*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1*

*УДК 517.958*

# ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О ВОЛНАХ НА ВОДЕ В СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

**В. И. Налимов**

**Аннотация.** Изучается задача о нестационарных волнах на поверхности бесконечно глубокой тяжелой несжимаемой идеальной жидкости. Выведены уравнения для возвышения свободной поверхности, вертикальной и горизонтальной компонент скорости на свободной поверхности. Доказана локальная по времени разрешимость в соболевских пространствах начально-краевой задачи о волнах на воде.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.111

**Ключевые слова:** волны на воде, однозначная разрешимость, оператор Дирихле — Неймана.

Теория движения жидкости со свободной поверхностью имеет давнюю историю как в чистой математике, так и в приложениях, связанных с практической деятельностью. Несмотря на значительные достижения в этой области и постоянное внимание к ней, остается много фундаментальных проблем, на которые стоит обратить внимание.

В данной статье речь пойдет о разрешимости в малом по времени начально-краевой задачи, описывающей распространение волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости. Строгое математическое исследование задачи о движении жидкости со свободной поверхностью было инициировано работой [1], в которой определены главные направления исследований — доказательство однозначной разрешимости задачи о неустановившихся течениях со свободной поверхностью, обоснование приближенных моделей, изучение устойчивости течения.

В классах аналитических функций однозначная разрешимость была установлена в работах [2–6]. Дополнительно в [5, 6] была обоснована теория мелкой воды. Для двухслойной жидкости аналогичные результаты получены в [7, 8].

Корректность начально-краевой задачи в классах функций, имеющих конечные нормы Соболева для плоско-параллельных течений, впервые была доказана в [9], а для пространственных течений — в [10–12]. Ссылки на основные работы по данной тематике можно найти в обзорной статье [13].

Таким образом, разрешимость в малом по времени начально-краевой задаче о волнах на воде можно считать установленной. Тем не менее остается много вопросов, на которые пока нет ответа. Неясно, какие системы координат нужно использовать для описания течения жидкости. Различные подходы к начально-краевой задаче используют разные системы координат. Например, лагранжевы координаты [9], координаты, возникающие при конформных отображениях жидкости [4–6] (в случае плоско-параллельных течениях), и эйлеровы координаты [10–12]. Выбор координат в значительной степени определяет характер математического анализа задачи. Неясно также, какие величины целесообразно считать искомыми. В исследованиях, учитывающих гамильтонову структуру уравнений, в качестве основных величин выбираются возвышение свободной поверхности и значения потенциала скорости на ней. Возможен и другой выбор искомых величин, о чем будет сказано ниже.

Другую проблему, связанную с разрушением решения, можно сформулировать так: чему равен наименьший показатель пространства $H^s$, при котором верна теорема существования локального по времени решения?

В данной статье для описания волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости используется способ Эйлера. В качестве искомых величин выбираются возвышение свободной поверхности и компоненты вектора скорости на свободной границе (вертикальная и горизонтальные). Выписаны системы уравнений для этих величин.

В продолжение работы [14] здесь доказана локальная по времени разрешимость и указаны требования на гладкость начальных данных, гарантирующие существование решения (теорема 4.1). Эти требования являются, по-видимому, минимальными для использованной здесь из [14] техники изучения оператора Дирихле — Неймана и совпадают с требованиями работы [12].

Результат основан на сведении задачи о волнах на воде к эволюционной системе уравнений на свободной поверхности с помощью оператора Дирихле — Неймана. Изучение свойств этого оператора проводится с помощью подходящей параметризации области течения с последующим изучением краевой задачи в полупространстве. Такой подход позволяет избежать трудной техники исчисления псевдодифференциальных операторов с символами конечной гладкости. Необходимо отметить, что положительной определенности оператора Дирихле — Неймана и его оценок недостаточно для доказательства корректности задачи о волнах на воде. Чрезвычайно важную роль в работе играет его производная Фреше, ее оценки и другие свойства.

## § 1. Обозначения и предварительные сведения

Для обобщенной функции $\mathbb{R}^n \ni x \to u(x)$ через $\hat{u}$ будет обозначаться ее преобразование Фурье. Гильбертово пространство $H^s$ ($H^0 = L_2$) состоит из функций, для которых $\lambda^s \hat{u} \in L_2$, где

$$\lambda(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Для векторной функции $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ и матрицы $B$ размера $n \times m$ с элементами $b_{ij}$ будут использоваться обозначения

$$\|\vec{u}\|_s^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_s^2, \quad \|B\|_s^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \|b_{ij}\|_s^2$$

и будем говорить в этом случае, что $\vec{u}$ и $B$ принадлежат $H^s$.

Пусть $\Delta$ — лапласиан в $\mathbb{R}^n$ и $\vec{\nabla} u$ — градиент функции $u$. Определяем операторы $\Lambda^s$ и $|\vec{\nabla}|^s$ равенствами

$$\Lambda^s u = (1 - \Delta)^{s/2} u, \quad |\vec{\nabla}|^s u = (-\Delta)^{s/2} u$$

или, в терминах образов Фурье,

$$\widehat{\Lambda^s u}(\xi) = \lambda^s(\xi) \hat{u}(\xi), \quad \widehat{|\vec{\nabla}|^s u}(\xi) = |\xi|^s \hat{u}(\xi).$$

Ниже постоянно будем использовать очевидные утверждения

$$(u,v)_s = (\Lambda^s u, \Lambda^s v), \quad \|u\|_s = \|\Lambda^s u\|, \quad \|\vec{\nabla} u\|_s = \|\,|\vec{\nabla}|u\|, \quad \|\vec{\nabla}\Lambda^{-s}u\|_s \le \|u\|_s,$$

$$\|u\|_{s-1} \le \|\,|\vec{\nabla}|^{-1}u\|_s; \quad \|u\|_s \le c\|u\|_{s-p}\|\,|\nabla|^p u\|_s + c\|u\|_{s-p}$$

$(p \ge 0)$ без ссылок на них.

Различные константы, если конкретный вид их не важен, будем обозначать одним и тем же символом $c$.

Каждую точку из $\mathbb{R}^{n+1}$ будем записывать в виде $(x, x_{n+1})$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если $(x, x_{n+1}) \to \varphi(x, x_{n+1})$ — функция, определенная на некотором множестве из $\mathbb{R}^{n+1}$, то положим $\varphi(y) : x \to \varphi(y)$ и будем рассматривать $\varphi$ как функцию от $y$ со значениями в пространстве функций или обобщенных функций.

Для функций $U$, определенных в $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y < 0\}$, условимся считать $U(-\infty) = 0$, если $U(y) \to 0$ при $y \to -\infty$ в смысле обобщенных функций.

Символом $N^s = L_2(-\infty, 0; H^s)$ будем обозначать гильбертово пространство функций $y \to U(y)$ со скалярным произведением и нормой, заданными равенствами

$$(U,V)_{N^s} = \int\limits_{-\infty}^{0} (U,V)_s\,dy, \quad \|U\|^2_{N^s} = \int\limits_{-\infty}^{0} \|U\|^2_s\,dy.$$

Очевидно, что для любых $s$ верны формулы

$$(U,V)_{N^s} \le \|U\|_{N^s}\|V\|_{N^s}, \quad (U,V)_{N^s} \le \|\,|\vec{\nabla}|^{-1/2}U\|_{N^s}\,\|\,|\vec{\nabla}|^{1/2}V\|_{N^s} \tag{1.2}$$

и, кроме того, для любых функций $U$ справедлива оценка по сечениям

$$\|U(y)\|^2_s \le 2\|\,|\vec{\nabla}|^{1/2}U\|_{N^s}\left\|\,|\vec{\nabla}|^{-1/2}\frac{\partial U}{\partial y}\right\|_{N^s}. \tag{1.3}$$

Последнее утверждение очевидным образом следует из равенства

$$\|U(y)\|^2_s = 2\int\limits_{-\infty}^{y}\left(U, \frac{\partial U}{\partial y}\right)_s dy.$$

Основными пространствами, кроме $N^s$, с которыми будем иметь дело, будут пространства $E^s$ и $\overset{\circ}{E}{}^s$ функций, для которых конечны нормы

$$\|U\|_{E^s} = \sup_y \|U(y)\|_s + \|U\|_{N^{s+1/2}}; \quad \|U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s} = \sup_y \|U(y)\|_s + \|\,|\vec{\nabla}|^{1/2}U\|_{N^s}.$$

Очевидны неравенства

$$\|U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s} \le c\|U\|_{E^s} \le c\|U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s} + c\|U\|_{N^s}. \tag{1.4}$$

Приведем свойства некоторых отображений во введенных пространствах. Они основаны на оценках соответствующих отображений в пространствах $H^s$ и будут доказаны в § 5. Понадобится функция $s \to \sigma(s)$, определенная следующим образом: пусть $r > n/2$. Тогда

$$\sigma(s) = \max\{|s|, r\}. \tag{1.5}$$

В зависимости от обстоятельств число $r$ может принимать различные значения. Это обозначение $r$ для числа, большего $n/2$, и соответствующую ему функцию $\sigma$ сохраним на протяжении всей статьи и без необходимости не будем напоминать об этом. Дополнительно примем соглашение: если в тексте в каком-либо конкретном случае встретится выражение $\sigma(s)$ при $|s| > n/2$, то всегда будем считать $r \le |s|$ и $\sigma(s) = |s|$ при $|s| > n/2$.

1. Для всех $s$ верны оценки

$$\|UV\|_{N^s} \le c \sup_y \|U(y)\|_{\sigma(s)} \|V\|_{N^s}. \tag{1.6}$$

2. Пусть $s \ge 0$. Тогда

$$\|UV\|_{N^s} \le \mathrm{c}\|U\|_{E^{\sigma(s)-1/2}} \|V\|_{\overset{\circ}{E}{}^{s-1/2}}. \tag{1.7}$$

3. Для всех $s \ge 0$ верны неравенства

$$\|UV\|_{E^s} \le c\|U\|_{E^{\sigma(s)}} \|V\|_{\overset{\circ}{E}{}^{s}}. \tag{1.8}$$

Замечание 1.1. При $s > n/2$ пространство $E^s$ является банаховой алгеброй:

$$\|UV\|_{E^s} \le C\|U\|_{E^s}\|V\|_{E^s}.$$

Это очевидно.

4. Пусть $n \ge 2$ и $s \ge 1/2$. Справедлива оценка

$$\| \, |\vec{\nabla}|^{-1/2}(UV)\|_{N^s} \le c\|U\|_{E^{\sigma(s-1)}} \|V\|_{E^{s-1}}. \tag{1.9}$$

Рассмотрим композицию $F \circ \vec{U}$ функции $\mathbb{R}^k \ni z \to F(z)$ и векторной функции $\vec{U}$ со значением в $\mathbb{R}^k$ (отождествляем аффинное пространство $\mathbb{R}^k$ с присоединенным к нему векторным пространством $\vec{\mathbb{R}}^k$ и пишем $\vec{U}$ вместо $0 + \vec{U}$). В дальнейшем, говоря о композиции, всегда будем предполагать, что функция $F$ определена и бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности начала координат, а значения $\vec{U}$ лежат в $\mathbb{R}^k$.

5. Пусть $s$ — произвольное число и $\rho = \sup\limits_y \|U(y)\|_{\sigma(s)}$. Тогда для достаточно малых $\rho$ верны равенства

$$\|F(\vec{U}) - F(\vec{O})\|_{N^s} = \chi(\rho)\|\vec{U}\|_{N^s}, \quad \|F(\vec{U})V\|_{N^s} \le \chi(\rho)\|V\|_{N^s}. \tag{1.10}$$

6. Пусть $s \ge -1/2$ и величина $\rho = \|\vec{U}\|_{E^{\sigma(s-1/2)}}$ достаточно мала. Справедливы неравенства

$$\|F(\vec{U})V\|_{N^{s+1/2}} \le \chi(\rho)\|V\|_{\overset{\circ}{E}{}^{s}}. \tag{1.11}$$

7. Пусть $s \ge -1/2$ и величина $\rho = \|\vec{U}\|_{E^{\sigma(s)}}$ достаточно мала. Тогда

$$\|F(\vec{U})V\|_{E^s} \le \chi(\rho)\|V\|_{\overset{\circ}{E}{}^{s}}. \tag{1.12}$$

8. Пусть $n \ge 2$, $s \ge 1/2$ и величина $\rho = \sup\limits_y \|\vec{U}\|_{\sigma(s-1/2)}$ достаточно мала. Тогда

$$\| \, |\vec{\nabla}|^{-1/2}[\Lambda^s, F(\vec{U})]V\|_{N^0} \le \chi(\rho) \sup_y \|U\|_{\sigma(s-1)+1/2} \|V\|_{N^{s-1}}. \tag{1.13}$$

Определим билинейное отображение $(U, V) \to Q_s(U, V)$ равенством

$$Q_s(U, V) = \Lambda^s(U, V) - U\Lambda^s V - V\Lambda^s U. \tag{1.14}$$

9. Пусть $s \geq 1/2$, $p \geq 0$ и величина $\rho = \sup\limits_y \|\vec{U}\|_{\sigma(s+p-1)}$ достаточно мала. Справедливы оценки

$$\sup_y \|Q_s(F(\vec{U}), V)\|_p \leq \chi(\rho) \sup_y \|\vec{U}\|_{\sigma(s+p-1)+1/2} \sup_y \|V\|_{s+p-1/2}. \tag{1.15}$$

Замечание 1.2. Слова «величина $\rho$ достаточно мала» не следует понимать буквально. Здесь они означают, что согласно теореме вложения Соболева значения $\vec{U}$ лежат в шаре, целиком содержащемся в области определения функции $F$. В частности, если область определения функции $F$ совпадает с $\mathbb{R}^k$, то $\rho$ может быть любым.

