух групп A и B с подгруппами $H \leqslant A$ и $K \leqslant B$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi : H \to K$, при условии, что объединенная подгруппа является ретрактом в одном из сомножителей.

Напомним, что подгруппа Y группы X называется *ретрактом* этой группы, если существует гомоморфизм $\sigma : X \to Y$, действующий на подгруппе Y тождественно. Легко видеть, что подгруппа Y является ретрактом группы X тогда и только тогда, когда X представляет собой расщепляемое расширение некоторой группы Z (изоморфной ядру указанного выше гомоморфизма σ) при помощи Y.

Первым из результатов, полученных в данной работе, является

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, K — ретракт группы B. Пусть также группа A принадлежит классу $\mathcal{K}$, а группа B $\mathcal{K}$-аппроксимируема. Тогда группа A является ретрактом G и, в частности, группа G $\mathcal{K}$-аппроксимируема.*

При помощи этого утверждения получено достаточное условие аппроксимируемости группы G произвольным корневым классом групп $\mathcal{K}$ (теорема 2), в котором группа A уже не обязательно принадлежит классу $\mathscr{K}$. Напомним определения используемых в формулировке этого условия понятий.

Подмножество M группы X называется *$\mathscr{K}$-отделимым в X* [19], если для любого элемента $x \in X$, не принадлежащего M, существует гомоморфизм σ группы X на некоторую группу из класса $\mathscr{K}$ такой, что $x\sigma \notin M\sigma$.

Следуя [20], будем говорить, что группа X *$\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе Y*, если для любой нормальной в Y подгруппы $M \leqslant Y$ такой, что $Y/M \in \mathscr{K}$, найдется нормальная подгруппа N группы X, удовлетворяющая условиям $X/N \in \mathscr{K}$ и $N \cap Y \leqslant M$.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп, K — ретракт группы B. Пусть группы A и B $\mathscr{K}$-аппроксимируемы, подгруппа H группы A $\mathscr{K}$-отделима, группа A $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе H. Тогда группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

Доказательства теорем 1 и 2 приводятся в разд. 3. В разд. 6 будет показано, что условия $\mathscr{K}$-отделимости подгруппы H в группе A и $\mathscr{K}$-квазирегулярности группы A по подгруппе H, содержащиеся в формулировках теоремы 2 и приводимого далее следствия 2, в общем случае не являются необходимыми для $\mathscr{K}$-аппроксимируемости группы G.

Сформулируем следствия теоремы 2. Говорят (см., например, [21]), что группа имеет *конечный ранг Гирша — Зайцева*, равный r, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой, и число бесконечных циклических факторов данного ряда равно r.

Следствие 1. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп, группы A и B аппроксимируются $\mathscr{K}$-группами без кручения, подгруппы H и K имеют конечный ранг Гирша — Зайцева, K — ретракт группы B. Тогда группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Следуя [22], нильпотентную группу будем называть *π-ограниченной*, если она обладает центральным рядом, каждый фактор X которого удовлетворяет следующему условию: в произвольной фактор-группе Y группы X все примарные компоненты, соответствующие числам из множества π, конечны.

Очевидно, что конечно порожденная нильпотентная группа оказывается π-ограниченной для любого множества π. Отметим также (см. [22, предложение 5]), что если π совпадает с множеством всех простых чисел, то π-ограниченная нильпотентная группа — это в точности нильпотентная группа, ограниченная и разрешимая в смысле А. И. Мальцева [19].

Если $\mathscr{L}$ — некоторый класс групп, то через $\pi(\mathscr{L})$ будем обозначать множество всех простых делителей конечных порядков элементов всевозможных $\mathscr{L}$-групп. Если ни одна из $\mathscr{L}$-групп не имеет кручения, то это множество естественным образом оказывается пустым.

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп, A — $\mathscr{K}$-аппроксимируемая $\pi(\mathscr{K})$-ограниченная нильпотентная группа, B — $\mathscr{K}$-аппроксимируемая группа, подгруппа H $\mathscr{K}$-отделима в группе A, подгруппа K — ретракт группы B. Если выполняется хотя бы одно из следующих четырех условий:*

1) *класс $\mathscr{K}$ состоит только из конечных групп,*

2) *класс $\mathscr{K}$ состоит только из периодических групп и множество $\pi(\mathscr{K})$ конечно,*

3) *класс $\mathscr{K}$ состоит только из периодических групп и подгруппа H конечно порождена,*

4) *группа A конечно порождена,*
то группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема.

Следующие два утверждения известны, однако теорема 2 позволяет дать более короткие и простые их доказательства.

Следствие 3 [13, теорема 2]. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп, H — нормальная подгруппа группы A, K — ретракт группы B. Если группа B $\mathscr{K}$-аппроксимируема и $A/H \in \mathscr{K}$, то группа G также $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

Следствие 4 [6, теорема 1]. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп, A и B — $\mathscr{K}$-аппроксимируемые группы, подгруппа H — ретракт группы A, подгруппа K — ретракт группы B. Тогда группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема.*

Таким образом, теорема 2 обобщает ряд полученных в работах [6] и [13] результатов, а также доказанное Болером и Эвансом утверждение о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух финитно аппроксимируемых групп с объединенными ретрактами [23] и полученное П. А. Бобровским и Е. В. Соколовым [24] аналогичное утверждение для аппроксимируемости конечными p-группами.

Доказательства всех следствий будут приведены в разд. 4 данной статьи. Разд. 5 содержит пример применения полученных результатов к исследованию вопроса об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений классом конечных π-групп.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть X — группа, $\mathscr{L}$ — некоторый класс групп. Обозначим через $\mathscr{L}^*(X)$ семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathscr{L}$.

