Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 512.7

АБЕЛЕВ НОРМАЛЬНЫЙ ДЕЛИТЕЛЬ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

В. И. Матюхин

Аннотация. Изучаются абелевы нормальные делители разрешимых матричных групп.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.110

Ключевые слова: матричная группа, коммутативное кольцо, примитивная группа, разрешимая группа, нормальный делитель, неприводимая группа, импримитивная группа.

Введение. Речь пойдет о линейных группах над коммутативным евклидовым кольцом R. Если M — свободный n-членный R-модуль, то группу всех автоморфизмов модуля M обозначают через $G(M)$ или $GL(n,R)$ и называют *полной линейной группой* над R. $G(M)$ — подгруппа группы $GL(n,P)$, где P — поле отношений кольца R.

Общая структурная теория полной линейной группы над произвольным полем построена Бассом, теория же линейных групп над кольцами продолжает развиваться. При рассмотрении модулярных форм изучалась структура подгрупп специальной целочисленной группы (Бернсайд и др.), Клингенбергом изучалась структура нормальных делителей полной линейной группы над некоммутативным локальным кольцом. О. Литов выяснил строение коммутанта полной линейной группы над евклидовым кольцом.

Изучению разрешимых групп матриц над евклидовым кольцом была посвящена работа [1], обзоры в этом направлении даны в [2, с. 54–118; 3, с. 299–303].

В данной статье доказывается, что максимальный абелев нормальный делитель F максимальной примитивной разрешимой подгруппы G в $GL(n,R_m)$ тогда и только тогда совпадает со своим централизатором в G, когда ранг модуля $[F]_{R_m}$ равен n. Максимальный абелев нормальный делитель F максимальной неприводимой импримитивной разрешимой подгруппы G группы $GL(n,R)$ является прямым произведением нескольких экземпляров мультипликативной группы области целостности.

Предварительные замечания. Пользуясь стандартными определениями (см., например, [4, 5]), будем считать, что Γ — максимальная примитивная разрешимая подгруппа группы $G(M)$, у которой максимальный абелев нормальный делитель F является мультипликативной группой области целостности C; V — централизатор F в Γ; A/F — максимальный абелев нормальный делитель группы Γ/F, содержащийся в V/F.

Лемма 1. *Если Z' — центр R-оболочки $[A]$, то $Z' = [F]$.*

Доказательство. Так как $F \subset A$, то $[A]_R = [A]_{[F]}$. Любой элемент $c \in [A]$ представим в виде $c = h_1c_1 + h_2c_2 + \cdots + h_kc_k$, где $h_i \in F$, а $c_i \in A$ принадлежат различным смежным классам A по F. Если $c \in Z'$, то $ca = ac$ для любого $a \in A$. Элементы a и c_i с точностью до элементов из F перестановочны, поэтому $ac_ia^{-1} = \alpha_ic_i$, $\alpha_i \in F$. Тогда $h_1 \cdot (1-\alpha_1)c_1 + \cdots + h_k \cdot (1-\alpha_k)c_k = 0$, поэтому все α_i равны 1, так как $c_1, c_2, \ldots, c_k$ линейно независимы над $[F]$. Поэтому элементы c_i коммутируют с любым элементом a из A, т. е. $c_i \in F$, так как центр A равенF. Отсюда в разложении элемента C из центра $[A]$ индекс k равен 1, т. е. $c = h_1c_1$, $c \in F$. Лемма доказана.

Рассмотрим разрешимые подгруппы группы автоморфизмов свободного n-членного модуля над фактор-кольцом евклидова кольца по идеалу, образованному неразложимым элементом или его степенью.

Если p — неразложимый элемент кольца R, то естественный гомоморфизм

$$\gamma_p : R/(p^m) \to R/(p) \tag{1}$$

может быть продолжен (см. [6]) до гомоморфизма

$$\varphi_p : GL(n, R/(p^m) \to GL(n, R/(p)). \tag{2}$$

В [5] было доказано, что при $m > 1$ ядро гомоморфизма φ_p нильпотентно.

Лемма 2. *При гомоморфизме*

$$\omega_p : GL(n, R) \to GL(n, R/(p)) \tag{3}$$

максимальность примитивных разрешимых подгрупп группы $GL(n, R)$ не сохраняется.

Действительно, например, при $n = 2$ и $R = Z$ в $GL(2, Z)$ порядок конечной максимальной примитивной разрешимой подгруппы равен 12, а при $p = 3$ в $GL(2, Z_3)$, где $Z_3 = Z/(3)$, порядками таких групп могут быть лишь числа 8, 16, 48 (см. [7, с. 47]).

Покажем, что максимальная разрешимая подгруппа Γ группы $GL(n, R/(p))$ есть образ максимальной разрешимой подгруппы G группы $GL(n, R/(p^m))$ при гомоморфизме (2). Максимальность разрешимой группы G следует из нильпотентности ядра гомоморфизма φ_p (см. [5]).

Пусть G — максимальная примитивная неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, R_m)$, $m > 1$, такая, что $\varphi_p(G)$ — неприводимая примитивная подгруппа группы $GL(n, R/(p))$. Тогда по указанному выше $\varphi_p(G)$ — максимальная неприводимая примитивная разрешимая подгруппа в $GL(n, R/(p))$. Если F — максимальный абелев нормальный делитель группы G, V — его централизатор в G, A/F — максимальный абелев нормальный делитель группы G/F, содержащийся в V/F, то $F_p = \varphi_p(F)$ — максимальный абелев нормальный делитель группы $\varphi_p(G)$, а $V_p = \varphi_p(V)$ — его централизатор в $\varphi_p(G)$.