## § 2. Оператор Дирихле — Неймана

Пусть $\Gamma$ — гиперповерхность класса $C^\infty$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданная равенством $\Gamma = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n,\ x_{n+1} = h(x)\}$, и пусть $J^2 = 1 + |\vec{\nabla} h|^2$. Функция $J$ определяет меру на $\Gamma$: $d\Gamma = J\,dx$. Предположим, что в области $\Omega = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n,\ -\infty < x_{n+1} < h(x)\}$ задана функция $(x, x_{n+1}) \to \Phi(x, x_{n+1})$, принимающая значения $\varphi$ на $\Gamma$ и гармоническая в $\Omega$:

$$\Delta_{n+1}\Phi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \Phi = \varphi \text{ на } \Gamma, \quad \Phi(-\infty) = 0. \tag{2.1}$$

Определим оператор Дирихле — Неймана $h \to G(h)$ и тесно связанный с ним оператор $h \to D(h)$ равенствами

$$G(h)\varphi(x) = J\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{n}}(x, h(x)), \quad D(h)\varphi(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1}}(x, h(x)). \tag{2.2}$$

Здесь $\vec{n}$ — внешняя нормаль к $\Gamma$. Эти операторы линейны по $\varphi$ и нелинейны по $h$. Прямыми вычислениями проверяется равенство

$$D(h)\varphi = \frac{1}{J^2}(G(h)\varphi + \vec{\nabla} h \cdot \vec{\nabla}\varphi), \tag{2.3}$$

так что

$$D^2\varphi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_{n+1}^2}\bigg|_\Gamma = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}\bigg|_\Gamma = -\frac{1}{J^2}(\operatorname{div}(\vec{\nabla}\varphi - D\varphi\vec{\nabla} h) + \vec{\nabla} h \cdot \vec{\nabla}\varphi). \tag{2.4}$$

Производная Фреше оператора Дирихле — Неймана хорошо известна. Она определяется его дифференциалом

$$d(G(h)\varphi) = G\,d\varphi - \operatorname{div}(dh(\vec{\nabla}\varphi - D\varphi\vec{\nabla} h)) - G(dhD\varphi). \tag{2.5}$$

Вычисляя дифференциал правой части (2.3) с учетом двух последних формул, придем к равенству

$$d(D(h)\varphi) = D(d\varphi - D\varphi dh) + dhD^2\varphi = Dd\varphi - [D, dh]D\varphi. \tag{2.6}$$

Как обычно, символ $[A, B] = AB - BA$ обозначает коммутатор двух операторов. В (2.6) стоит коммутатор оператора $D$ и оператора умножения на функцию $dh$.

Замечание 2.1. Если в (2.5) и (2.6) зафиксировать $\varphi$ (т. е. положить $d\varphi = 0$), то в силу произвольности $\varphi$ эти соотношения можно рассматривать как уравнения на $G(h)$ и $D(h)$ соответственно. Вместе с «начальными данными»

$$G(0) = |\vec{\nabla}|, \quad D(0) = |\vec{\nabla}| \tag{2.7}$$

они однозначно определяют каждый из операторов $G(h)$ и $D(h)$. Более того, если зафиксировать $h$ и рассмотреть семейство операторов $A(t) = D(th)$ $(0 \le t \le 1)$, то из (2.6) и (2.7) имеем задачу

$$A'(t) = -[A(t), h]A(t), \quad A(0) = |\vec{\nabla}|, \tag{2.8}$$

решение которой при $t = 1$ дает оператор $D(h)$. Пусть $a_0$ — главный символ оператора $A(t)$. Из (2.8) имеем

$$\frac{\partial a_0}{\partial t} = ia_0 \vec{\nabla} h \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} a_0 \quad (i = \sqrt{-1}). \tag{2.9}$$

Пусть $b_0$ — главный символ оператора $G(th)$. Так как $b_0 = (1+t^2|\vec{\nabla} h|^2)a_0 - it\vec{\nabla} h \cdot \vec{\xi}$ согласно (2.3), то (2.9) можно написать в виде

$$\frac{\partial b_0}{\partial t} = -(1 + t^2|\vec{\nabla} h|^2)^{-1}(t\vec{\nabla} h \cdot \vec{\xi} - ib_0)(-\vec{\nabla} h \cdot \nabla_\xi b_0 + it|\vec{\nabla} h|^2) + i\vec{\nabla} h \cdot \nabla \vec{\xi}.$$

Поскольку оператор $G$ симметричный, символ $b_0$ вещественный. Отделяя в последнем уравнении вещественную и мнимую части, получим систему

$$(1 + t^2|\vec{\nabla} h|^2)\frac{\partial b_0}{\partial t} = t|\vec{\nabla} h|^2 - t(\vec{\nabla} h \cdot \vec{\xi})(\vec{\nabla} h \cdot \vec{\nabla}_\xi b_0; \vec{\nabla} h \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\xi}}(b_0^2 - |\vec{\xi}|^2) = 0.$$

Если первое уравнение умножить на $b_0$, то получится линейное обыкновенное уравнение, которое легко решается и определяет главный символ оператора $G(th)$:

$$b_0(t, x_i \xi) = \sqrt{(1 + t^2|\vec{\nabla} h|^2)|\vec{\xi}|^2 - t^2(\vec{\xi} \cdot \nabla h)^2}.$$

При вычислении полного символа оператора Дирихле — Неймана, основанного на уравнении (2.8), возникают проблемы, связанные с неоднозначным определением младших символов. Это связано с тем, что оператор $G$ симметричный. Поэтому целесообразно сохранить вещественность всех символов, входящих в представление для символа оператора Дирихле — Неймана.

Способ вычисления символов оператора Дирихле — Неймана (как главного, так и всех остальных) принадлежит С. В. Дятлову (Массачусетский технологический институт).

## § 3. Уравнения динамики поверхностных волн

Задача о волнах на воде, занимающей некоторый объем со свободной поверхностью, состоит в определении эволюции свободной поверхности и поля скорости под действием силы тяжести. Предполагается, что жидкость несжимаемая и в ней нет завихрений.

Будем считать, что свободная поверхность $\Gamma(h)$ задана уравнением $x_{n+1} = h(x, t)$, где $t$ — время, $x \in \mathbb{R}^n$, а жидкость занимает объем $\Omega(h) = \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : c \in \mathbb{R}^n, x_{n+1} < h(x, t)\}$ и потенциал тяжести имеет вид $-gx_{n+1}$ ($g$ — ускорение силы тяжести). В силу предположения о несжимаемости жидкости и отсутствии завихренности задача о волнах на поверхности бесконечно глубокой жидкости сводится к отысканию области течения $\Omega(h)$ и потенциала скорости $(x, x_{n+1}, t) \to \Phi(x, x_{n+1}, t)$ в ней из уравнения Лапласа

$$\Delta_{n+1}\Phi = 0 \quad \text{в } \Omega(h) \tag{3.1}$$

с двумя граничными условиями на свободной поверхности $\Gamma(h)$ — кинематическим условием и условием Бернулли:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1}} - \vec{\nabla} h \cdot \vec{\nabla}\Phi; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -gh - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\Phi|^2 - \frac{1}{2}\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1}}\right|^2. \tag{3.2}$$

Ввиду неограниченности области течения необходимы условия, определяющие поведение на бесконечности. Будем предполагать, что решение убывает на бесконечности:

$$h \to 0 \text{ при } |x| \to \infty, \quad \vec{\nabla}_{n+1}\Phi \to \vec{0} \text{ при } |x|^2 + x_{n+1}^2 \to \infty. \tag{3.3}$$

Кроме того, считается, что в фиксированный момент времени (обычно $t = 0$) заданы область течения (т. е. функция $h$) и значение потенциала скорости на свободной поверхности:

$$h = h_0 \text{ при } t = 0, \quad \Phi = \Phi_0 \text{ при } t = 0 \text{ на } \Gamma(h_0). \tag{3.4}$$

Уравнение (3.1) вместе с краевыми условиями (3.2), (3.3) и начальными данными полностью определяют картину течения при $t > 0$.

## § 4. Уравнения на свободной поверхности и формулировка основного результата

При исследовании задачи о волнах на воде принято в качестве искомых величин выбирать функции, определенные только на свободной поверхности. С помощью оператора Дирихле — Неймана уравнения (3.2) можно записать в эквивалентном виде:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = G(h)\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -gh - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\varphi|^2 + \frac{1}{2}J^2(D(h)\varphi)^2, \tag{4.1}$$

где $\varphi$ — значение потенциала скорости на свободной границе. К этим уравнениям нужно добавить начальные данные

$$\varphi = \varphi_0, \quad h \to h_0 \text{ при } t = 0 \tag{4.2}$$

и условие на бесконечности. Последнее обычно заменяют требованием принадлежности решения подходящим пространством $H^s$.

Отметим, что система уравнений (4.1) имеет гамильтонову структуру с гамильтонианом, имеющим вид функционала полной энергии.

Другую систему уравнений получим, если в качестве искомых величин выбрать возвышение свободной поверхности $h$ и компоненты скорости на ней (вертикальную и горизонтальные):

$$v = D(h)\varphi = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1}}\right|_{\Gamma(h)}, \quad \vec{u} = \vec{\nabla}\varphi - D(h)\varphi\vec{\nabla}h = \vec{\nabla}\Phi|_{\Gamma(h)} \tag{4.3}$$

($\Phi$ — потенциал скорости). Из системы (3.1), (3.2) вытекают уравнения

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})h = v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})v = -gDh - \frac{1}{2}D(|\vec{u}|^2 + v^2) + \vec{u}\cdot D\vec{u} + vDv. \tag{4.4}$$

Замыкает эту систему уравнений связь между компонентами скорости на свободной поверхности:

$$\vec{u} = \vec{R}(h)v, \quad \text{где } \vec{R}v = -v\vec{\nabla}h + (-\Delta)^{-1}\vec{\nabla}(\operatorname{div}(v\vec{\nabla}h) + Gv). \tag{4.5}$$

Система (4.4), (4.5), вывод которой будет дан в конце параграфа, вместе с начальными данными

$$h = h_0, \ v = v_0 \quad \text{при } t = 0 \tag{4.6}$$

эквивалента системе (4.1) с начальными данными (4.2).

Основным результатом статьи является

**Теорема 4.1.** *Пусть $n \geq 2$, $s > 1 + n/2$. Предположим, что $h_0 \in H^{s+1/2}$, $v_0 \in H^s$. Тогда существует такое $T > 0$, что для времени $t < T$ задача (4.4)–(4.6) однозначно разрешима и $h(t) \in H^{s+1/2}$; $v(t), \vec{u}(t) \in H^s$ для указанных $t$.*

Эта теорема доказана в последнем параграфе.

Вывод системы (4.4)–(4.6) достаточно прост. Первое уравнение в (4.4) очевидно. Заметим, что из формулы (2.5) для дифференциала оператора $D$ и определения вектора скорости на $\Gamma$ следуют соотношения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - v\frac{\partial h}{\partial t}\right) + Dv\frac{\partial h}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} v = D\vec{u} + Dv\vec{\nabla} h. \tag{4.7}$$

Выражая производные по $t$ от $\varphi$ и $h$ из (4.1), получим второе уравнение в (4.4).

Пусть, далее, векторная функция $\vec{u}$ и функция $v$ определены равенствами (4.3). Поскольку $\vec{u} + v\vec{\nabla} h = \vec{\nabla}\varphi$, из формулы (2.6) вытекает система уравнений

$$\operatorname{div}\vec{u} = -Gv, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j + v\frac{\partial h}{\partial u_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j + v\frac{\partial h}{\partial x_i}\right) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

решение которой определяет оператор $(h, v) \to \vec{R}(h)v$ в (4.5).

В практически важном случае $n = 2$ написанная выше система является неоднородной системой Коши — Римана.

Замечание 4.1. Из второго уравнения (4.1) после дифференцирования по всем $x_i$ следуют соотношения

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\left(\frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})v + g\right)\vec{\nabla} h. \tag{4.8}$$

Поскольку системы (4.1) и (4.4)–(4.6) эквивалентны, равенство (4.8) является следствием уравнений (4.4)–(4.6).

## § 5. Нелинейные отображения в пространства $H^s$

Задача, с которой будем иметь дело, нелинейная, и в дальнейшем потребуются оценки в пространстве $H^s$ композиции отображений. Начнем с оценок нормы произведения двух функций. Они основаны на свойствах функции $\lambda$, заданной формулой (1.1). Также понадобятся простейшая оценка $L_2$-нормы свертки $u * v = \int u(x-y)v(y)\,dy$:

$$\|u * v\| \leq \|u\|_{L_1}\|v\|, \tag{5.1}$$

и формула $\widehat{uv} = c\hat{u} * \hat{v}$ для преобразования Фурье произведения двух функций. Запись интеграла без указания пределов интегрирования означает, что он берется по всему пространству. Отметим, что при $r > n/2$

$$\|\hat{u}\|_{L_1} \leq c\|u\|_r, \quad \|u\|_{L_\infty} \leq c\|u\|_r \tag{5.2}$$

с постоянными, зависящими только от $r$.

**Лемма 5.1.** *Пусть $r > n/2$ и функция $s \to \sigma(s)$ определена формулой (1.5). Для всех $s$ справедливы неравенства*

$$\|uv\|_s \leq c\|u\|_{\sigma(s)}\|v\|_s. \tag{5.3}$$

*Кроме того, с любым $p \geq 0$ верны оценки*

$$\|uv\|_s \leq c\|u\|_{\sigma(s-p)+p}\|v\|_{s-p} + c\|u\|_{\sigma(s-p)}\|\,|\vec{\nabla}|^p v\|_{s-p} \quad (s \geq 0). \tag{5.4}$$

Доказательство основано на оценке

$$\lambda^s(\xi) \le c\lambda^s(\eta) + c\lambda^{s'}(\xi-\eta)\lambda^{s-s'}(\eta) \quad (s \ge 0,\ s' \ge s) \tag{5.5}$$

с функцией $\lambda$, заданной формулой (1.1). В соответствии с формулой преобразования Фурье произведения двух функций достаточно оценить $L_2$-норму функции $w(\xi) = \int \Lambda^s(\xi)|\hat{u}(\xi-\eta)|\,|\hat{v}(\eta)|\,d\eta$. При $s \ge 0$ согласно (5.5) $w(\xi) \le cw_1(\xi) + cw_2(\xi)$, где

$$w_1(\xi) = \int |\hat{u}(\xi-\eta)|\lambda^s(\eta)|\hat{v}(\eta)|\,d\eta, \quad w_2(\xi) = \int \lambda^{s'-s}(\xi-\eta)|\hat{v}(\xi-\eta)|\lambda^{s'}(\eta)|\hat{u}(\eta)|\,d\eta.$$

Применяя оценки (5.1) и (5.2) для функций $w_k$, придем к формуле

$$\|uv\|_s \le c\|u\|_r\|v\|_s + c\|u\|_{s'}\|v\|_{r+s-s'} \quad (s \ge 0,\ s' \ge s). \tag{5.6}$$

Выбирая здесь $s' = \sigma(s)$, получим (5.3) для $s \ge 0$. При отрицательных $s$ неравенство (5.3) следует из соотношения двойственности. Заменим $s$ на $s+p$ в (5.6):

$$\|uv\|_{s+p} \le c\|u\|_r\|v\|_{s+p} + c\|u\|_{s'}\|v\|_{r+s+p-s'} \quad (s+p \ge 0,\ s' \ge s+p). \tag{5.7}$$

Выберем $s' = s+p$, если $s \ge r$, и положим $s' = r+p$, если $s < r$. Объединим обе оценки и, учитывая, что $\sigma(s) \ge r$ для любого $s$, в результате получим

$$\|uv\|_{s+p} \le \|u\|_{\sigma(s)+p}\|v\|_s + c\|u\|_{\sigma(s)}\|v\|_{s+p}.$$

Поскольку $\|v\|_{s+p} \le c\|v\|_s + c\|\,|\vec{\nabla}|^p v\|_s$, отсюда вытекает (5.4).