Предложение 1. *Пусть $\mathscr{L}$ — замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей класс групп, X — произвольная группа. Тогда пересечение конечного числа подгрупп семейства $\mathscr{L}^*(X)$ снова является подгруппой данного семейства.*

Доказательство. Справедливость данного утверждения следует из теоремы Ремака. В самом деле, если $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \in \mathscr{L}^*(X)$, то фактор-группа $X/(Y_1 \cap Y_2 \cap \cdots \cap Y_n)$ вкладывается в прямое произведение фактор-групп $X/Y_1, X/Y_2, \ldots, X/Y_n$ и в силу условий, наложенных на класс $\mathscr{L}$, принадлежит данному классу. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть класс групп $\mathscr{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, и пусть X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y. Пусть также M — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{L}^*(X)$, $U = M \cap Z$, $V = M \cap Y$, W — подгруппа из $\mathscr{L}^*(Y)$ такая, что $W \subseteq V$, и пусть $L = WU$. Тогда $L \in \mathscr{L}^*(X)$ и X/L — расщепляемое расширение ZL/L при помощи YL/L.*

Доказательство. Покажем, что подгруппа L нормальна в группе X. Действительно,

$$L^X = (WU)^X = W^X U = W^{YZ} U = W^Z U.$$

Подгруппа Z нормальна в группе X, стало быть, $[W, Z] \subseteq Z$. Так как M — нормальная подгруппа группы X и $W \leqslant M$, имеем $[W, Z] \subseteq M$. Поэтому $[W, Z] \subseteq U$ и, следовательно, $W^Z \subseteq WU$. Тогда $L^X \subseteq WU = L$. Значит, L — нормальная подгруппа группы X.

Покажем, что фактор-группа X/L принадлежит классу $\mathscr{L}$. Поскольку L нормальна в группе X, то L нормальна и в M. Рассмотрим фактор-группу M/L:

$$\begin{aligned} M/L = M/LU = M/L(M \cap Z) \cong MZ/LZ = MZ/WUZ \\ = MZ/WZ \leqslant X/WZ = YZ/WZ \cong Y/W(Y \cap Z). \end{aligned}$$

Так как X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y, то $Y \cap Z = 1$. Стало быть, $Y/W(Y \cap Z) = Y/W$. Воспользовавшись замкнутостью класса $\mathscr{L}$ относительно взятия подгрупп и тем, что $W \in \mathscr{L}^*(Y)$, получаем, что $M/L \in \mathscr{L}$. Заметим, что $(X/L)/(M/L) \cong X/M$. При этом $M/L \in \mathscr{L}$, $X/M \in \mathscr{L}$ и класс $\mathscr{L}$ замкнут относительно взятия расширений. Значит, $X/L \in \mathscr{L}$.

Покажем, что X/L — расщепляемое расширение ZL/L при помощи YL/L. Очевидно, что подгруппа ZL/L нормальна в группе X/L. Поскольку $X = YZ$, то $X/L \subseteq YL/L \cdot ZL/L$. Обратное включение очевидно. Тем самым $X/L = YL/L \cdot ZL/L$.

Так как $L = WU$, то $YL = YU$ и $ZL = WZ$. Отсюда и из условия $Y \cap Z = 1$ легко следует, что $YL \cap ZL \subseteq WU = L$. Поэтому $YL/L \cap ZL/L = 1$. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть класс групп $\mathscr{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп и расширений, и пусть X — расщепляемое расширение группы Z при помощи группы Y. Если группа X $\mathscr{L}$-аппроксимируема, то подгруппа Y $\mathscr{L}$-отделима в группе X.*

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент группы X, не принадлежащий подгруппе Y. Тогда он представим в виде $x = yz$, где $z \in Z \setminus \{1\}$ и $y \in Y$. В силу $\mathscr{L}$-аппроксимируемости группы X существует подгруппа $M \in \mathscr{L}^*(X)$ такая, что $z \notin M$. Положим $U = M \cap Z$, $V = M \cap Y$ и $L = VU$. Тогда по предложению 2 $L \in \mathscr{L}^*(X)$.

Предположим, что $x \in YL$. Заметим, что $YL = YVU = YU$. Поэтому существуют элементы $y' \in Y$ и $u \in U$ такие, что $x = y'u$. Следовательно, $yz = y'u$. Отсюда и из того, что $Y \cap Z = 1$, получаем, что $z = u \in U$. Тогда $z \in M$, что противоречит выбору подгруппы M. Следовательно, $x \notin YL$.

Таким образом, если $x \notin Y$, то найдется подгруппа $L \in \mathscr{L}^*(X)$ такая, что $x \notin YL$. Следовательно, подгруппа Y $\mathscr{L}$-отделима в группе X. Предложение доказано.

Предложение 4. *Пусть класс групп $\mathscr{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, и пусть X — некоторая группа, Y — $\mathscr{L}$-отделимая подгруппа группы X.*

1. *Если группа X $\mathscr{L}$-квазирегулярна по подгруппе Y, то все подгруппы семейства $\mathscr{L}^*(Y)$ $\mathscr{L}$-отделимы в группе X.*

2. *Если все подгруппы семейства $\mathscr{L}^*(Y)$ $\mathscr{L}$-отделимы в группе X и имеют в подгруппе Y конечные индексы, то группа X $\mathscr{L}$-квазирегулярна по подгруппе Y.*

Доказательство. Сначала проверим утверждение 1. Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{L}^*(Y)$, x — произвольный элемент группы X, не принадлежащий M. Если $x \notin Y$, то в силу $\mathscr{L}$-отделимости подгруппы Y в группе X в семействе $\mathscr{L}^*(X)$ найдется подгруппа N такая, что $x \notin YN$ и, следовательно, $x \notin MN$.