**Лемма 5.2.** *Пусть $0 \le p < n/2$. При $s \ge 0$ верны оценки*

$$\|\,|\vec{\nabla}|^{-p}(uv)\|_s \le c\|u\|_{-s+p}\|v\|_{s-p} + c\|uv\|_{s-p}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Сначала заметим, что при $|\xi| \le 1$ верно соотношение

$$|\widehat{uv}(\xi)| \le c\|u\|_{-s+p}\|v\|_{s-p}. \tag{5.9}$$

Действительно, $\lambda(\eta) \le c\lambda(\xi-\eta) \le c\lambda(\eta)$ для выбранных $\xi$, поэтому

$$|\widehat{uv}(\xi)| \le c\int \lambda^{-s+p}(\xi-\eta)|\hat{u}(\xi-\eta)|\lambda^{s-p}(\eta)|\hat{v}(\eta)|\,d\eta.$$

Из этой формулы и неравенства Гёльдера вытекает (5.9). Поскольку интеграл от $|\xi|^{-2}|\widehat{uv}(\xi)|^2$ по множеству $|\xi| \le 1$ не превосходит квадрата правой части неравенства (5.9), а соответствующий интеграл по множеству $|\xi| \ge 1$ не превосходит $c\|uv\|^2_{s-p}$, формула (5.8) доказана.

Приведем дополнительные свойства функции $\lambda$, которые понадобятся в дальнейшем.

**Предложение 5.1.** *Пусть числа $p$, $s$ и $q$ удовлетворяют условиям $p \ge 0$, $s \ge 0$ и $0 \le q \le \min(1,s)$. Пусть функции $f_1$ и $f_2$ заданы равенствами*

$$f_1(\xi,\eta) = \lambda^p(\xi)(\lambda^s(\xi) - \lambda^s(\eta)), \quad f_2(\xi,\eta) = \lambda^p(\xi)(\lambda^s(\xi) - \lambda^s(\eta) - \lambda^s(\xi-\eta)).$$

*Тогда для всех $\xi$ и $\eta$ верны неравенства*

$$|f_k(\xi,\eta)| \le c\lambda^q(\xi-\eta)\lambda^{s+p-q}(\eta) + c\lambda^{s'}(\xi-\eta)\lambda^{s+p-s'}(\eta) \tag{5.10}$$

*с той разницей, что $s' \ge s+p$ для функции $f_1$ и $s' \ge s+p-q$ для функции $f_2$.*

Предложение 5.1 будет доказано в конце параграфа.

**Предложение 5.2.** *Пусть числа* $p$, $s$ *и* $q$ *удовлетворяют условиям* $p \geq 0$, $s \geq 0$ *и* $0 \leq q \leq \min(1, s)$. *Тогда верны неравенства*

$$\|[\Lambda^s, u]v\|_p \leq c\|u\|_{\sigma(s+p-q)+q}\|v\|_{s+p-q}. \tag{5.11}$$

*В частности, при* $s \geq 1/2$

$$\|[\Lambda^s, u]v\|_p \leq c\|u\|_{\sigma(s+p-1/2)+1/2}\|v\|_{s+p-1/2}. \tag{5.12}$$

Доказательство. Нужно оценить $L_2$-норму функции

$$\int f_1(\xi, \eta)|\hat{u}(\xi - \eta)|\,|\hat{v}(\eta)|\,d\eta \leq cw_1(\xi) + cw_2(\xi),$$

где согласно (5.10)

$$w_1(\xi) = \int \lambda^q(\xi - \eta)|\hat{u}(\xi - \eta)|\lambda^{s+p-q}(\eta)|\hat{v}(\eta)|\,d\eta,$$

$$w_2(\xi) = \int \lambda^{s+p-s'}(\xi - \eta)|\hat{v}(\xi - \eta)|\lambda^{s'}(\eta)|\hat{u}(\eta)|\,d\eta \quad (s' \geq s + p).$$

Из (5.1), (5.2) имеем

$$\|[\Lambda^s, u]v\|_p \leq c\|u\|_{r+q}\|v\|_{s+p-q} + c\|u\|_{s'}\|v\|_{r+s+p-s'} \quad (s' \geq s + p).$$

Из этого неравенства следует (5.11), если в нем положить $s' = s + p$ при $s + p - q \geq r$ и $s' = r + q$ при $s + p - q < r$, а затем объединить оценки.

**Следствие 5.1.1.** *Для всех* $s \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\|[\Lambda^s, u]v\|_{-1/2} \leq c\|u\|_{\sigma(s-1)+1/2}\|v\|_{s-1}. \tag{5.13}$$

В самом деле, пусть сначала $s \leq 1/2$. Поскольку коммутатор является антисимметрическим оператором, норма в левой части (5.13) не превосходит

$$\sup_{w,\|w\|=1} (\Lambda^{s-1}v, [\Lambda, u]\Lambda^{-1/2}w - [\Lambda^{1-s}, u]\Lambda^{s-1/2}w)$$
$$\leq \|v\|_{s-1} \sup_{w,\|w\|=1} (\|[\Lambda, u]\Lambda^{-1/2}w\| + \|[\Lambda^{1-s}, u]\Lambda^{s-1/2}w\|) \leq c\|u\|_{r+1/2}\|v\|_{s-1}$$

в соответствии с неравенством (5.11). Тем самым утверждение (5.13) при $s \leq 1/2$ доказано. Если $s \geq 1/2$, то (5.13) вытекает из равенства

$$\Lambda^{-1/2}[\Lambda^s, u]v = [\Lambda^{s-1/2}, u]v + \Lambda\|_{-1/2}[\Lambda^{1/2}, u]\Lambda^{s-1/2}v$$

уже доказанной оценки (5.13) при $s \leq 1/2$ и (5.11).

**Следствие 5.1.2.** *Для всех* $s \geq 0$ *справедливо неравенство*

$$\|[\Lambda^s, u]v\| \leq c\|u\|_{\sigma(s-1/2)+1/2}\|v\|_{s-1/2}. \tag{5.14}$$

В самом деле, при $s \geq 1/2$ это утверждение следует из (5.11), а при $s \leq 1/2$ — из (5.13) и представления

$$\Lambda^{1/2}[\Lambda^s, u]v = [\Lambda^{s+1/2}, u]v + \Lambda^{-1/2}[\Lambda^{1/2}, u]\Lambda^{s+1/2}v.$$

**Лемма 5.3.** *Пусть $n \geq 2$ и $s \geq 1/2$. Тогда*

$$\| \, |\vec{\nabla}|^{-1/2} [\Lambda^s, u] v \| \leq c \|u\|_{\sigma(s-1)+1/2} \|v\|_{s-1}. \tag{5.15}$$

Доказательство. Обозначим через $w$ функцию $[\Lambda^s, u]v$, так что

$$\widehat{w}(\xi) = c \int f_1(\xi, \eta) \hat{u}(\xi - \eta) \hat{v}(\eta) \, d\eta.$$

Заметим, что $\lambda(\xi - \eta) \leq c\lambda(\eta)$ при $|\xi| \leq 1$, поэтому $|\widehat{w}(\xi)| \leq c\|u\|_1 \|v\|_{s-1}$ при $|\xi| \leq 1$ согласно неравенству Гёльдера. Поэтому интеграл от $|\xi|^{-1} |\widehat{w}(\xi)|^2$ по множеству $|\xi| \leq 1$ не превосходит $c\|u\|_1^2 \|v\|_{s-1}^2$. Поскольку аналогичный интеграл по множеству $|\xi| \geq 1$ оценивается сверху через $\|w\|_{-1/2}^2$, верно неравенство

$$\| \, |\vec{\nabla}|^{1/2} [\Lambda^s, u] v \| \leq c \|u\|_1 \|v\|_{s-1} + c \|[\Lambda^s, u] v\|_{-1/2}.$$

Утверждение (5.15) получим из формулы

$$[\Lambda^s, u] v = \Lambda^{1/2} [\Lambda^{s-1/2}, u] v + [\Lambda^{1/2}, u] \Lambda^{s-1/2} v,$$

если воспользуемся оценками (5.12) и (5.13).

Приведем свойства билинейного отображения $Q_s$, определенного равенством (1.14).

**Лемма 5.4.** *Пусть три числа $p$, $s$ и $q$ удовлетворяют условиям $p, s \geq 0$, $0 \leq q \leq \min(1, s)$. Тогда верны неравенства*

$$\|Q_s(u, v)\|_p \leq c \|u\|_{\sigma(s+p-2q)+q} \|v\|_{s+p-q}. \tag{5.16}$$

*В частности, при $s \geq 1/2$*

$$\|Q_s(u, v)\|_p \leq c \|u\|_{\sigma(s+p-1)+1/2} \|v\|_{s+p-1/2}. \tag{5.17}$$

Доказательство. Действуя точно так же, как при доказательстве леммы 5.2, для $H^p$-нормы $Q_s(u, v)$ получим оценку через правую часть неравенства (5.14), в которой $s' \geq s + p - q$. Выбирая $s' = s + p - q$ при $s + p - 2q \geq r$ и полагая $s' = r + q$ при $s + p - rq < r$, получим две оценки, которые вместе дают (5.17).

Приведем некоторые свойства композиции функции $\mathbb{R}^k \ni z \to F(z)$ и векторной функции $\vec{u}$.

1. Пусть $s > n/2$ и величина $\|\vec{u}\|_s$ достаточно мала. Тогда

$$\|F(\vec{u}) - F(\vec{o})\|_s \leq \chi(\|u\|_s) \|u\|_s, \quad \|(F(\vec{u}) - F(\vec{o})) v\|_s \leq \chi(\|u\|_s) \|u\|_s \|v\|_s. \tag{5.18}$$

Эти неравенства обоснованы в [14].

2. Пусть $s$ — произвольное число и величина $\|\vec{u}\|_{\sigma(s)}$ достаточно мала. Тогда

$$\|F(\vec{u}) - F(\vec{o})\|_s \leq \chi(\|u\|_{\sigma(s)}) \|u\|_s, \quad \|F(\vec{u}) v\|_s \leq \chi(\|u\|_{\sigma(s)}) \|v\|_s. \tag{5.19}$$

Действительно, согласно формуле Тейлора с остатком в интегральной форме $F(\vec{u}) - F(\vec{o}) = \vec{F}_1(\vec{u}) \cdot \vec{u} = (\vec{F}_1(\vec{u}) - F(\vec{o})) \cdot \vec{u} + \vec{F}_1(\vec{o}) \cdot \vec{u}$. Применяя последовательно оценки (5.3) и (5.18), сначала получим неравенство в (5.18), а затем и второе, если представить $F(\vec{u}) = F(\vec{u}) - F(\vec{o}) + F(\vec{o})$.

3. На самом деле оценки (5.18) зависят от «старших производных» векторной функции $\vec{u}$ линейно: пусть $s$ — произвольное число и величина $\rho = \|\vec{u}\|_{\sigma(s-1)}$ достаточно мала. Тогда справедливы оценки

$$\|F(\vec{u}) - F(0)\|_s \le \chi(\rho)\|u\|_s, \quad \|F(\vec{u})v\|_s \le \chi(\rho)(1 + \|u\|_{\sigma(s)})\|v\|_s. \tag{5.20}$$

Действительно, согласно (5.19) $\|F(\vec{u})-F(\vec{o})\|_{s-1} \le \chi(\rho)\|\vec{u}\|_{s-1}$ и аналогично $\|F_{x_i}\|_{s-1} = \|F'(\vec{u})\vec{u}_{x_i}\|_{s-1} \le \chi(\rho)\|u\|_s$. Эти две оценки вместе доказывают первое неравенство в (5.20), а второе очевидным образом следует из представления $F(\vec{u}) = F(\vec{u}) - F(\vec{o}) + \vec{F}(\vec{o})$.

Замечание 5.1. Оценки (5.20) целесообразно использовать при $s > 1 + n/2$. Отметим, что в этом случае $\sigma(s-1) = s-1$.

4. Пусть $s \ge -1/2$ и величина $\rho = \|\vec{u}\|_{\sigma(s-1/2)}$ достаточно мала. Тогда

$$\|F(\vec{u})v\|_s \le |F(\vec{o})|\,\|v\|_s + \chi(\rho)(\|\vec{u}\|_{\sigma(s-1/2)+1/2}\|v\|_s + \|\vec{u}\|_{\sigma(s-1/2)}\|\,|\vec{\nabla}|^{1/2}v\|_s). \tag{5.21}$$

В самом деле из представления $F(\vec{u}) = F(\vec{u}) - F(\vec{o}) + F(\vec{o})$ и (5.20) имеем

$$\|F(\vec{u}) - F(\vec{o})\|_{\sigma(s-1/2)+1/2} \le \chi(\rho)\|\vec{u}\|_{\sigma(s-1/2)+1/2},$$

поскольку $\sigma(\sigma(s) - 1/2) \le \sigma(\sigma(s)) = \sigma(s)$ в силу монотонности функции $\sigma$ для положительных аргументов.

Аналогично из (5.20) получаем $\|F(\vec{u}) - F(\vec{o})\|_{\sigma(s-1/2)} \le \chi(\rho)\|\vec{u}\|_{\sigma(s-1/2)}$. Утверждение (5.21) следует из этих двух оценок и (5.4).

5. Пусть $s \ge -1/2$ и величина $\rho = \|\vec{u}\|_{\sigma(s-1/2)}$ достаточно мала. Тогда

$$\|F(\vec{u}) - F(\vec{o})\|_{s+1/2} \le c\chi(\rho)(\|\vec{u}\|_{\sigma(s-1/2)+1/2}\|u\|_s + \|u\|_{\sigma(s-1/2)}\|\,|\vec{\nabla}|^{1/2}\vec{u}\|_s). \tag{5.22}$$

Действительно, это неравенство есть следствие представления $F(\vec{u})-F(\vec{o}) = \vec{F}_1(\vec{u}) \cdot \vec{u}$ и оценки (5.21).

6. Пусть $s \ge 1/2$, $p \ge 0$ и величина $\rho = \|\vec{u}\|_{\sigma(s+p-1/2)}$ достаточно мала. Тогда

$$\|[\Lambda^s, F(\vec{u})]v\|_p \le \chi(\rho)\|\vec{u}\|_{\sigma(s+p-1/2)+1/2}\|v\|_{s+p-1/2}. \tag{5.23}$$

В самом деле, поскольку $[\Lambda^s, F(\vec{u})] = [\Lambda^s, F(\vec{u}) - F(\vec{o})]$, неравенство (5.23) следует из (5.12), (5.20) и монотонности функции $\sigma$ для положительных значений аргумента.

7. Пусть $n \ge 2$, $s \ge 1/2$ и величина $\rho = \|\vec{u}\|_{\sigma(s-1/2)}$ достаточно мала. Тогда

$$\|\,|\vec{\nabla}|^{-1/2}[\Lambda^s, F(\vec{u})]v\| \le \chi(\rho)\|\vec{u}\|_{\sigma(s-1)+1/2}\|v\|_{s-1}. \tag{5.24}$$

Действительно, это утверждение вытекает из (5.15), (5.20) и замечания $\sigma(\sigma(s-1) - 1/2) \le \sigma(s - 1/2)$.

8. Пусть $s \ge 1/2$, $p \ge 0$, величина $\rho = \|\vec{u}\|_{\sigma(s+p-1)}$ достаточно мала и билинейное отображение $Q_s$ определено формулой (1.14). Справедливы оценки

$$\|Q_s(F(\vec{u}), v)\|_p \le \chi(\rho)\|\vec{u}\|_{\sigma(s+p-1)+1/2}\|v\|_{s+p-1/2}. \tag{5.25}$$

Это утверждение есть очевидное следствие представления $Q_s(F(\vec{u}), v) = Q_s(F(\vec{u}) - F(\vec{o}), v) + F(\vec{o})v$, оценки (5.18) и первого неравенства в (5.20). Отметим, что $\Lambda^s 1 = 1$.

Замечание 5.2. Выражение «величина $\rho$ достаточно мала» здесь, как и в замечании 1.2, означает, что область значений векторной функции $\vec{u}$ лежит в шаре, целиком содержащемся в области определения функции $F$. Если областью определения $F$ является всё $\mathbb{R}^k$, то значения $\rho$ могут быть любыми.

Замечание 5.3 о неравенствах (1.6)–(1.13), (1.15). Утверждение (1.6) следует из (5.3), утверждения (1.7), (1.8) — из определения пространств $E^s$ (соответственно $\overset{\circ}{E}{}^s$) и (5.4). Формула (1.9) вытекает из (5.8) и (1.7). Соотношение (1.11) выводится из (5.20), а неравенство (1.12) есть следствие (1.11) и (5.19). Утверждения (1.13) и (1.15) — очевидные следствия (5.24) и (5.25).

Доказательство предложения 5.1. Сначала заметим, что справедливо соотношение

$$|\lambda^q(\xi) - \lambda^q(\eta)| \le c|\xi - \eta|^q. \tag{5.26}$$

Действительно, пусть для определенности $\lambda(\xi) \ge \lambda(\eta)$. Тогда (5.26) следует из цепочки формул

$$\begin{aligned}\lambda^q(\xi) - \lambda^q(\eta) &= \lambda^q(\xi)\left(1 - \left(\frac{\lambda(\eta)}{\lambda(\xi)}\right)^q\right) \le \lambda^q(\xi)\left(1 - \frac{\lambda(\eta)}{\lambda(\xi)}\right) \\ &\le \lambda^{-1+q}(\xi)|\xi - \eta| \le c|\xi - \eta|^q \lambda^{-1+q}(\xi)(\lambda^{1-q}(\xi) + \lambda^{1-q}(\eta)) \le c|\xi - \eta|^q.\end{aligned}$$

Для любых двух положительных чисел выполнены неравенства $|a^s - b^s| \le c|a^q - b^q|\,|a^{s-q} + b^{s-q}|$. Полагая $a = \lambda(\xi)$, $b = \lambda(\eta)$, отсюда, учитывая (5.26), получим

$$|f_1(\xi, \eta)| \le c|\xi - \eta|^q(\lambda^{s+p-q}(\xi) + \lambda^p(\xi)\lambda^{s-p}(\eta)).$$

Рассматривая два случая, когда $|\xi| \le |\eta|$ или $|\eta| \le |\xi|$, из последнего неравенства будем иметь

$$|f_1(\xi, \eta)| \le c|\xi - \eta|^q(\lambda^{s+p-q}(\eta) + \lambda^{s+p-q}(\xi)). \tag{5.27}$$

Оценивая $\lambda^{s+p-q}(\xi)$ с помощью (5.5), придем к оценке (5.10) для функции $f_1$.

При доказательстве аналогичного утверждения для функции $f_2$ рассмотрим сначала случай, когда $|\xi| \le 2|\eta|$. Тогда $\lambda(\xi) \le 2\lambda(\eta)$, $\lambda(\xi - \eta) \le 3\lambda(\eta)$, поэтому

$$\lambda^p(\xi)\lambda^s(\xi - \eta) \le \lambda^q(\xi - \eta)\lambda^{s+p-q}(\eta). \tag{5.28}$$

Кроме того, из (5.27) вытекает неравенство

$$\lambda^p(\xi)|\lambda^s(\xi) - \lambda^s(\eta)| \le c\lambda^q(\xi - \eta)\lambda^{s+p-q}(\eta). \tag{5.29}$$

Если $|\xi| \ge 2|\eta|$, то $\lambda(\eta) \le c\lambda(\xi)$, и так как $|\xi - \eta| \ge |\eta|$, верна формула $\lambda(\eta) \le \lambda(\xi - \eta)$. Отсюда и из (5.5) имеем

$$\lambda^p(\xi)\lambda^s(\eta) \le \lambda^q(\xi - \eta)\lambda^{s+p-q}(\xi) \le c\lambda^q(\xi - \eta)(\lambda^{s+p-q}(\eta) + \lambda^{s+p-s'}(\eta)). \tag{5.30}$$

Здесь выбрали $s' \ge s + p - q$. Снова пользуясь (5.29), получим

$$\lambda^p(\xi)|\lambda^s(\xi) - \lambda^s(\eta)| \le c\lambda^q(\eta)\lambda^{s+p-q}(\xi) \le c\lambda^q(\xi - \eta)\lambda^{s+p-q}(\eta) + c\lambda^{s'}(\xi - \eta)\lambda^{s+p-s'}(\eta).$$

Последняя формула вместе с (5.30) доказывает оценку (5.10) для функции $f_2$ в предположении, что $s' \ge s + p - q$.

## § 6. Краевые задачи в полупространстве

Ниже будут установлены оценки решения первой краевой задачи в полупространстве для эллиптического уравнения второго порядка с указанием требований на гладкость коэффициентов оператора. Будем предполагать, что эллиптический оператор мало отличается от оператора с постоянными коэффициентами. Это требование не принципиально, однако позволит избежать серьезных технических трудностей, которые будут указаны ниже. При изложении материала не будем описывать классы функций, в которых ищется решение — полученные оценки указывают на пространство, и которым должны принадлежать краевые условия, правые части и соответственно решения.

Пусть эллиптический оператор $L$ задан равенством

$$LU = \sum_{i,j=1}^{n=1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}\frac{\partial U}{\partial x_j}\right); \quad B\vec{\xi}\cdot\vec{\xi} \geq c_0|\vec{\xi}|^2 \ (\vec{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}). \tag{6.1}$$

Здесь $B$ — матрица с элементами $b_{ij}$. Будем предполагать, что существует предел $\lim\limits_{|x|+|x_{n+1}|\to\infty} B(x, x_{n+1}) = \overset{\circ}{B}$, и положим

$$L_0U = \sum_{i_{ij=1}}^{n+1} \overset{\circ}{b}_{ij}\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j},$$

где $\overset{\circ}{b}_{ij}$ — элементы матрицы $\overset{\circ}{B}$. Отметим, что постоянная эллиптичности оператора $L_0$ не меньше постоянной $c_0$ из (6.1).

Условимся переменную $x_{n+1}$, поскольку она будет играть особую роль, обозначать через $y$. С другой стороны, все переменные, входящие в определение оператора $L$, равноправны. Поэтому там, где это удобно, сохраним обозначение $x_{n+1}$.

Пусть $\vec{q}_{n+1}$ — последний вектор канонического базиса в $\mathbb{R}^{n+1}$. Положим $\vec{e} = B\vec{q}_{n+1}$ и обозначим через $D_{\vec{e}}$ оператор дифференцирования вдоль вектора $\vec{e}$:

$$D_{\vec{e}}U = \vec{e}\cdot\vec{\nabla}_{n+1}U = \sum_{i=1}^{n+1} b_{i\,n+1}\frac{\partial U}{\partial x_i}.$$

Полезно ввести обозначения $\vec{\beta} = (b_{1\,n+1}, b_{2\,n+1}, \ldots, b_{n\,n+1})$, $\beta = b_{n+1\,n+1}$ и записать производную вдоль вектора $\vec{e}$ в виде

$$D_{\vec{e}}U = \beta\frac{\partial U}{\partial y} + \vec{\beta}\cdot\vec{\nabla}U, \quad \vec{e} = B\vec{q}_{n+1}. \tag{6.2}$$

Этот оператор будет играть ключевую роль в дальнейших исследованиях.

Рассмотрим краевую задачу

$$LU = f \text{ в } \Pi, \quad U(0) = u, \quad U(-\infty) = 0. \tag{6.3}$$

**Теорема 6.1.** *Пусть $U$ — решение задачи (6.3), $s$ — произвольное число и $\rho = \sup\limits_y \|B - \overset{\circ}{B}\|_{\sigma(s)}$. Справедлива оценка*

$$\|\vec{\nabla}_{n+1}U\|_{N^s} \leq \chi(\rho)(\|\vec{\nabla}u\|_{s-1/2} + \|\,|\vec{\nabla}|^{-1}f\|_{N^s}). \tag{6.4}$$

Замечание 6.1. Доказательство этой теоремы, как и следующей, проведем для случая, когда величина $\rho$ мала. Для доказательства общего случая достаточно применить стандартную схему вывода оценок решений уравнений эллиптического типа в соболевских пространствах [15]. Например, можно, как обычно принято при выводе оценок решений эллиптических уравнений, «заморозить» коэффициенты оператора $L$, получить локальные оценки решения и сконструировать из них глобальную оценку решения через данные задачи и младшую норму решения, а затем избавиться от младшей нормы. При этом нужно внимательно следить за требованием на гладкость решения. Основой такого подхода являются утверждения типа леммы 3.2 из [15]. Все это требует долгой и кропотливой работы, поэтому доказательство общего случая не приводится.

Предварим доказательство теоремы следующими простыми утверждениями.

**Предложение 6.1.** *Пусть $V$ — решение задачи $L_0V = 0$ в $\Pi$, $V(0) = u$, $V(-\infty) = 0$. Тогда для всех $s$ справедливы оценки*

$$\|\vec{\nabla}_{n+1}V\|_{N^s} \le c\|\vec{\nabla}u\|_{s-1/2}, \quad \|\vec{\nabla}_{n+1}V\|_{E^s} \le c\|\vec{\nabla}u\|_s. \tag{6.5}$$

Действительно, представим $V$ в виде суммы $V_0 + V_1$, где $V_0 = \exp\{y\Lambda\}u$, а $V_1$ — решение уравнения $L_0V_1 = -L_0V_0$ в $\Pi$ с краевым условием $V_1(0) = 0$. Легко проверить, что $\|V_0\|_{N^s} \le c\|\vec{\nabla}u\|_{s-1/2}$. Умножая уравнение для $V_1$ скалярно в $N^s$ на $V_1$ и интегрируя по частям, получим

$$c_0\|\vec{\nabla}_{n+1}V_1\|^2_{N^s} \le (\mathring{B}\nabla_{n+1}V_1, \vec{\nabla}_{n+1}V_1)_{N^s} = -(B_0\vec{\nabla}_{n+1}V_1, \vec{\nabla}_{n+1}V_0)_{N^s}$$

с постоянной $c_0$ из (6.1). Первое утверждение в (6.5) очевидно.

Для доказательства второго неравенства необходимо оценить $H^s$-норму $\vec{\nabla}_{n+1}V$ по сечениям, поскольку оценка $\vec{\nabla}_{n+1}V$ в пространстве $N^{s+1/2}$ уже есть. С этой целью воспользуемся формулой (1.3). Заметим, что $\|\,|\vec{\nabla}|^{1/2}\vec{\nabla}_{n+1}V\|_{N^s} \le \|\vec{\nabla}^{n+1}V\|_{N^{s+1/2}}$ и аналогично

$$\|\,|\vec{\nabla}|^{-1/2}\vec{\nabla}_{n+1}V_y\|_{N^s} \le \|\vec{\nabla}_{n+1}V\|_{N^s} + \|\,|\vec{\nabla}|^{-1/2}V_{yy}\|_{N^s}.$$

Выражая вторую производную по $y$ из уравнения $L_0V = 0$, получим

$$\|\,|\vec{\nabla}|^{1/2}\vec{\nabla}_{n+1}V_y\|_{N^s} \le c\|\nabla_{n+1}V\|_{N^{s+1/2}} \le c\|\vec{\nabla}u\|_s.$$

Формула (1.3) вместе с доказанными неравенствами приводит к оценке (6.5).

Доказательство теоремы 6.1. Будем искать решение задачи (6.3) в виде суммы $U_0 + U_1$, где $U_0$ — решение задачи (6.3) с краевым условием $U_0(0) = u$, а $U_1$ — решение задачи (6.3) с правой частью $f - L_0U_0$ и нулевым краевым условием $U_1(0) = 0$. Умножим обе части уравнения для $U_1$ на $U_1$ скалярно в $N^s$ и проинтегрируем по частям. В результате получим

$$\begin{aligned} c_0\|\vec{\nabla}_{n+1}U_1\|^2_{N^s} &\le (\mathring{B}\vec{\nabla}_{n+1}U_1, \vec{\nabla}_{n+1}U_1)_{N^s} \\ &= -((B - \mathring{B})\vec{\nabla}_{n+1}U_1, \vec{\nabla}_{n+1}U_1)_{N^s} + (\mathring{B}\nabla_{n+1}U_1, \vec{\nabla}_{n+1}U_0)_{N^s} - (f, U_1)_{N^s}. \end{aligned}$$

При малых $\rho$ нужная оценка $U$ следует из (1.2), (1.6) и (6.5).

**Теорема 6.2.** *Пусть $U$ — решение задачи* (6.3), $s \geq -\frac{1}{2}$ *и* $\rho = \|B - \overset{\circ}{B}\|_{E^{\sigma(s)}}$. *Справедливы оценки*

$$\|D_{\vec{\varepsilon}} U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s} + \|\nabla_{n+1} U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s} \leq \chi(\rho)(\|\vec{\nabla} u\|_s + \|\,|\vec{\nabla}|^{-1/2} f\|_{N^s}). \tag{6.6}$$

Доказательство проведем для малых $\rho$. Разобьем его на несколько частей.

1. Для любой функции $V$ и любых $s$ верны формулы

$$\|\vec{\nabla} V\|_{\overset{\circ}{E}{}^s} \leq \|\,|\vec{\nabla}|^{-1/2} \vec{\nabla}_{n+1} V\|_{N^s}. \tag{6.7}$$

Эти утверждения являются очевидным следствием определения нормы в пространстве $E^s$ и (1.3).