Пусть теперь $x \in Y$. Так как группа X $\mathscr{L}$-квазирегулярна по подгруппе Y, существует подгруппа $N \in \mathscr{L}^*(X)$, удовлетворяющая условию $N \cap Y \leqslant M$. Отсюда и из того, что $M \subseteq Y$, получаем, что $MN \cap Y \subseteq M$. Обратное включение очевидно. Значит, $MN \cap Y = M$.

Следовательно, $x \notin MN$. Поэтому подгруппа M, а значит, и все подгруппы семейства $\mathscr{L}^*(Y)$ $\mathscr{L}$-отделимы в группе X.

Докажем утверждение 2. Пусть снова M — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{L}^*(Y)$, и пусть $1 = y_1, \ldots, y_n$ — некоторая полная система представителей смежных классов группы Y по подгруппе M. Так как M по условию имеет конечный индекс в подгруппе Y, множество $\{y_1, \ldots, y_n\}$ конечно. Поэтому, пользуясь $\mathscr{L}$-отделимостью подгруппы M в группе X и предложением 1, можем найти подгруппу $N \in \mathscr{L}^*(X)$ такую, что $y_2, \ldots, y_n$ не содержатся в MN.

Предположим, что $N \cap Y \nsubseteq M$. Тогда в подгруппе $N \cap Y$ найдется элемент g, не принадлежащий M. Следовательно, его можно записать в виде $g = xy_i$ для подходящих $x \in M$ и $i \in \{2, \ldots, n\}$. Тогда $y_i = x^{-1}g \in MN$, что противоречит выбору подгруппы N. Стало быть, $N \cap Y \leqslant M$. Это означает $\mathscr{L}$-квазирегулярность группы X по подгруппе Y. Предложение доказано.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Как обычно, через π' будем обозначать множество всех простых чисел, не принадлежащих π.

Говорят, что подгруппа Y некоторой группы X *π'-изолирована* в X, если для произвольного элемента x группы X и произвольного π'-числа q из того, что x^q — элемент подгруппы Y, следует, что x также является элементом подгруппы Y. Следующее предложение дает весьма общее необходимое условие $\mathscr{L}$-отделимости подгрупп.

Предложение 5. *Пусть $\mathscr{L}$ — произвольный класс групп, состоящий только из периодических групп, X — некоторая группа, Y — ее подгруппа. Если подгруппа Y $\mathscr{L}$-отделима в группе X, то она $\pi(\mathscr{L})'$-изолирована в X.*

Доказательство. Пусть q — $\pi(\mathscr{L})'$-число и x — элемент группы X такой, что $x^q \in Y$. Пусть также N — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{L}^*(X)$. Тогда X/N — периодическая $\pi(\mathscr{L})$-группа. Обозначим через s порядок ее элемента xN. Отсюда $x^s \in N$, а потому $x^s \in YN$. С другой стороны, $x^q \in Y$, поэтому $x^q \in YN$. Таким образом, $x^s \in YN$ и $x^q \in YN$, причем q и s взаимно просты. Следовательно, $x \in YN$. Так как подгруппа $N \in \mathscr{L}^*(X)$ была выбрана произвольным образом, то

$$x \in \bigcap_{N \in \mathscr{L}^*(X)} YN.$$

Отсюда и из $\mathscr{L}$-отделимости подгруппы Y в группе X вытекает, что $x \in Y$. Предложение доказано.

Если класс $\mathscr{L}$ корневой, а группа X $\pi(\mathscr{L})$-ограниченная нильпотентная, то необходимое условие $\mathscr{L}$-отделимости подгруппы, доставляемое предложением 5, оказывается и достаточным, как показывает приводимое далее предложение 8. Его доказательство опирается на следующие два известных утверждения.

Предложение 6 [22, теорема 3]. *Пусть π — непустое множество простых чисел. Произвольная π'-изолированная подгруппа π-ограниченной нильпотентной группы отделима в этой группе классом $\mathscr{F}_\pi$ всех конечных π-групп.*

Предложение 7 [15, предложение 2]. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп. Если множество $\pi(\mathcal{K})$ непусто, то класс всех конечных разрешимых $\pi(\mathcal{K})$-групп содержится в $\mathcal{K}$.*

Предложение 8. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, состоящий только из периодических групп. Тогда произвольная $\pi(\mathcal{K})'$-изолированная подгруппа $\pi(\mathcal{K})$-ограниченной нильпотентной группы $\mathcal{K}$-отделима.*

Доказательство. Пусть X — произвольная $\pi(\mathcal{K})$-ограниченная нильпотентная группа и Y — некоторая ее $\pi(\mathcal{K})'$-изолированная подгруппа. Класс $\mathcal{K}$ корневой, а потому содержит хотя бы одну неединичную группу, стало быть, множество $\pi(\mathcal{K})$ непусто. Отсюда и из предложения 6 следует, что подгруппа Y отделима в группе X конечными $\pi(\mathcal{K})$-группами. Так как гомоморфный образ нильпотентной группы снова является нильпотентной группой, подгруппа Y оказывается отделимой в X конечными нильпотентными $\pi(\mathcal{K})$-группами, а значит, и конечными разрешимыми $\pi(\mathcal{K})$-группами. В силу предложения 7 класс конечных разрешимых $\pi(\mathcal{K})$-групп содержится в $\mathcal{K}$. Следовательно, подгруппа Y $\mathcal{K}$-отделима в группе X. Предложение доказано.

Предложение 9. *Пусть $\mathcal{K}$ — корневой класс групп, X — $\mathcal{K}$-аппроксимируемая $\pi(\mathcal{K})$-ограниченная нильпотентная группа, Y — $\mathcal{K}$-отделимая подгруппа группы X. Если выполняется хотя бы одно из следующих трех условий:*

1) *класс $\mathcal{K}$ состоит только из конечных групп,*
2) *класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и множество $\pi(\mathcal{K})$ конечно,*
3) *класс $\mathcal{K}$ состоит только из периодических групп и подгруппа Y конечно порождена,*

то группа X $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе Y.