Введем для краткости записи обозначения

$$Y = \|\,|\vec{\nabla}|^{1/2} \vec{\nabla}_{n+1} U\|_{N^s}, \quad Y_0 = \|\vec{\nabla} u\|_s + \|\,|\vec{\nabla}^{-1/2} f\|_{N^s},$$

кроме того, будем считать, что все числа $\rho$ ниже в тексте доказательства теоремы не превосходят единицы.

2. Пусть $U_0$ — решение задачи (6.5) с краевым условием $U_0(0)$ и $F = f - (L - L_0) U_0$. Тогда для любой функции $V$, равной нулю при $y = 0$, верно соотношение

$$|(F, |\vec{\nabla}| V)_{N^s}| \leq c Y_0 \|\,|\vec{\nabla}|^{1/2} \vec{\nabla}_{n+1} V\|_{N^s} \quad (s \geq -1/2). \tag{6.8}$$

Действительно, интегрированием по частям устанавливается равенство

$$(F, |\vec{\nabla}| V)_{N^s} = (|\vec{\nabla}|^{-1/2} f, |\vec{\nabla}|^{3/2} V)_{N^s} + (|\vec{\nabla}|^{1/2} (B - \overset{\circ}{B}) \vec{\nabla}_{n+1} U_0, |\vec{\nabla}|^{1/2} \vec{\nabla}_{n+1} V)_{N^s}.$$

Из этой формулы следует (6.8), если учесть, что

$$\|(B - \overset{\circ}{B}) \nabla_{n+1} U_0\|_{N^{s+1/2}} \leq c\rho \|\nabla_{n+1} U_0\|_{E^s} \leq c \|\vec{\nabla} u\|_s$$

согласно (1.7) и (6.5).

3. Пусть $U$ — решение задачи (6.3). Тогда

$$\|\,|\vec{\nabla}|^{1/2} \vec{\nabla}_{n+1} U\|_{N^s} \leq c(Y_0 + \rho \|\vec{\nabla}_{n+1} U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s}). \tag{6.9}$$

В самом деле, пусть $U_0$, $F$ — функции, определенные в п. 2, и $V = U - U_0$. Тогда $V$ является решением уравнения (6.3) с функцией $F$ в правой части и нулевым граничным условием. Умножая уравнение для $V$ на $|\vec{\nabla}| V$ скалярно в $N^s$ и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} c_0 \|\,|\vec{\nabla}|^{1/2} \vec{\nabla}_{n+1} V\|^2_{N^s} &\leq (|\vec{\nabla}|^{1/2} (\overset{\circ}{B} \vec{\nabla}_{n+1} V), |\vec{\nabla}|^{1/2} \nabla_{n+1} V)_{N^s} \\ &= -(|\vec{\nabla}|^{1/2} (B - \overset{\circ}{B}) \vec{\nabla}_{n+1} V, |\vec{\nabla}|^{1/2} \vec{\nabla}_{n+1} V)_{N^s} + (F, |\vec{\nabla}| V)_{N^s}. \end{aligned}$$

Отсюда согласно (1.7) и (6.8) имеем

$$\|\,|\vec{\nabla}|^{1/2} \vec{\nabla}_{n+1} V\|_{N^s} \leq c(Y_0 + \rho \|\vec{\nabla}_{n+1} V\|_{\overset{\circ}{E}{}^s}).$$

Если вспомнить, что $U = U_0 + V$, то из этого неравенства и (6.5) вытекает оценка (6.9).

4. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда

$$\| |\vec\nabla|^{1/2} D_{\vec e} U\|_{N^s} \le c(Y_0 + \rho \|\nabla_{n+1} U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s}). \tag{6.10}$$

Действительно, это неравенство следует из определения оператора $D_{\vec e}$, представления $\vec e = \overset{\circ}{\vec e} + (\vec e - \overset{\circ}{\vec e})$, в котором $\overset{\circ}{\vec e} = \overset{\circ}{B} \vec q_{n+1}$, (1.7) и (6.9).

5. Пусть выполнены условия теоремы и $U$ — решение задачи (6.3). Справедлива оценка

$$\left\| |\vec\nabla|^{-1/2} \frac{\partial}{\partial y} D_{\vec e} U \right\|_{N^s} \le c(Y_0 + \rho \|\vec\nabla_{n+1} U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s}). \tag{6.11}$$

В самом деле, верно равенство $\frac{\partial}{\partial y} D_{\vec e} U = LU - L'U$, где

$$L'U = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (b_{ij} - \overset{\circ}{b}_{ij}) \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} \overset{\circ}{b}_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial x_j}.$$

Поскольку

$$\| |\vec\nabla|^{-1/2} L'U\|_{N^s} \le c \| |\vec\nabla|^{1/2} \vec\nabla_{n+1} U\|_{N^s} + c\rho \|\vec\nabla_{n+1} U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s}$$

в соответствии с (1.7), утверждение (6.11) вытекает из (6.9).

6. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда

$$\|D_{\vec e} U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s} \le c(Y_0 + \rho \|\vec\nabla_{n+1} U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s}). \tag{6.12}$$

В самом деле, из (1.3), (6.10) и (6.11) следует неравенство $\sup\limits_y \|D_{\vec e} U\|_s \le c(Y_0 + \|\vec\nabla_{n+1} U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s})$, которое вместе с (6.10) доказывает (6.12).

7. Пусть $U$ — решение задачи (6.3) и $s \ge -1/2$. Справедливо неравенство

$$\|\vec\nabla_{n+1} U\|_s \le \chi(\rho)(Y_0 + \rho \|\vec\nabla|_{n+1} U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s}). \tag{6.13}$$

В самом деле, из определения (6.2) производной вдоль вектора $\vec e$ имеем $U_y = \frac{1}{\beta}(D_{\vec e} U + \vec\beta \cdot \vec\nabla U)$, где $\beta \ge c_0$. Рассматривая выражения $1/\beta$ и $\vec\beta/\beta$ как нелинейные функции от элементов матрицы $B - \overset{\circ}{B}$, из (5.20) и замечания 1.2 получим оценку $\|U_y\|_s \le \chi(\rho)(\|D_{\vec e} U\|_s + \|\vec\nabla U\|_s)$. Нужный результат следует из (6.12), (6.7) и (6.9).

8. Пусть выполнены условия теоремы и величина $\rho = \|B - \overset{\circ}{B}\|_{E^{\sigma(s)}}$ мала. Тогда теорема 6.2 верна. В самом деле, из (6.9) и (6.13) следует неравенство $\|\vec\nabla_{n+1} U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s} \le \chi(\rho)(Y_0 + \rho \|\vec\nabla_{n+1} U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s})$, решение которого при малых $\rho$ дает оценку $\|\nabla_{n+1} U\|_{\overset{\circ}{E}{}^s} \le \chi(\rho) Y_0$. Ссылка на (6.12) завершает доказательство теоремы для малых $\rho$. О доказательстве теоремы для произвольных $\rho$ упомянуто в замечании 6.2.

**Следствие 6.2.1.** *Пусть $s \ge 0$ и $U$ — решение задачи* (6.3). *Тогда справедлива оценка* (6.4) *с* $\rho = \|B - \overset{\circ}{B}\|_{E^{\sigma(s-1/2)}}$.

В самом деле, если при доказательстве теоремы 6.1 сначала воспользоваться неравенством (1.7), а затем оценками (6.5) и (6.6), то получим

$$\|(B - \overset{\circ}{B}) \nabla_{n+1} U_1\|_{N^s} \le c\rho \|\vec\nabla_{n+1} U_1\|_{E^{s-1/2}} \le \chi(\rho)(\|\vec\nabla u\|_{s-1/2} + \| |\vec\nabla|^{-1/2} f\|_{N^{s-1/2}}).$$

Завершив доказательство теоремы, с учетом этой оценки придем к утверждению следствия.

Определим отображение $u \to U = S(u)$ и оператор $G : u \to Gu$ через решение краевой задачи:

$$LU = 0 \text{ в } \Pi, \; U(0) = u, \; U(-\infty) = 0; \quad Gu = D_{\vec{e}} Su|_{x_{n+1}=0}. \tag{6.14}$$

Кроме того, сопоставим оператору $G$ билинейное отображение $Q_G$ равенством

$$Q_G(u,v) = G(uv) - uGv - vGu. \tag{6.15}$$

**Теорема 6.3.** *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Оператор $G$ симметричен и положительно определен:*

$$(Gu,v) = (u,Gv), \quad (Gu,u) \ge c_0 \| \, |\vec{\nabla}|^{1/2} u\|^2 \tag{6.16}$$

*с постоянной эллиптичности $c_0$ из* (6.1).

2. *Пусть $s \ge -1/2$ и $\rho = \|B - \overset{\circ}{B}\|_{E^{\sigma(s)}}$. Верны оценки*

$$\|Gu\|_s \le \chi(\rho) \|\vec{\nabla} u\|_s. \tag{6.17}$$

3. *Пусть $n \ge 2$, $s \ge 1/2$ и $\rho = \|B - \overset{\circ}{B}\|_{E^{\sigma(s)}}$. Справедливы неравенства*

$$\|Q_G(u,v)\|_s \le \chi(\rho) \|\vec{\nabla} u\|_{\sigma(s-1/2)} \|\vec{\nabla} v\|_{s-1}. \tag{6.18}$$

Кроме того,

$$\|Q_G(u,v)\|_s \le \chi(\rho) \|\vec{\nabla} u\|_{\sigma(s-1/2)-1/2} \|\vec{\nabla} v\|_{s-1/2}. \tag{6.19}$$

Доказательство. Симметричность оператора $G$ очевидна, а его знакоопределенность получим из цепочки формул. Пусть $U = S(u)$. Тогда

$$\| \, |\vec{\nabla}|^{1/2} u\|^2 = 2(U_y, \vec{\nabla} U)_{N^0} \le \|\vec{\nabla}_{n+1} U\|^2_{N^0} \le \frac{1}{c_0} (B \vec{\nabla}_{n+1} U \vec{\nabla}_{n+1} U)_{N^0} = \frac{1}{c_0} (Gu, u).$$

Утверждение (6.17) — очевидное следствие теоремы 6.2. Для доказательства (6.18) положим

$$U = S(u), \quad V = S(v), \quad \Phi = S(uv) - UV, \quad F = -2B \vec{\nabla}_{n+1} U \cdot \vec{\nabla}_{n+1} V.$$

Очевидно, что $Q_G(u,v) = D_{\vec{e}} \Phi|_{x_{n+1}=0}$. С другой стороны, $L\Phi = F$ в $\Pi$ и $\Phi(0) = 0$. Поэтому для оценки $Q_G$ можем воспользоваться теоремой 6.2. Предварительно заметим, что согласно лемме 6.2

$$\| \, |\vec{\nabla}|^{-1/2} F\|_s \le \chi(\rho) (\|\vec{\nabla}_{n+1} U\|_1 \|\vec{\nabla}_{n+1} V\|_{s-1/2} + \|B \vec{\nabla}_{n+1} U \cdot \vec{\nabla}_{n+1} V\|_{s-1/2}) \tag{6.20}$$

для указанных $s$. Формула (1.4) и теоремы 6.1, 6.2 дают оценку

$$\| \, |\vec{\nabla}|^{-1/2} F\|_{N^s} \le \chi(\rho) \|\vec{\nabla} u\|_{\sigma(s-1/2)} \|\vec{\nabla} v\|_{s-1}.$$

Из этого неравенства и теоремы 6.2 следует утверждение (6.18).

Для вывода (6.19) оценим правую часть (6.20) несколько по-другому, пользуясь соотношением

$$\|B \vec{\nabla}_{n+1} U \cdot \vec{\nabla}_{n+1} V\|_{s-1/2} \le \chi(\rho) \|\vec{\nabla}_{n+1} U\|_{\sigma(s-1/2)} \|\vec{\nabla}_{n+1} V\|_{E^{s-1/2}}.$$

В результате получим, учитывая предыдущие рассуждения, формулу

$$\| \, |\vec{\nabla}|^{-1/2} F\|_{N^s} \le \chi(\rho) \|\vec{\nabla} u\|_{\sigma(s-1/2)-1/2} \|\vec{\nabla} v\|_{s-1/2}.$$

Утверждение (6.19) вытекает из теоремы 6.2.

## § 7. Дифференциальные свойства оператора Дирихле — Неймана и оператора $D$

В этом параграфе приведем и докажем некоторые свойства оператора Дирихле — Неймана и тесно связанного с ним оператора $D$, определенных формулами (2.2). Основное отличие «истинного» оператора Дирихле — Неймана от оператора $G$, заданного равенством (6.14), состоит в том, что известна его производная Фреше, определенная дифференциалом (2.5).

Сопоставим оператору $D$ билинейное отображение $Q_D$ равенством

$$Q_D(uv) = D(uv) - uDv - vDu = \frac{1}{J^2} Q_G(u, v). \tag{7.1}$$

Условимся через $Q_D(\vec{u}, v) = Q_D(u, \vec{v})$ обозначать вектор с координатами $Q_D(u_i; v)$ и положим $Q_D(\vec{u}, \vec{v}) = \sum\limits_i Q_D(u_i, v_i)$.

**Предложение 7.1.** *Справедливы равенства*

$$dDu = Ddu - DuDdh - Q_D(Du, dh), \tag{7.2}$$

$$\frac{1}{2} dQ_D(u, u) = -\frac{1}{2} Q_D(u, u) Ddh + Q_D(u, du) - uQ_D(u, dh). \tag{7.3}$$

Действительно, соотношение (7.2) есть просто другая запись равенства (2.6), а формула (7.3) проверяется прямыми вычислениями.

Для оценки нормы оператора $G : H^s \to H^{s-1}$ (соответственно оператора $D : H^s \to H^{s-1}$) зададим специальные параметризации области $\Omega$ (невырожденные отображения полупространства $\Pi$ на $\Omega$), в которых переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не меняются, а вместо $x_{n+1}$ вводится переменная $y$: $x_{n+1} = X(x, y)$, причем $X(x, 0) = h(x)$. Тем самым определяется параметризация $(x, x_{n+1}) = \eta(x, y)$ области $\Omega$. Она будет невырожденной, если выполнено неравенство $X_y \geq c_1 > 0$. В дальнейшем для обозначения переменной $y$ сохраним запись $x_{n+1}$ там, где это удобно.

**Теорема 7.1.** *Верны следующие утверждения.*

1. *Оператор $G$ симметричен и положительно определен:*

$$(Gu, v) = (u, Gv), \quad (G, u, u) \geq \| \, |\vec{\nabla}|^{1/2} u\|^2. \tag{7.4}$$

2. *Пусть $n \geq 2$, $s \geq -1/2$ и $\rho = \|\vec{\nabla} h\|_{\sigma(s)}$. Справедливы оценки*

$$\|Gu\|_s + \|Du\|_s \leq \chi(\rho) \|\vec{\nabla} u\|_s. \tag{7.5}$$

3. *Пусть билинейные операторы $Q_G$ и $Q_D$ определены равенствами* (6.15) *и* (7.1) *соответственно, $s \geq 1/2$ и $\rho = \|\vec{\nabla} h\|_{\sigma(s)}$. При $n \geq 2$ верны оценки*

$$\|Q_G(u, v)\|_s + \|Q_D(u, v)\|_s \leq \chi(\rho) \|\vec{\nabla} u\|_{\sigma(s-1)} \|\vec{\nabla} v\|_{s-1}. \tag{7.6}$$

*Кроме того,*

$$\|Q_G(u, v)\|_s + \|Q_D(u, v)\|_s \leq \chi(\rho) \|\vec{\nabla} u\|_{\sigma(s-1/2)-1/2} \|\vec{\nabla} v\|_{s-1/2}. \tag{7.7}$$

4. *Пусть выполнены условия предыдущего пункта. Тогда*

$$\|[G, u] v\|_s + \|[D, u] v\|_s \leq \chi(\rho) \|\vec{\nabla} u\|_{\sigma(s)} \|v\|_s. \tag{7.8}$$

5. *Операторы $G$ и $D$ удовлетворяют условию Липшица в следующем смысле. Пусть $\|\vec{\nabla} h\|_{\sigma(s)} \le \rho$ и $\|\vec{\nabla} h'\|_{\sigma(s)} \le \rho$. При $n \ge 2$ и $s \ge -1/2$ выполняются оценки*

$$\|(D(h) - D(h'))u\|_s + \|(G(h) - G(h'))u\|_s \le \chi(\rho)\|\vec{\nabla}(h - h')\|_{\sigma(s)}\|\vec{\nabla} u\|_s. \quad (7.9)$$

Доказательство. Симметричность оператора $G$ и его знакоопределенность хорошо известны. Отметим, что оценку (7.4) можно получить из (6.16), если при параметризации $\Omega$ положить $y = x_{n+1} + h(x)$.

Для доказательства остальных утверждений теоремы параметризуем $\Omega$, сделав замену $x_{n+1} = X(x, y) = \mu y + Y(x, y)$, где $Y = \exp(y\Lambda)h$. Очевидно, что $\|\vec{\nabla} Y\|_s \le c\|\vec{\nabla} h\|_s$, поэтому в соответствии с теоремой вложения Соболева $Xy \ge 1/2$, если выбрать $\mu \ge c\|\vec{\nabla} h\|_r$ с достаточно большой постоянной $c$. Согласно (1.11) и замечанию 1.2 для матрицы $B = B(\nabla_{n+1} Y)$ верна оценка $\|B - \overset{\circ}{B}\|_{E^s} \le \chi(\rho)\|\vec{\nabla} h\|_s$. Соотношения (7.5)–(7.7) следуют из теоремы 6.3, определения (2.2) оператора $D$ и равенства $Q_D(U, v) = J^{-2} Q_G(u, v)$.

Оценки (7.8) следуют из формулы $[G, u]v = Q_G(u, v) + vGu$, аналогичной формулы для оператора $D$, (7.5) и (7.6).

Поскольку, как видно из (2.5), (7.5) и (7.8), верна оценка

$$\left\|\frac{\partial}{\partial h} D v dh\right\|_s \le \chi(\rho)\|\vec{\nabla}\, dh\|_{\sigma(s)}\|\vec{\nabla} v\|_s,$$

липшицевость оператора $D$ следует из формулы конечных приращений [16]. Липшицевость оператора $G$ устанавливается с помощью определения (2.3) оператора $D$.

**Теорема 7.2.** *Пусть $n \ge 2$, $s > 1 + n/2$ и $\rho = \|\vec{\nabla} h\|_{s-1/2}$. Справедливы представления*

$$\Lambda^s D u = D\Lambda^s u - DuD\Lambda^s h + M_D u, \quad (7.10)$$

$$\Lambda^s Q_D(u, v) = -Q_D(u, v) D\Lambda^s h + F_D(u, v) \quad (7.11)$$

*и оценки*

$$\|M_D u\| \le \chi(\rho)\|\vec{\nabla} u\|_{s-1/2}, \quad (7.12)$$

$$\|F_D(u, v)\| \le \chi(\rho)\|\vec{\nabla} u\|_{s-1}\|\vec{\nabla} v\|_{s-1}. \quad (7.13)$$

Доказательство этой, по сути, центральной теоремы весьма громоздко. Предварим доказательство несколькими утверждениями. Произведем специальную параметризацию $\Omega$, сделав замену $x_{n+1} = y + Y(x, y)$, где $Y$ — решение уравнения $LY = 0$ в $\Pi$ с краевыми условиями $Y(0) = h$, $Y(-\infty) = 0$. Если вернуться в исходные переменные, то $Y$ станет гармонической в $\Omega$ функцией, равной $h$ на $\Gamma$, и существование $Y$ сомнений не вызывает. Чтобы избежать ненужных проблем, связанных с выяснением невырожденности параметризации, ограничимся случаем малых $\rho_0 = \|\vec{h}\|_r$. Согласно теореме 7.1 и определению оператора $D$

$$\|Y x_{n+1}|_{x_{n+1}=h}\|_r = \|Dh\|_r \le \rho_0 \gamma(\rho_0),$$

поэтому в соответствии с теоремой вложения Соболева

$$\|Y_{x_{n+1}}\|_{L_\infty(\sigma)} \le c\|Dh\|_r \le 1/2,$$

если величина $\rho_0$ достаточна мала. Тогда в силу принципа максимума $\|Y_{x_{n+1}}\|_{L_\infty(\Omega)} \le 1/2$, поэтому параметризация $\Omega$, определенная заменой $y = x_{n+1} + Y(x, x_{n+1})$, невырожденная.

Замечание 7.1. Такая параметризация $\Omega$ хороша тем, что для оператора $L$ справедливо представление [14]

$$LU = PU \quad \text{при } PU = \sum_{i,j=1}^{n+1} b_{ij} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}.$$

На этом факте основано относительно простое доказательство теоремы 7.2.

**Предложение 7.2.** *Пусть функция $Y = Y(x, y)$ определяет параметризацию $\Omega$ так, как это сделано выше, $s > n/2$ и $\rho = \|\vec{\nabla} h\|_s$. Верны неравенства*

$$\|\vec{\nabla}_{n+1} Y\|_{E^s} \le \rho\chi(\rho), \quad \|B - \overset{\circ}{B}\|_{E^s} \le \rho\chi(\rho). \tag{7.14}$$

Докажем эти утверждения для малых $\rho$. Так как

$$\|B - \overset{\circ}{B}\|_{E^s} \le \chi(\|\vec{\nabla}_{n+1} Y\|_{E^s}) \|\vec{\nabla}_{n+1} Y\|_{E^s}$$

согласно (1.12), из следствия 6.2.1 имеем неравенство

$$\|\vec{\nabla}_{n+1} Y\|_{E^s} \le \chi(\|\vec{\nabla}_{n+1} Y\|_{E^s})\rho,$$

решение которого при малых $\rho$ дают первую оценку в (7.14). Второе утверждение следует из написанной выше оценки $E^s$-нормы матрицы $B - \overset{\circ}{B}$.

**Лемма 7.1.** *Пусть оператор $S : u \to U = S(u)$ определен решением уравнения $LU = 0$ в $\Pi$ с краевыми условиями $U(0) = u$, $U(-\infty) = 0$. При $s > 1 + n/2$ верны оценки*

$$\|\vec{\nabla}_{n+1} S(u)\|_{\overset{\circ}{E}{}^s} \le \chi(\rho) \|\nabla \vec{u}\|_s, \tag{7.15}$$

$$\|\vec{\nabla}_{n+1} [\Lambda^s, S] u\|_{\overset{\circ}{E}} \le \chi(\rho) \|\vec{\nabla} u\|_{s-1/2}. \tag{7.16}$$

*Здесь и далее $\rho = \|\vec{\nabla} h\|_{s-1/2}$.*

Доказательство. Положим $V = S(\Lambda^p u)$ $(1/2 \le p \le s)$ и $\Phi = \Lambda^p U - V$. Учитывая замечание 7.1, нетрудно видеть, что $\Phi$ является решением краевой задачи

$$L\Phi = f \text{ в } \Pi, \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(-\infty) = 0, \text{ где } f = -\sum_{i,j=1}^{n+1} [\Lambda^p, b_{ij}] \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Выражая вторую производную по $x_{n+1}$ от $U$ из уравнения $PU = 0$, получим

$$f = \sum \left( [\Lambda^p, b_{ij}] - [\Lambda^p; \beta_{n+1\, n+1}] \frac{1}{\beta_{n+1\, n+1}} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i x_j}.$$

Здесь суммирование ведется по $i$ и $j$, одновременно не равным $n+1$. Поскольку $\|[\Lambda^p, \beta] w\|_{s-p} \le c\|\beta - \overset{\circ}{\beta}\|_s \|w\|_{s-1/2}$ для любых функций $\beta$ и $w$, из (5.15) и оценок норм композиции отображений следует оценка по сечениям $\|\,|\nabla|^{-1/2} f\|_{s-p} \le \rho\chi(\rho) \|\vec{\nabla}_{n+1} U\|_{s-1/2}$, поэтому $\|\,|\nabla|^{-1/2} f\|_{N^s} \le \rho\chi(\rho) \|\vec{\nabla} u\|_{s-1/2}$ согласно теореме 6.1. Следовательно, в соответствии с теоремой 6.2

$$\|\Phi\|_{\overset{\circ}{E}{}^{s-p}} \le \rho\chi(\rho) \|\vec{\nabla} u\|_{s-1/2}.$$

Положив здесь $p = s$, получим (7.16). Отсюда же при $p = 1/2$ и из равенства $\Lambda^{1/2}U = V + \Phi$, поскольку $\|V\|_{\overset{\circ}{E}^{s-1/2}} \le \chi(\rho)\|\vec{\nabla} u\|_s$ согласно теореме 6.2, вытекает (7.15).

Доказательство теоремы 7.2. Пусть функция $Y = S(h)$ определяет параметризацию $\Omega$, $X = y + Y$ и $U = S(u)$. Оператор $D$ в новых переменных определяется формулой $Du = \left(\frac{1}{X_y}U\right)\big|_{y=0}$. Прямым вычислением проверяется равенство

$$\Lambda^s\left(\frac{1}{X_y}U_y\right) = \frac{1}{X_y}(S(\Lambda^s u))_y - \frac{(S(u))_y}{X_y}((\Lambda^s h))_y + MU \tag{7.17}$$

с оператором $M$, заданным формулой

$$MU = \frac{1}{X_y}\left(Q_s\left(Y_y, \frac{1}{X_y}U_y\right) + ([\Lambda^s, S]u)_y + \frac{U_y}{X_y}([\Lambda^s, S]h)_y\right). \tag{7.18}$$

Представление (7.10) получим из формулы (7.17), если в ней положим $y = 0$ и определим оператор $M_D$ равенством $M_D u = MS(u)|_{y=0}$.

На основании теоремы 6.2 можно утверждать, что $\|U_y\|_s \le \chi(\rho)\|\nabla u\|_s$ для всех $y$. Оценивая первое слагаемое в правой части формулы (7.18) с помощью неравенства (5.26), а два остальных — с помощью неравенства (7.15) и учитывая (7.13), для всех $y$ получим оценку $\|MU\|$ через правую часть (7.12). Тем самым утверждение (7.10) доказано.

Положим $U = S(u)$, $V = S(v)$ и $\Phi = S(uv) - UV$, так что $Q_D(u, v) = \left(\frac{1}{X_y}\Phi_y\right)_{y=0}$. Пусть $f = 2B\vec{\nabla}_{n+1}U \cdot \nabla_{n+1}V$. Из утверждений (1.9), (1.4), а также теорем 6.1 и 6.2 следует оценка

$$\| |\nabla|^{-1/2} f\|_{N^s} \le \chi(\rho)\|\vec{\nabla} u\|_{s-1}\|\nabla v\|_{s-1},$$

поэтому снова на основании теоремы 6.2

$$\|\Phi_y\|_s \le \chi(\rho)\|\vec{\nabla} u\|_{s-1}\|\nabla v\|_{s-1} \quad \text{для всех } y. \tag{7.19}$$

Несложными вычислениями проверяется равенство

$$\Lambda^s\left(\frac{\Phi_y}{X_y}\right) = -\frac{\Phi_y}{X_y^2}(S(\Lambda^s h))_y + F, \tag{7.20}$$

где

$$F = \Lambda^s\Phi_y - [\Lambda^s, \Phi_y]\frac{Y_y}{X_y} + \frac{\Phi_y}{X_y}Q_s\left(Y_y, \frac{Y_y}{X_y}\right) - \frac{\Phi_y}{X_y^2}([\Lambda^s, S]h)_y. \tag{7.21}$$

Представление (7.11) с отображением $F_D = F|_{y=0}$ следует из (7.7) и (7.21), если учесть оценки (5.21), (5.25) и (5.26).

Замечание 7.2. Здесь малость $\|\vec{\nabla} h\|_r$ существенна. Общий случай доказать сложнее. Один из способов доказательства теоремы 7.2 состоит в исправлении специальной параметризации области $\Omega$, при которой матрица $B$ на границе $y = 0$ имеет блочный вид. Такое ее свойство позволяет применить в доказательстве теоремы идеи работы [14] (с соответствующими поправками), реализация которых даст нужный результат.

## § 8. Дифференциальные свойства оператора $\vec{R}$

Изучим свойства оператора $\vec{R}$, заданного формулой (4.5).

**Лемма 8.1.** *При $s \geq -1/2$ справедливы оценки*

$$\|\vec{R}(h)v\|_s \leq \chi(\|\vec{\nabla}h\|_{\sigma(s)})\|v\|_s. \tag{8.1}$$

Доказательство. Сначала заметим, что норма оператора $|\vec{\nabla}|^{-1}G : L_2 \to L_2$ совпадает с нормой сопряженного оператора $G|\nabla|^{-1}$. Поэтому из теоремы 7.1 и определения (4.5) оператора $\vec{R}$ имеем оценку $\|\vec{R}v\| \leq \chi(\|\nabla h\|_r)\|v\|$. Кроме того, получим $\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{R}(h)v\right\|_{s-1} \leq \chi(\|\vec{\nabla}h\|_{\sigma(s)})\|v\|_s$ при $s \geq 1/2$ снова из теоремы 7.1. Далее, так как норма оператора $|\vec{\nabla}|^{-1}G : H^s \to H^s$ совпадает с нормой сопряженного относительно скалярного произведения в $L_2$ оператора $G|\nabla|^{-1} : H^{-s} \to H^{-s}$, оценка (8.1) при $0 \leq |s| \leq 1/2$ снова следует из теоремы 7.1.