Доказательство. Пусть V — произвольная подгруппа семейства $\mathcal{K}^*(Y)$. Так как подгруппа Y $\mathcal{K}$-отделима в группе X, ввиду предложения 5 Y $\pi(\mathcal{K})'$-изолирована в X. Отсюда и из того, что $V \in \mathcal{K}^*(Y)$, вытекает $\pi(\mathcal{K})'$-изолированность подгруппы V в группе X. Тогда согласно предложению 8 подгруппа V $\mathcal{K}$-отделима в этой группе. Покажем, что V имеет конечный индекс в группе Y. В силу произвольности выбора V и предложения 4 отсюда будет следовать, что группа X $\mathcal{K}$-квазирегулярна по подгруппе Y.

Класс $\pi(\mathcal{K})$-ограниченных нильпотентных групп замкнут относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов [22, предложение 2]. Поэтому фактор-группа Y/V является $\pi(\mathcal{K})$-ограниченной нильпотентной $\mathcal{K}$-группой. Если справедливо условие 1 или 3, то отсюда сразу же следует, что группа Y/V конечна.

Пусть выполняется условие 2. Заметим, что в силу упомянутых выше свойств класса $\pi(\mathcal{K})$-ограниченных нильпотентных групп любой фактор Z произвольного центрального ряда группы Y/V оказывается периодической $\pi(\mathcal{K})$-ограниченной абелевой $\pi(\mathcal{K})$-группой. Это означает, что все примарные компоненты группы Z соответствуют числам из множества $\pi(\mathcal{K})$ и потому их количество конечно. При этом каждая такая компонента согласно определению свойства $\pi(\mathcal{K})$-ограниченности также конечна. Следовательно, конечными оказываются как группа Z, так и вся фактор-группа Y/V. Предложение доказано.

Предложение 10 [20, предложение 1.2.5]. *Пусть класс $\mathcal{L}$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — $\mathcal{L}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X. Если суще-*

ствует подгруппа $Z \in \mathscr{L}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$, то подгруппа Y $\mathscr{L}$-отделима в группе X.

Предложение 11. *Пусть $\mathscr{L}$ — класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей, X — $\mathscr{L}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X, имеющая конечный ранг Гирша — Зайцева. Тогда существует подгруппа $Z \in \mathscr{L}^*(X)$ такая, что $Z \cap Y = 1$. В частности, Y является $\mathscr{L}$-группой.*

Доказательство. Пусть $1 = Y_0 \leqslant Y_1 \leqslant \dots \leqslant Y_n = Y$ — субнормальный ряд группы Y, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой. Доказательство будем вести индукцией по длине этого ряда.

Если $n = 0$, то утверждение предложения очевидным образом следует из $\mathscr{L}$-аппроксимируемости группы X. Поэтому далее будем считать, что $n \geqslant 1$ и для всех подгрупп, обладающих рядом указанного выше вида длины, меньшей n, искомое утверждение имеет место.

Так как группа X, а значит, и ее подгруппа Y_1, аппроксимируется группами без кручения, она сама не имеет кручения. Тем самым Y_1 — бесконечная циклическая группа, порожденная некоторым элементом y. Также из $\mathscr{L}$-аппроксимируемости группы X следует, что существует нормальная подгруппа M этой группы такая, что $X/M \in \mathscr{L}$ и $y \notin M$. Из отсутствия кручения в фактор-группе X/M вытекает, что элемент y имеет бесконечный порядок по модулю подгруппы M, поэтому $M \cap Y_1 = 1$.

Поскольку

$$M \cap Y_{i+1}/M \cap Y_i \cong (M \cap Y_{i+1})Y_i/Y_i \leqslant Y_{i+1}/Y_i,$$

группа $M \cap Y$ также обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой, причем длина этого ряда строго меньше n. Стало быть, в силу индуктивного предположения существует подгруппа $L \in \mathscr{L}^*(X)$ такая, что $L \cap (M \cap Y) = 1$.

Обозначим $L \cap M$ через Z. Тогда $Z \cap Y = 1$ и ввиду предложения 1 подгруппа Z содержится в семействе $\mathscr{L}^*(X)$. Следовательно, Z — искомая подгруппа. Предложение доказано.

В заключение данного раздела приведем ряд доказанных в [4] утверждений, которые потребуются в дальнейшем.

Предложение 12. *Пусть $\mathscr{K}$ — корневой класс групп. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *Произвольное расширение $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы при помощи $\mathscr{K}$-группы аппроксимируется классом $\mathscr{K}$* [4, лемма].

2. *Обобщенное свободное произведение P двух $\mathscr{K}$-аппроксимируемых групп, в свою очередь, аппроксимируется классом $\mathscr{K}$, если существует гомоморфизм группы P на группу из класса $\mathscr{K}$, инъективный на объединенной подгруппе* [4, теорема 3].

3. *Пусть P — обобщенное свободное произведение двух изоморфных $\mathscr{K}$-аппроксимируемых групп, и пусть изоморфизм, склеивающий объединенные подгруппы, совпадает с ограничением на них изоморфизма свободных множителей. Группа P аппроксимируется классом $\mathscr{K}$ тогда и только тогда, когда объединенные подгруппы $\mathscr{K}$-отделимы в сомножителях* [4, теорема 4].

3. Доказательства теорем

Прежде всего, напомним ряд понятий и конструкций, впервые появившихся в работе [25].

Пусть A и B — некоторые группы, $H \leqslant A$, $K \leqslant B$, $\varphi : H \to K$ — изоморфизм подгрупп. Нормальные подгруппы R и S групп A и B соответственно называются (H, K, φ)-*совместимыми*, если $(H \cap R)\varphi = K \cap S$.