**Лемма 8.2.** *Пусть $s \geq -1/2$ и $\rho = \|\vec{\nabla}h\|_{\sigma(s)}$. Справедливы оценки*

$$\left\|\frac{\partial \vec{R}v}{\partial h}\,dh\right\|_s \leq \chi(\rho)\|\vec{\nabla}v\|_{\sigma(s)}\|dh\|_s. \tag{8.2}$$

Доказательство. После несложных преобразований из определения оператора $\vec{R}$ и правила (2.5) дифференцирования оператора $G$ следует равенство

$$\frac{\partial \vec{R}v}{\partial h}\,dh = \vec{\nabla}v\,dh + \vec{\nabla}(-\Delta)^{-1}(-G(dhDv) + \operatorname{div}(dhDv\vec{\nabla}h)).$$

Рассуждая так же, как в лемме 8.1, придем к неравенству (8.2).

**Следствие 8.2.1.** *Пусть выполнены условия леммы* 8.2. *Тогда*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{R}v\right\|_s \leq \chi(\rho)\|\vec{\nabla}v\|_{\sigma(s)} \quad \text{для всех } i. \tag{8.3}$$

Действительно, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{R}v = \frac{\partial \vec{R}v}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x_i} + \vec{R}\frac{\partial v}{\partial x_i},$$

утверждение (8.3) следует из (8.1) и (8.2).

**Следствие 8.2.2.** *Пусть $s \geq -1/2$ и $\rho = \|\vec{\nabla}h\|_{\sigma(s)}$. Справедлива оценка*

$$\|\vec{R}v\|_{s+1} \leq \chi(\rho)\|v\|_{\sigma(s)+1}. \tag{8.4}$$

В самом деле, так как $\|f\|_s \leq c\|f\| + c\|\vec{\nabla}f\|_{s-1}$ для любой функции $f$, оценка (8.4) вытекает из (8.1) и (8.3).

**Лемма 8.3.** *Оператор $\vec{R}$ удовлетворяет условию Липшица в следующем смысле. Пусть $s \geq -1/2$, $\|\vec{\nabla}h\|_{\sigma(s)} \leq \rho$ и $\|\vec{\nabla}h'\|_{\sigma(s)} \leq \rho$. Тогда*

$$\|(\vec{R}(h) - \vec{R}(h')v\|_s \leq \chi(\rho)\|\vec{\nabla}v\|_{\sigma(s)}\|h - h'\|_s.$$

Доказательство следует из формулы конечных приращений [16] и оценки (8.2).

## § 9. Корректность начально-краевой задачи о волнах на воде

В этом параграфе будет доказана теорема 4.1. Всюду ниже будем считать, что

$$n \geq 2, \quad s > 1 + n/2 \quad \text{и} \quad r \leq s - 1, \tag{9.1}$$

где $r$ — число, входящее в определение (5.1) функции $\sigma$. При ограничениях (9.1) пространства $H^{s-1}$ являются банаховыми алгебрами и выполняются неравенства

$$\|[\Lambda^s, u]v\| \leq c\|u\|_s \|v\|_{s-1/2}, \tag{9.2}$$

$$\|Q_s(u,v)\| \leq c\|u\|_{s-1/2}\|v\|_{s-1/2}, \quad \|Q_s(u,v)\|_{1/2} \leq c\|u\|_s\|v\|_{s-1/2}, \tag{9.3}$$

которые совпадают с (5.12), (5.17) и (5.7).

Приведем свойства операторов $G$ и $D$, которые понадобятся в дальнейшем. Всюду ниже для краткости записи будем писать $\rho = \|\vec{\nabla} h\|_{s-1/2}$. Справедливы оценки

$$\|Dv\|_{s-1/2} \leq \chi(\rho)\|\vec{\nabla} v\|_s, \quad \|Gv\|_{1/2} \leq \chi(\rho)\|\vec{\nabla} v\|_{1/2}. \tag{9.4}$$

Кроме того,

$$\|Q_D(u,v)\|_{s-1/2} \leq \chi(\rho)\|u\|_{s-1/2}\|v\|_{s-1/2}. \tag{9.5}$$

Пусть, далее, $\vec{R}$ — оператор из (4.5). Из (8.1) следует оценка

$$\|\vec{R} v\|_s \leq \chi(\rho)\|v\|_s. \tag{9.6}$$

Один из приемов доказательства разрешимости сильно нелинейной системы уравнений состоит в сведении ее к квазилинейной системе уравнений при помощи процедуры дифференцирования. Поступим так же при изучении системы (4.4)–(4.6). Для краткости записи обозначим через

$$\frac{d}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \quad (\vec{u} = \vec{R}(h)v)$$

оператор полного дифференцирования по времени.

**Лемма 9.1.** *Пусть* $(h, v)$ *— решение системы уравнений* (4.4), (4.5),

$$H = \Lambda^s h, \quad V = \Lambda^s V - \vec{\nabla} h \cdot \Lambda^s \vec{u} \tag{9.7}$$

*и*

$$a = g(1 - Dh) - \frac{1}{2} Q_D(\vec{w}, \vec{w}), \quad \vec{w} = (\vec{R}(h)v, v). \tag{9.7$'$}$$

*Тогда выполняются равенства*

$$\frac{dH}{dt} = V + A(H,V), \quad \frac{1}{a}\frac{dV}{dt} = -GH + B(H,V). \tag{9.8}$$

*Справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|A(H,V)\|_{1/2} &\leq \chi(\|H\|_{1/2})\|H\|_{1/2}\|V\|, \\ \|B(H,V)\| &\leq \chi(\|H\|_{1/2})\|H\|_{1/2}\|V\|^2. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Замечание 9.1. Для любого вектора $\vec{w} = (\vec{u}, v)$ величина $V - \vec{\nabla} h \cdot \vec{u}$ есть проекция его на нормаль $J\vec{n}$ к $\Gamma$. Таким образом, мы сначала продифференцировали вектор скорости на свободной поверхности, а затем в качестве искомой величины выбрали проекцию продифференцированного вектора скорости на нормаль к $\Gamma$.

Замечание 9.2. Существует такой оператор $K(H)$, что

$$v = K(H)V, \quad \|v\|_s \le \varkappa(\|H\|)\|V\|. \tag{9.10}$$

Действительно, из определения (9.7) функции $V$, (9.6) и теоремы вложения Соболева следует оценка $\|v\|_s \le \|V\| + C\|\nabla h\|_{s-1}\|v\|_s$, из которой, в свою очередь, вытекает утверждение (9.10) при малых $\rho$. Доказательство общего случая несколько сложнее, поэтому опущено.

Замечание 9.3. Система (4.4)–(4.6) эквивалентна системе (9.8) с начальными данными

$$H = \Lambda^s h_0, \quad V = \Lambda^s v_0 - \vec{\nabla} h_0 \cdot \Lambda^s \vec{R}(h_0)v_0 \text{ при t=0}. \tag{9.11}$$

Это очевидно.

Замечание 9.4. Положительность функции $a$ играет ключевую роль при доказательстве корректности задачи (9.8), (9.11). Если $(h, \vec{u}, v)$ — ее решение, то функция $a$ выражается через градиент давления на свободной поверхности:

$$a = \frac{dv}{dt} + g = -\frac{1}{J}\frac{\partial p}{\partial \vec{n}}\bigg|_\Gamma .$$

Известно, что $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}}\big|_\Gamma < 0$. Но мы пока не имеем теоремы существования и не можем этим фактом воспользоваться.

Прежде чем доказывать лемму сформулируем

**Предложение 9.1.** *Справедлива оценка*

$$\|a - g\|_{s-1/2} \le \chi(\rho)\big(1 + \|v\|_s^2\big). \tag{9.12}$$

Действительно, это утверждение вытекает из первого неравенства в (9.4) и оценок (9.5), (9.6).

Доказательство леммы 9.1. Запишем систему уравнений (4.4), (4.5) и (4.8) в виде

$$\frac{dh}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = a - g, \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = -a\vec{\nabla} h.$$

Применяя оператор $\Lambda^s$ к обоим этим уравнениям и учитывая результаты теоремы 7.2, после простых, но довольно громоздких вычислений, получим уравнения (9.8) с отображениями

$$\begin{aligned} A &= -Q_s(\vec{u}, \vec{\nabla} h), \\ B &= \frac{1}{a}\left(-[\Lambda^s, \vec{u}] \cdot \vec{\nabla} v + \vec{\nabla} h \cdot ([\Lambda^s, \vec{u}] \cdot \vec{\nabla})\vec{u} + \sum_{i=1}^{n} \Lambda^s u_i \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \cdot \vec{\nabla} h\right) \\ &\quad -\left(\Lambda^s \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} - M_D h - \frac{1}{2}F_D(\vec{w}, \vec{w}) + Q_s(a - g, \vec{\nabla} h) \cdot \vec{\nabla} h\right). \end{aligned} \tag{9.13}$$

Если в правых частях этих формул везде подставить

$$v = K(H)V, \quad \vec{u} = \vec{R}(h)K(H)V, \quad h = \Lambda^{-s}H,$$

то получим операторы $A(H, V)$ и $B(H, V)$. Заметим, далее, что

$$\rho \le \|H\|_{1/2}, \quad \|\vec{u}\|_s \le \|\vec{R}(H)K(H)V\|_s \le \chi(\|H\|_{1/2})\|V\|. \tag{9.14}$$

Кроме того, из теоремы вложения Соболева имеем

$$\sup_x |\vec{\nabla} v| \le c\|\vec{\nabla} v\|_{s-1} \le c\|v\|_s \le c\chi(\|H\|_{1/2})\|V\|, \quad \sup_x |\vec{\nabla} h| \le c\|H\| \tag{9.15}$$

и аналогично для всех $i$

$$\sup_x |\vec{\nabla} u_i| \le c\|\vec{U}\|_s \le \chi(\|H\|_{1/2})\|V\|. \tag{9.16}$$

Оценка (9.9) для отображения $A$ вытекает из второго неравенства в (9.3) и (9.14). Оценка нормы отображения $B$ следует из (9.2), (9.12) , (9.16) и первого неравенства в (9.3).

Для доказательства теоремы необходимо получить оценку $H^{s-1}$-нормы функции $\frac{da}{dt}$, а также выяснить условия, гарантирующие оценку снизу функции $a$. Разобьем доказательство на несколько этапов.

Приведем нужные нам свойства операторов $D$ и $\vec{R}$, учитывающих ограничения (9.1). Пусть $u$ и $v$ — произвольные функции и билинейный оператор $Q_D$ определен равенством (7.1). Из результатов теоремы 7.1 следуют оценки

$$\|Q_D(u,v)\|_{s-1} \le \chi(\rho)\|u\|_s\|v\|_{s-1}, \tag{9.17}$$

$$\|Q_D(u,v)\|_{s-1/2} \le \chi(\rho)\|u\|_{s-1/2}\|v\|_{s-1/2}. \tag{9.18}$$

Кроме того,

$$\|[G,u]v\|_{s-1} + \|[D,u]v\|_{s-1} \le \chi(\rho)\|u\|_s\|v\|_{s-1}. \tag{9.19}$$

Пусть оператор $\vec{R}$ задан формулой (4.4). Тогда согласно (8.1) и (8.2)

$$\|\vec{R}v\|_{s-1} \le \chi(\rho)\|v\|_{s-1}, \quad \left\|\frac{\partial \vec{R}v}{\partial h}\, dh\right\|_{s-1} \le \varkappa(\rho)\|v\|_s\|dh\|_{s-1}. \tag{9.20}$$

Пусть, далее, функции $H$ и $V$ определены соотношениями (9.7). Поскольку верно равенство $v = K(h)V$, из замечания (9.2) имеем

$$\|\vec{u}\|_s \le \chi(\rho)\|V\|. \tag{9.21}$$

Справедливо неравенство

$$\|dv\|_{s-1} \le \chi(\rho)(\|H\|_{1/2})(\|dV\|_{-1}). \tag{9.22}$$

Действительно, из определения $V$ имеем

$$dV = \Lambda^s\, dv - \vec{\nabla} h \cdot \Lambda^s \vec{R}\, dv - \vec{\nabla}\, dh \cdot \Lambda^s \vec{R} v - \vec{\nabla} h \cdot \Lambda^s \frac{\partial \vec{R} v}{\partial h}\, dh. \tag{9.23}$$

Это равенство можно рассматривать как уравнение для $dv$. Из него, (5.2) и (9.20) следует неравенство

$$\|dv\|_{s-1} \le \rho\chi(\rho)\|dv\|_{s-1} + \chi(\rho)(\|dh\|_{s-1} + \|dV\|_{-1}),$$

решение которого при малых $\rho$ дает (9.22). Доказательство в общем случае значительно длиннее, поэтому опущено.

Замечание 9.5. Оценка (9.22) показывает, что уравнение (9.23) можно разрешить относительно $dv$ и записать $dv = F_0(dH, dV)$ и $H^{s-1}$-норма $F_0$ оценивается через правую часть (9.22). Очевидно, что отображение $F_0$ линейно по $dH$ и $dV$.

Формула (9.7$'$) вместе с (9.7) определяет отображение $(H,V) \to a(H,V)$, которое будем изучать.

**Лемма 9.2.** *Справедливо представление*

$$da = -D\,dh + F(dH, dV) \tag{9.24}$$

*с линейным оператором* $(dH, dV) \to F(dH, dV)$, *и верна оценка*

$$\|F(dH, dV\|_{s-1} \le \chi(\|\vec{\nabla} H\|_{-1/2})(\|\vec{\nabla} H\|_{-1/2} + \|V\|)(\|dV\|_{-1} + \|dH\|_{-1/2}). \tag{9.25}$$

Доказательство. Пусть сначала $\vec{w} = (\vec{u}, v)$ — произвольное векторное поле. Справедлива формула

$$\frac{1}{2}\,dQ_D(\vec{w}, \vec{w}) = -\frac{1}{2}Q_D(\vec{w}, \vec{w})D\,dh + F_1(d\vec{w}, dh), \tag{9.26}$$

в которой

$$F_1(dh, d\vec{w}) = -Q_p(\vec{w}, d\vec{w}) + Q_D(Q_D(\vec{w}, \vec{w}), dh) \\ + [D, \vec{w}] \cdot (D\vec{w}\,dh) - D\vec{w} \cdot [D, \vec{w}]\,dh - dh[D, \vec{w}] \cdot D\vec{w}. \tag{9.27}$$

Верна оценка

$$\|F_1(dh, d\vec{w})\|_{s-1} \le \chi(\rho)\|\vec{w}\|_s(\|d\vec{w}\|_{s-1} + \|\vec{w}\|_s\|dh\|_{s-1/2}). \tag{9.28}$$

Действительно, равенство (9.26) проверяется прямыми вычислениями с учетом правила дифференцирования (7.2) оператора $D$, а оценка (9.28) вытекает из (5.3) и (9.17)–(9.19). Отметим, что при оценке первого слагаемого в правой части (9.27) нужно воспользоваться неравенством (9.17), а при оценке второго слагаемого — два раза неравенством (9.18).