В этом случае отображение $\varphi_{R,S} : HR/R \to KS/S$, переводящее элемент hR, $h \in H$, в элемент $(h\varphi)S$, определено корректно и является изоморфизмом подгруппы HR/R фактор-группы A/R на подгруппу KS/S фактор-группы B/S. Это позволяет построить свободное произведение

$$G_{R,S} = (A/R * B/S; HR/R = KS/S, \varphi_{R,S})$$

групп A/R и B/S с подгруппами HR/R и KS/S, объединенными относительно изоморфизма $\varphi_{R,S}$, и сюръективный гомоморфизм $\rho_{R,S} : G \to G_{R,S}$, действие которого на подгруппах A и B совпадает с действием естественных гомоморфизмов $\varepsilon : A \to A/R$ и $\delta : B \to B/S$.

Доказательство теоремы 1. Предположим теперь, что A, B, H, K, φ и класс $\mathscr{K}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

Так как подгруппа K является ретрактом группы B, существует нормальная подгруппа N группы B такая, что B — расщепляемое расширение группы N при помощи группы K. Поскольку $N \cap K = 1$, подгруппы 1 и N (H, K, φ)-совместимы. Поэтому можно рассмотреть группу

$$G_{1,N} = (A * B/N; H = KN/N, \varphi_{1,N}).$$

В силу выбора подгруппы N справедливо равенство $B/N = KN/N$. Следовательно, $G_{1,N} = A$. Так как гомоморфизм $\rho_{1,N} : G \to G_{1,N}$ продолжает тождественное отображение группы A, последняя является ретрактом группы G. При этом $A \in \mathscr{K}$ и, значит, $G_{1,N}$ оказывается $\mathscr{K}$-группой. Таким образом, группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема в силу утверждения 2 предложения 12. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Далее до конца раздела будем считать, что A, B, H, K, φ и $\mathscr{K}$ удовлетворяют условиям теоремы 2.

Пусть M и N — произвольные подгруппы семейств $\mathscr{K}^*(A)$ и $\mathscr{K}^*(B)$ соответственно. Построим пару (H, K, φ)-совместимых подгрупп $R \in \mathscr{K}^*(A)$ и $S \in \mathscr{K}^*(B)$ таких, что $R \leqslant M$, $S \leqslant N$ и группа $G_{R,S}$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема.

Так как $M \in \mathscr{K}^*(A)$, то $M \cap H \in \mathscr{K}^*(H)$. Аналогично $N \in \mathscr{K}^*(B)$, значит, $N \cap K \in \mathscr{K}^*(K)$. Тогда прообраз подгруппы $N \cap K$ относительно изоморфизма φ содержится в $\mathscr{K}^*(H)$. Следовательно,

$$T = (M \cap H) \cap (N \cap K)\varphi^{-1} \in \mathscr{K}^*(H)$$

в силу предложения 1. Поскольку группа A $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе H, существует подгруппа $P \in \mathscr{K}^*(A)$ такая, что $P \cap H \leqslant T$.

Так как K — ретракт группы B, найдется такая нормальная подгруппа Z группы B, что B является расщепляемым расширением группы Z при помощи группы K. Обозначим через S подгруппу $(P \cap H)\varphi(N \cap Z)$. Тогда согласно предложению 2 $S \in \mathscr{K}^*(B)$ и B/S — расщепляемое расширение ZS/S при помощи KS/S.

Пусть $R = P \cap M$. Тогда снова в силу предложения 1 $R \in \mathscr{K}^*(A)$. Покажем, что подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы.

Из построения группы P вытекает справедливость включения

$$P \cap H \subseteq M \cap H.$$

Тогда

$$(H \cap R)\varphi = (H \cap P \cap M)\varphi = ((P \cap H) \cap (M \cap H))\varphi = (P \cap H)\varphi.$$

Так как $K \cap Z = 1$ и $(P \cap H)\varphi \leqslant K$, то

$$K \cap S = K \cap (P \cap H)\varphi(N \cap Z) = (P \cap H)\varphi.$$

Таким образом, подгруппы R и S (H, K, φ)-совместимы.

Поскольку A/R и B/S — $\mathscr{K}$-группы и KS/S — ретракт группы B/S, группа $G_{R,S}$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 1. Следовательно, подгруппы R и S искомые.

Перейдем непосредственно к доказательству $\mathscr{K}$-аппроксимируемости группы G. Пусть g — произвольный неединичный элемент группы G. Возможны два случая: $g \in H$ и $g \notin H$.

Рассмотрим первый случай: $g \in H$. Тогда g — неединичный элемент $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы A. Значит, найдется подгруппа $M \in \mathscr{K}^*(A)$ такая, что $g \notin M$. В силу доказанного выше существуют (H, K, φ)-совместимые подгруппы $R \in \mathscr{K}^*(A)$ и $S \in \mathscr{K}^*(B)$ такие, что $R \leqslant M$, $S \leqslant B$ и группа $G_{R,S}$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема. Под действием гомоморфизма $\rho_{R,S}$ элемент g переходит в отличный от 1 элемент gR фактор-группы A/R. Стало быть, существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на $\mathscr{K}$-группу такой, что $(gR)\sigma \neq 1$.

Рассмотрим второй случай: $g \notin H$. Пусть $g = g_1 g_2 \ldots g_l$ — несократимая запись элемента g длины $l \geqslant 1$. Так как $g \notin H$, то $g_k \notin H$ для любого $k \in \{1, \ldots, l\}$, причем если $l > 1$, то соседние слоги лежат в разных свободных множителях.

Пусть $g_k \in A$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, l\}$. Тогда из $\mathscr{K}$-отделимости подгруппы H в группе A и того, что $g_k \notin H$, следует существование подгруппы $E_k \in \mathscr{K}^*(A)$ такой, что $g_k \notin HE_k$.

Так как K — ретракт $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы B, в силу предложения 3 подгруппа K $\mathscr{K}$-отделима в B. Поэтому если $g_k \in B$ для некоторого $k \in \{1, \ldots, l\}$, то аналогично находим подгруппу $F_k \in \mathscr{K}^*(B)$ такую, что $g_k \notin KF_k$.

Пусть

$$\Omega_A = \{k \mid 1 \leqslant k \leqslant l \wedge g_k \in A\}, \quad \Omega_B = \{k \mid 1 \leqslant k \leqslant l \wedge g_k \in B\}.$$

Обозначим

$$M = \bigcap_{k \in \Omega_A} E_k, \quad N = \bigcap_{k \in \Omega_B} F_k.$$

Ввиду предложения 1 $M \in \mathscr{K}^*(A)$, $N \in \mathscr{K}^*(B)$ и $g_k \notin HM$, если $g_k \in A$; $g_k \notin KN$, если $g_k \in B$.

Как и выше, построим пару (H, K, φ)-совместимых подгрупп $R \in \mathscr{K}^*(A)$ и $S \in \mathscr{K}^*(B)$ такую, что $R \leqslant M$, $S \leqslant N$ и группа $G_{R,S}$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема.

Подействуем гомоморфизмом $\rho_{R,S}$ на элемент g. Тогда

$$g\rho_{R,S} = (g_1 g_2 \ldots g_l)\rho_{R,S} = g_1\rho_{R,S} g_2\rho_{R,S} \ldots g_l\rho_{R,S} \neq 1.$$

Действительно, если $g_k \in A$, то $g_k \notin HR$, значит, $g_kR \notin HR/R$. Если $g_k \in B$, то $g_k \notin KS$, тем самым $g_kS \notin KS/S$. Таким образом, если $l = 1$, то $g\rho_{R,S}$ не входит в объединенную подгруппу, стало быть, отличен от 1. Если $l > 1$, то запись элемента $g\rho_{R,S}$ несократима и имеет длину, большую 1, значит, $g\rho_{R,S} \neq 1$.

Построенная группа $G_{R,S}$ $\mathscr{K}$-аппроксимируема. Поэтому существует гомоморфизм σ группы $G_{R,S}$ на $\mathscr{K}$-группу такой, что $(g\rho_{R,S})\sigma \neq 1$. Следовательно, группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема. Теорема доказана.

4. Доказательства следствий

Доказательство следствия 1. Легко видеть, что класс всех $\mathscr{K}$-групп без кручения замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому в силу предложения 11 существует нормальная подгруппа Z группы A такая, что фактор-группа A/Z является $\mathscr{K}$-группой без кручения и $Z \cap H = 1$. Тогда группа A, очевидно, $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе H и ввиду предложения 10 подгруппа H $\mathscr{K}$-отделима в группе A. Следовательно, группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 2.

Доказательство следствия 2. Если выполняется хотя бы одно из условий 1–3, то согласно предложению 9 группа A $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе H и группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 2.

Пусть выполняется условие 4. Если при этом класс $\mathscr{K}$ состоит только из периодических групп, то справедливо также условие 3 и $\mathscr{K}$-аппроксимируемость группы G доказана. Поэтому далее будем считать, что класс $\mathscr{K}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу. Тогда бесконечная циклическая группа также принадлежит классу $\mathscr{K}$ ввиду замкнутости последнего относительно взятия подгрупп. Хорошо известно (см., например, [26, с. 13]), что в конечно порожденной нильпотентной группе без кручения все члены верхнего центрального ряда изолированы. Отсюда с помощью очевидной индукции легко следует, что каждая такая группа обладает конечным субнормальным рядом с бесконечными циклическими факторами. Так как класс $\mathscr{K}$ замкнут относительно расширений, это означает, что все конечно порожденные нильпотентные группы без кручения содержатся в $\mathscr{K}$.

Поскольку группа A конечно порожденная нильпотентная, ее периодическая часть $\tau(A)$ конечна. Ввиду $\mathscr{K}$-аппроксимируемости группы A и предложения 1 отсюда вытекает существование такой подгруппы $N \in \mathscr{K}^*(A)$, что $N \cap \tau(A) = 1$. Тогда N является конечно порожденной нильпотентной группой без кручения и в силу доказанного выше принадлежит классу $\mathscr{K}$. Следовательно, группа A представляет собой расширение $\mathscr{K}$-группы N при помощи $\mathscr{K}$-группы A/N и потому, в свою очередь, содержится в классе $\mathscr{K}$. Теперь $\mathscr{K}$-аппроксимируемость группы G вытекает из теоремы 1.

Доказательство следствия 3. Из условия $A/H \in \mathscr{K}$ следует, что подгруппа H $\mathscr{K}$-отделима в группе A. $\mathscr{K}$-квазирегулярность группы A по подгруппе H вытекает из того, что класс $\mathscr{K}$ корневой.

В самом деле, если M — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{K}^*(H)$, то A/H, $H/M \in \mathscr{K}$ и согласно условию 3 из определения корневого класса существует подгруппа $N \in \mathscr{K}^*(A)$ такая, что $N \leqslant M$. Тогда $N \cap H = N \leqslant M$.

Из $\mathscr{K}$-аппроксимируемости группы B следует $\mathscr{K}$-аппроксимируемость ее подгруппы K, а значит, и изоморфной ей группы H. Тогда группа A представляет собой расширение $\mathscr{K}$-аппроксимируемой группы H при помощи $\mathscr{K}$-группы A/H. Стало быть, группа A $\mathscr{K}$-аппроксимируема согласно утверждению 1 предложения 12.