Пусть $\vec{u} = \vec{R}(h)v$ и отображение $a$ задано равенством (9.7′). Справедливо представление

$$da = -aD\,dh + F_1(dh, dv) \tag{9.29}$$

с линейным оператором $(dh, dv) \to F_1(dh, dV)$ и верна оценка

$$\|F_2(dh, dv)\|_{s-1} \le \chi(\rho)(\rho + \|v\|_s)(\|dh\|_{s-1/2} + \|dv\|_{s-1}). \tag{9.30}$$

В самом деле, из определения отображения $a$, (7.2) и (9.26) вытекает равенство

$$da = -aD\,dh + F_1(dh, d\vec{w}) + Q_D(Dh, dh). \tag{9.31}$$

Поскольку векторное поле $d\vec{w}$ имеет координаты $d\vec{u} = \frac{\partial \vec{R} v}{\partial h}\,dh + \vec{R}\,dv$ и $dv$, подстановка этих выражений в правую часть (9.31) определяет оператор $(dh, dv) \to F_2(dh, dv)$. Так как согласно (9.20)

$$\|d\vec{w}\|_{s-1} \le \chi(\rho)(\|v\|_s\|dh\|_{s-1} + \|dv\|_{s-1}),$$

композиция (9.28) и этой оценки вместе с (9.17) доказывает неравенство (9.30). Поскольку $dv = F_0(dH, dV)$ согласно замечанию 9.5, имеем представление (9.24) с отображением $F(dH, dV) = F_2(F_0(dH, dV), \Lambda^{-s}\,dH)$. Требуемая его оценка следует из (9.30) и замечания 9.5.

Пусть функции $h$ и $v$ зависят от параметра (времени) $t \in [0, T]$ и $d/dt = \partial/dt + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})$. Для краткости записи положим

$$\rho = \|\vec{\nabla} H\|_{-1/2}, \quad \theta = \left\|\frac{dH}{dt}\right\| + \|V\|, \quad \theta_* = \left\|\frac{dV}{dt}\right\|_{-1}$$

с функциями $H$ и $V$, заданными равенствами (9.7).

Рассмотрим отображение $(H, V) \to a(H, V)$, заданное равенствами (9.7) и (9.7′). Отметим, что из (9.12) следует неравенство

$$\|a - g\|_{s-1} \le \varkappa(\rho)(1 + \theta)^2. \tag{9.32}$$

**Лемма 9.3.** *Верна оценка*

$$\left\| \frac{da}{dt} \right\|_{s-1} \le \varkappa(\rho)(1+\theta)^2(\theta_* + \theta). \tag{9.33}$$

Доказательство. Поскольку отображение $(dH, dV) \to F(dH, dV)$ линейно, из (9.24) следует формула

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -aD\frac{\partial h}{\partial t} + F\left(\frac{\partial H}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

и аналогичные формулы имеют место для производных по $x_i$ от функции $a$. Поэтому можно записать равенство

$$\frac{da}{dt} = -aD\frac{dh}{dt} + F\left(\frac{dH}{dt}, \frac{dV}{dt}\right) - a[\vec{u}, D]\vec{\nabla}h \\ + \sum_{i=1}^{n} u_i F\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial x_i}\right) - F(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}H, \vec{u}\cdot\vec{\nabla}V).$$

Отсюда, применяя оценки (7.5), (9.25) и (9.19), получим

$$\left\| \frac{da}{dt} \right\|_{s-1} \le \varkappa(\rho)\left( \left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\|_{s} + (1+\theta)^2(\theta_* + \theta) \right).$$

Так как $\Lambda^s \frac{dh}{dt} = \frac{dH}{dt} + [\Lambda^s, \vec{u}]\vec{\nabla}h$, из оценок (9.19) и (9.21) следует неравенство

$$\left\| \frac{dh}{dt} \right\|_{s} \le \left\| \frac{dH}{dt} \right\| + \varkappa(\rho)\|V\| \le \varkappa(\rho)\theta.$$

Подставляя его в предыдущее неравенство, получим (9.33).

**Лемма 9.4.** *Верна оценка*

$$\left\| \left[\frac{d}{dt}, G\right]\varphi \right\|_{-1/2} \le \varkappa(\rho)\theta\|\varphi\|_{1/2}. \tag{9.34}$$

Доказательство следует из равенства

$$\left[\frac{d}{dt}, G\right]\varphi = -[G, \vec{u}]\cdot\vec{\nabla}\varphi + [\vec{G}, \vec{u}]\cdot(\vec{\nabla}hD\varphi) + \sum_{i=1}^{n}[\operatorname{div}, u_i]\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}(\vec{\nabla}\varphi - D\varphi\vec{\nabla}h)\right),$$

полученного из формулы дифференцирования оператора Дирихле — Неймана (2.5), а также оценок (7.8) и (9.21).

Рассмотрим функционал

$$E(H, V) = (H, H) + (GH, H) + ((1/a)V, V)$$

с пока произвольной функцией $a$, зависящей от времени и удовлетворяющей условию

$$\frac{1}{2}a_* \le a \le 2a_* \tag{9.35}$$

с положительной постоянной $a_*$. В пространстве $W^s = H^{s-1/2} \times H^s$ $(W^0 = W)$ введем норму равенством

$$\|H, V\|^2_{W^s} = \|H\|^2_{s+1/2} + \|V\|^2_s.$$

Поскольку оператор Дирихле — Неймана положительно определен (теорема 7.1), из определения функционала $E$ имеем

$$c\|H,V\|_W^2 = E(H,V) \le \varkappa(\rho)\|H,V\|_W \tag{9.36}$$

с постоянной, зависящей от $a_*$.

Символом $E'$ будем обозначать производную функционала $E$ по времени $t$. Прямыми вычислениями проверяется равенство

$$E'(H,V) = 2\left(\frac{dH}{dt}, H + GH\right) + 2\left(\frac{1}{a}\frac{dV}{dt}, V\right) + I(H,V), \tag{9.37}$$

в котором

$$I(H,V) = (H \operatorname{div}\vec{u}, H + GH) + \left(H, \left[\frac{d}{dt}, G\right]H\right) - \left(\frac{1}{a^2}\frac{da}{dt}V, V\right) + \left(\frac{1}{a}\operatorname{div}\vec{u}V, V\right).$$

Верна оценка

$$|I(H,V)| \le \chi(E)\left(1 + \left\|\frac{da}{dt}\right\|_{s-1}\right)E, \tag{9.38}$$

следующая из неравенств Шварца, (9.4), (9.21); (9.33) и (9.34).

Доказательство теоремы 4.1. Начнем с вывода априорной оценки решения задачи (4.4), (4.5). Пусть $H$ и $V$ — решения системы (9.8), (9.11) и $a = a(H,V)$. Предположим, что

$$\frac{1}{2}a_* \le a \le 2a_*, \quad \text{где } a_* = \inf_x a \text{ при } t = 0. \tag{9.39}$$

Тогда существует такое $T > 0$, что

$$\|H;V\|_W \le \chi(\|H_0\|)\|H_0, V_0\|_W \quad \text{для всех } t \in [0,T]. \tag{9.40}$$

В самом деле, из уравнений (9.9) вытекает оценка

$$\left\|\frac{dH}{dt}\right\|_{-1/2} + \left\|\frac{dV}{dt}\right\|_{-1} \le \varkappa(E)E^{1/2}.$$

Соответственно из (9.12) и (9.33) имеем

$$\|a - g\|_{s-1} + \left\|\frac{da}{dt}\right\|_{s-1} \le \chi(E)E^{1/2},$$

поэтому согласно (9.38)

$$|I(H,V)| \le \chi(E)E. \tag{9.41}$$

Из системы (9.8) и (9.37) следует дифференциальное тождество

$$E'(H,V) = 2(V + A(H,V), H) + 2(A(H,V), GH) + 2\left(\frac{1}{a}B(H,V), V\right) + I(H,V).$$

Пользуясь неравенством Шварца и оценками (9.9), (9.41), отсюда получим дифференциальное неравенство

$$E'(H,V) \le \varkappa(E)E, \quad E(H,V) = E_0(H_0,V_0) \text{ при } t = 0,$$

из которого и (9.36) вытекает следующее утверждение: существует такое $T > 0$, что

$$E(H, V) \leq 2E_0(H_0, V_0) \leq \chi(\|H_0\|_{1/2})\|H_0, V_0\|_W. \tag{9.42}$$

Тем самым априорная оценка решения задачи (4.4), (4.5) установлена.

Замечание 9.6. Существует такое $T > 0$, зависящее только от начальных данных $H_0$, $V_0$, что выполняется неравенство (9.39).

Действительно, $\left\|\frac{da}{dt}\right\|_{s-1} \leq c_1$ согласно (9.33) и (9.42) с постоянной, зависящей только от начальных данных $H_0$ и $V_0$. В соответствии с теоремой вложения Соболева функция $f = \frac{da}{dt}$ ограничена при каждом $t$: $|f| \leq cc_1$. Если выбрать $T < 1/(cc_1)$, то неравенство (9.39) следует из хорошо известных свойств транспортного уравнения $\frac{da}{dt} = f$.

Будем доказывать разрешимость задачи (9.8), (9.11) методом последовательных приближений. С этой целью определим последовательность функций

$$\vec{u}^m = \vec{R}(h^m)K(h^m)V^m, \quad a^m = a(H^m, V^m)$$

и положим $E^m = E(H^m, V^m)$ с функцией $a^m$ вместо $a$. Будем искать приближенные решения из системы линейных уравнений

$$\frac{\partial H^{m+1}}{\partial t} + (\vec{u}^m \cdot \vec{\nabla})H^{m+1} = V^{m+1} + A(H^m, V^m)$$
$$\times \frac{1}{a^m}\left(\frac{\partial V^{m+1}}{\partial t} + (\vec{u}^m \cdot \vec{\nabla})V^m\right) = -G(h^m)H^{m+1} + B(H^m, V^m)$$

с соответствующими начальными данными и положим $H^0 = H_0$, $V^0 = V_0$.

Действуя так же, как и при выводе априорной оценки (9.42), можно доказать следующее утверждение: существует такое $T > 0$, зависящее только от начальных данных, что для всех $t \in [0, T]$ верны оценки

$$\frac{1}{2}a_* \leq a^m \leq 2a_*, \quad \|H^m; V^m\| \leq c\|H_0; V_0\|.$$

Существование последовательных приближений доказывается методом Галёркина.

Сходимость последовательных приближений для малых времен основана на принципе сжатых отображений. Напомним, что отображения $h \to G(h)$, $h \to D(h)$ и $h \to \vec{R}(h)$ удовлетворяют условию Липшица (теорема 7.1 и лемма 8.1). Можно проверить, что все отображения, возникающие при выводе системы (9.8), также удовлетворяют условию Липшица с соответствующими оценками как композиция липшицевых отображений. Необходимо отметить, что последовательность приближенных решений $(H^m, V^m)$ сходится не в пространстве $W$, а в пространстве $W^{-1/2}$. Иначе говоря, последовательность приближенных решений $(h^m, v^m)$ сходится в пространстве $W^{s-1/2}$. Это создает определенные трудности при реализации изложенной выше программы доказательства существования решения задачи (4.4)–(4.6), поскольку для разности $(H^{m+1} - H^m, V^{m+1} - V^m)$ нужны энергетические оценки в пространстве $W^{-1/2}$, а оператор $G$ не является, вообще говоря, положительно определенным в пространстве $H^{-1/2}$. Эту трудность можно преодолеть, если в уравнении для разности двух последовательных приближений воспользоваться представлением

$$G = \Lambda^{1/2}G\Lambda^{-1/2} + [G, \Lambda^{1/2}]\Lambda^{-1/2},$$

а затем результатами теоремы 7.1.

Липшицевость отображений $A$ и $B$ в пространствах $H$ и $H^{-1/2}$ соответственно следует, как уже отмечалось выше, из липшицевости операторов $G$, $D$ и $\vec{R}$. Отметим, что метод последовательных приближений гарантирует единственность решения.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Овсянников Л. В.* Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука, 1967. С. 5–75.
2. *Налимов В. И.* Априорные оценки решений эллиптических уравнений в классе аналитических функций и их применение к задаче Коши — Пуассона // Докл. АН СССР. 1969. Т. 199, № 1. С. 45–49.
3. *Овсянников Л. В.* Плоская задача о неустановившемся движении жидкости со свободными границами // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1972. Т. 8. С. 22–26.
4. *Ovsyannikov L. V.* Non local Cauchy problems in fluid dynamics // Actes du Congr. intern. des mathématiques, Paris. Paris: Gauthier-Villars, 1971. P. 137–144.
5. *Овсянников Л. В.* К обоснованию теории мелкой воды со свободными границами // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1973. С. 104–125.
6. *Ovsyannikov L. V.* Cauchy problem in a scale of Banach spaces and its applications to the shallow water theory justification. Applications of the methods of functional analysis to the problems in mechanics // Joint. Symp., IUTAM/IMU, Marseille. Marseille, 1975. P. 426–437.
7. *Макаренко Н. И.* Обоснование трехмерной и двухслойной плоской мелкой воды // Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск, 1985. С. 98–210.
8. *Макаренко Н. И.* Второе длинноволновое приближение в задаче Коши — Пуассона // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1986. С. 56–72.
9. *Налимов В. И.* Задача Коши — Пуассона // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1974. С. 104–210.
10. *Wu S.* Well-posedness in Sobolev spaces of the full water waves problem in 3-D // J. Amer. Math. Soc. 1999. V. 12, N 2. P. 445–495.
11. *Lannes D.* Well-posedness of the water waves equations // J. Amer. Math. Soc. 2005. V. 18, N 3. P. 605–654.
12. *Alazand T., Burq N., Zuily C.* On the Cauchy problem for gravity water waves // arxiv:1212.0626 v1 [math.AP] 4 Dec. 2012, P1–87.
13. *Крейг В., Вейн К. Е.* Математические аспекты поверхностных волн на воде // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 3. С. 95–116.
14. *Налимов В. И.* Дифференциальные свойства оператора Дирихле — Неймана // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 2. С. 355–398.
15. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
16. *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир, 1972. Т. 1.


*Статья поступила 16 марта 2015 г.*

Налимов Виктор Иванович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090