Тем самым группа G $\mathscr{K}$-аппроксимируема в силу теоремы 2. Следствие доказано.

Доказательство следствия 4. По предложению 3 подгруппа H $\mathscr{K}$-отделима в группе A. Покажем, что группа A $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе H.

Так как H — ретракт группы A, найдется такая нормальная подгруппа Z группы A, что A — расщепляемое расширение Z при помощи H, т. е. $A = HZ$ и $Z \cap H = 1$. Пусть N — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{K}^*(H)$. Ввиду предложения 2 подгруппа NZ принадлежит семейству $\mathscr{K}^*(A)$. Из соотношения $Z \cap H = 1$ вытекает, что $NZ \cap H \leqslant N$. Следовательно, группа A $\mathscr{K}$-квазирегулярна по подгруппе H.

Значит, обобщенное свободное произведение G $\mathscr{K}$-аппроксимируемо в силу теоремы 2. Следствие доказано.

5. Приложение к обобщенным свободным произведениям групп порядка pq

Баумслаг [25] установил, что любое обобщенное свободное произведение двух конечных групп финитно аппроксимируемо. Для конечных p-групп аналогичное утверждение неверно, критерий аппроксимируемости классом $\mathscr{F}_p$ всех конечных p-групп свободного произведения двух $\mathscr{F}_p$-групп с объединенной подгруппой был найден Хигманом [27]. Вопрос об аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух конечных π-групп классом $\mathscr{F}_\pi$ всех конечных π-групп для некоторого непустого множества простых чисел π оказывается еще более сложным. В предположении, что объединенные подгруппы нормальны в свободных множителях, соответствующий критерий доказан в [17], однако в общем случае проблема остается открытой. В частности, обобщить в данном направлении критерий Хигмана вряд ли возможно, так как в формулировке и доказательстве последнего существенным образом используется нильпотентность конечных p-групп.

Вместе с тем из доказательства результата Баумслага следует, что обобщенное свободное произведение двух конечных групп аппроксимируется классом $\mathscr{F}_\pi$ для любого множества π, которое содержит все простые числа, не превосходящие некоторого числа, зависящего от порядков свободных множителей. Поэтому можно поставить также следующий вопрос: для какого минимального множества простых чисел π заданное обобщенное свободное произведение является $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемой группой? Понятно, что условия, необходимые и достаточные для того, чтобы указанное множество совпадало с множеством всех простых делителей порядков свободных множителей, и составляют искомый критерий $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости обобщенного свободного произведения двух $\mathscr{F}_\pi$-групп.

По-видимому, поиск ответов на поставленные вопросы имеет смысл начинать с самых простых примеров. В связи с этим определенный интерес может представлять

Предложение 13. *Пусть p, q, r — (не обязательно различные) простые числа. Тогда произвольное обобщенное свободное произведение двух групп порядков pq и qr аппроксимируется конечными $\{p, q, r\}$-группами.*

Доказательство. Хорошо известно и нетрудно показать (см., например, [28, § 11.2, 17.1]), что группа порядка uv, где u и v — простые числа, либо абелева, либо представляет собой неабелево расщепляемое расширение циклической группы порядка u при помощи циклической группы порядка v (последнее возможно, лишь если $u \equiv 1 \pmod{v}$). Отсюда следует, что объединенная подгруппа либо нормальна в обоих свободных множителях, либо является ретрактом хотя бы одного из них. Во втором случае утверждение предложения вытекает из теоремы 1, в первом — из следствия теоремы 3 в [17]. Предложение доказано.

6. Заключительные замечания

Ниже приводятся два примера, показывающие, что условия, накладываемые на подгруппу H в теореме 2, в общем случае не являются необходимыми для аппроксимируемости группы G. Первый из них свидетельствует также, что аналогичным образом дело обстоит и с условием $\mathscr{K}$-отделимости подгруппы H в группе A из следствия 2.

Пример 1. Пусть p и q — различные простые числа, $\mathscr{F}_p$ — класс всех конечных p-групп, A — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом a, B — свободная группа с базисом $\{b; c\}$, H и K — бесконечные циклические группы, порожденные элементами a^q и b соответственно, $\varphi : H \to K$ — изоморфизм, переводящий элемент a^q в элемент b, $G = (A * B; H = K, \varphi)$.

Баумслаг [29] доказал, что построенная таким образом группа G $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема. Очевидно также, что подгруппа K является ретрактом группы B.

В силу предложения 5 $\mathscr{F}_p$-отделимая подгруппа произвольной группы $\{p\}'$-изолирована в этой группе. Заметим, что q является $\{p\}'$-числом и $a^q \in H$, при этом $a \notin H$. Значит, подгруппа H не является $\{p\}'$-изолированной, а потому и $\mathscr{F}_p$-отделимой в группе A.

Покажем, что группа A $\mathscr{F}_p$-квазирегулярна по подгруппе H.

Пусть M — произвольная подгруппа семейства $\mathscr{F}_p^*(H)$. Она порождается элементом a^{qp^n} для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Положим $N = A^{p^n}$. Тогда $N \in \mathscr{F}_p^*(A)$, и так как числа p^n и q взаимно просты, $N \cap H = M$. Значит, группа A $\mathscr{F}_p$-квазирегулярна по подгруппе H.

Пример 2. Пусть A — свободная группа с базисом $\{a_i, b_i, c \mid i \in \mathbb{N}\}$, N — нормальное замыкание в группе A множества элементов $\{a_i^2, b_i^2, c^2, [a_i, b_i]c^{-1}, [a_i, b_j], [a_i, a_j], [b_i, b_j], [a_i, c], [b_i, c] \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$. Тогда фактор-группа A/N имеет представление

$$\big\langle a_i, b_i, c;\ a_i^2 = b_i^2 = c^2 = 1,\ [a_i, b_i] = c,$$
$$[a_i, b_j] = [a_i, a_j] = [b_i, b_j] = [a_i, c] = [b_i, c] = 1,\ i, j \in \mathbb{N},\ i \neq j\big\rangle.$$

Известно (см. [20, пример 1.4.3]), что фактор-группа A/N не является финитно аппроксимируемой. Поэтому подгруппа N группы A не обладает свойством финитной отделимости.

Пусть далее H — нормальное замыкание в группе A множества элементов

$$\big\{a_i^2, b_i^2, c, [a_i, b_j], [a_i, a_j], [b_i, b_j] \mid i, j \in \mathbb{N}\big\},$$

K — некоторая изоморфная копия группы H, $\varphi : H \to K$ — изоморфизм, B — прямое произведение группы K и циклической группы порядка 2 с порождающим b, $G = (A * B;\ H = K,\ \varphi)$.

Тогда свободные множители A и B обобщенного свободного произведения G финитно аппроксимируемы, K — ретракт группы B.

Фактор-группа A/H представляет собой, очевидно, прямое произведение циклических групп порядка 2 и, следовательно, финитно аппроксимируема. Поэтому подгруппа H финитно отделима в группе A.

Легко видеть, что $N \leqslant H$ и образ подгруппы H относительно естественного гомоморфизма группы A на фактор-группу A/N совпадает с конечной циклической подгруппой, порожденной элементом c. Следовательно, $N \in \mathscr{F}^*(H)$, где $\mathscr{F}$ — класс всех конечных групп.

Как отмечено выше, подгруппа N не отделима в классе $\mathscr{F}$. Поэтому в силу предложения 4 группа A не $\mathscr{F}$-квазирегулярна по подгруппе H.

Покажем, что группа G финитно аппроксимируема.

Обозначим через M нормальное замыкание в группе G подгруппы A. Легко видеть, что подгруппа M порождается подгруппами A и $b^{-1}Ab$. Так как элемент b принадлежит централизатору в группе B подгруппы K, из теоремы Неймана [30, с. 512] следует, что группа M представляет собой свободное произведение подгрупп A и $b^{-1}Ab$ с объединенными подгруппами H и K. Поскольку эти подгруппы объединяются в соответствии с изоморфизмом, являющимся ограничением на H очевидного изоморфизма группы A на группу $b^{-1}Ab$, из утверждения 3 предложения 12 следует, что группа M финитно аппроксимируема.

Таким образом, группа G представляет собой расширение финитно аппроксимируемой группы M при помощи фактор-группы G/M, изоморфной конечной группе B/K. Следовательно, группа G финитно аппроксимируема в силу утверждения 1 того же предложения 12.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.
2. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. V. 43, N 2. P. 856–860. DOI: 10.1080/00927872.2013.851207.
3. *Гольцов Д. В., Яцкин Д. В.* Классы групп и подгрупповые топологии // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Естеств., обществ. науки. 2011. № 2. С. 115–128.
4. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Т. 5. С. 6–10.
5. *Азаров Д. Н., Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп некоторыми классами конечных групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Естеств., обществ. науки. 2012. № 2. С. 86–91.
6. *Азаров Д. Н., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп корневыми классами // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2008. Т. 6. С. 29–42.
7. *Гольцов Д. В.* Аппроксимируемость HNN-расширения с центральными связанными подгруппами корневым классом групп // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 665–669.
8. *Гольцов Д. В.* О почти аппроксимируемости корневыми классами обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, № 3. С. 34–41.
9. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 767–780.
10. *Туманова Е. А.* Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, № 3. С. 140–147.

11. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.
12. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Моделирование и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.
13. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Моделирование и анализ информ. систем. 2013. Т. 20, № 1. С. 133–137.
14. *Tieudjo D.* On root-class residuality of some free constructions // JP J. Algebra Number Theory Appl. 2010. V. 18, N 2. P. 125–143.
15. *Гудовщикова А. С., Соколов Е. В.* Два замечания о классе конечных разрешимых π-групп // Вестн. молодых ученых Иван. гос. ун-та. 2012. С. 3–4.
16. *Соколов Е. В.* Об отделимости циклических подгрупп свободной группы корневым классом групп // Математика и ее приложения: Журн. Иван. мат. о-ва. 2011. Т. 8. С. 101–104.
17. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 605–614.
18. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер. Естеств., обществ. науки. 2013. № 2. С. 94–102.
19. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
20. *Соколов Е. В.* Отделимость подгрупп некоторыми классами конечных групп. Saarbrücken: Lambert Acad. Publ., 2012.
21. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* On various rank conditions in infinite groups // Algebra Discrete Math. 2007. N 4. P. 23–43.
22. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.
23. *Boler J., Evans B.* The free product of residually finite groups amalgamated along retracts is residually finite // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. V. 37, N 1. P. 50–52.
24. *Bobrovskii P. A., Sokolov E. V.* The cyclic subgroup separability of certain generalized free products of two groups // Algebra Colloq. 2010. V. 17, N 4. P. 577–582.
25. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 193–209.
26. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.
27. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 301–305.
28. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 5-е изд. М.: Наука, 1995.
29. *Baumslag G.* On the residual nilpotence of certain one-relator groups // Commun. Pure Appl. Math. 1968. V. 21. P. 491–506.
30. *Neumann B. H.* An essay on free products of groups with amalgamations // Phil. Trans. Royal Soc. London. Ser. A. 1954. V. 246. P. 503–554.

Статья поступила 12 января 2015 г.

Соколов Евгений Викторович, Туманова Елена Александровна
Ивановский гос. университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
`ev-sokolov@yandex.ru`, `helenfog@bk.ru`