Обозначим $\varphi_p(A/F) = A_p/F_p$. Группа A_p/F_p будет максимальным абелевым нормальным делителем группы $\varphi_p(G)/\varphi_p(F)$, содержащимся в V_p/F_p.

Теорема 1. *$A : F = (nm^{-1})^2$, где $m = [F] : R_m$.*

Доказательство. Ясно, что индекс $A : F$ не превосходит ранга полного матричного кольца над $[F]$, поэтому

$$A : F \leq \frac{n^2}{m^2}. \tag{4}$$

При гомоморфизме φ_p линейно зависимые элементы группы A/F переходят в линейно зависимые элементы группы A_p/F_p. Но и линейно независимые элементы группы A/F могут переходить в линейно зависимые элементы при этом гомоморфизме. Поэтому

$$A : F \geq A_p : F_p = \frac{n^2}{m_1^2}, \tag{5}$$

где $m_1 = [F_p] : R/(p)$ (см. [7, с. 25]). В силу этих же соображений $m \geq m_1$, где $m = [F] : R_m$. Следовательно,

$$A : F \geq \frac{n^2}{m^2}. \tag{6}$$

Из (4) и (6) следует утверждение теоремы.

В силу следствия из теоремы 4 в [1] централизатор A в G совпадает с F, поэтому верна

Теорема 2. *Максимальный абелев нормальный делитель F максимальной примитивной разрешимой подгруппы G группы $GL(n, R_m)$ тогда и только тогда совпадает со своим централизатором в G, когда ранг модуля $[F]_{R_m}$ равен n.*

Из теоремы 1 и леммы 10 в [7] следует, что $nm^{-1} = v_1 v_2 \dots v_t$, где v_i — порядок элемента (a_i, b_i) системы образующих A, v_i делится на v_{i+1}; $a_i, b_i \in A$.

Группа A/F является конечной абелевой группой, поэтому она представима в виде прямого произведения $2t$ циклических групп. Следовательно, группа A/F определяется с точностью до изоморфизма разложением числа nm^{-1}.

Лемма 3. *Числа v_i в разложении nm^{-1} не имеют квадратных делителей.*

Доказательство. Предположим, что $v_i = p^{\alpha i} \cdot q_i$, где $(p, q_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots, t$. Можно считать, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \alpha > 1$, а $\alpha_{n+1} < \alpha$.

Образуем две пары элементов

$$\begin{gathered} c_i = a_i^{q_i},\ d_i = b_i^{q_i},\ i = 1, 2, \dots, t, \quad \text{и} \quad u_i = c_i^{p^{\alpha-1}} = a_i^{q_i p^{\alpha-1}}, \\ v_i = d_i^{p^{\alpha-1}} = b_i^{q_i p^{\alpha-1}},\ i = 1, 2, \dots, k. \end{gathered} \tag{7}$$

Группа $A_1 = (c_1)(d_1)\dots(c_t)(d_t)F$ будет нормальным делителем группы G, так как A_1/F — p-подгруппа Силова группы A/F.

Группа $A_2 = (u_1)(v_1)\dots(u_k)(v_k)F$ будет нормальным делителем группы G, потому что $g^{-1}u_i g = (g^{-1}c_i g)^{p^{\alpha-1}} \in A_2$ для $g \in G$. Более того, A_2 — абелев нормальный делитель группы G, ибо коммутант (u_i, v_i) равен $(u_i, v_i) = u_i v_i u_i^{-1} v_i^{-1} = (a_i b_i)^{q_i^2 \cdot p^{2\alpha-2}} = \varepsilon_i^{q_i^2 \cdot p^{2\alpha-2}} = 1$ (при $\alpha > 1$).

Отсюда ввиду того, что $F \neq A_2$, следует включение $F \subset A_2$, противоречащее максимальности.

Следствие. *Группа A/F является прямым произведением циклических групп простых порядков.*

Рассмотрим строение максимального абелева нормального делителя максимальной неприводимой импримитивной разрешимой подгруппы G группы $GL(n, R)$.

Теорема 3. *Максимальный абелев нормальный делитель F максимальной неприводимой импримитивной разрешимой подгруппы G группы $GL(n,R)$ является прямым произведением v экземпляров мультипликативной группы некоторой области целостности.*

Доказательство. По теореме 1 в [1] в свободном n-членном R-модуле M есть подмодуль $N \simeq M$, представимый прямой суммой инвариантных и неприводимых относительно F подмодулей N_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, v$; $j = 1, 2, \ldots, l$, одинаковой размерности. Прямые суммы $N_i = N_{i1} + N_{i2} + \cdots + N_{il}$ являются системами импримитивности группы G.

Возьмем такой n-членный подмодуль T модуля N, что из представимости $M \simeq T = T_{11} + \cdots + Tv_1 + \cdots + Tv_l$, где $T_{ij} = N_{ij} \cap T$, и из неприводимости подмодулей T_{ij} относительно $[F]$ следует $[F]n = T_{ij}$ для $n \in T_{ij}$.

Так как все подмодули T_{ij} имеют одинаковую размерность, размерность T_{ij} равна $\frac{n}{vl}$.

Обозначим через C_i совокупность всех преобразований, индуцируемых $[F]$ в $T_i = N_i \cap T$. Кольца C_i изоморфны. Пусть $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \ldots, \overline{F_v}$ — мультипликативные группы этих колец.

Выберем в $GL(N,R)$ подгруппы $F_1, F_2, \ldots, F_v$ с таким свойством: операторы группы F_i на T_i действуют как операторы $\overline{F_i}$, а на $\overline{T_j}$, где $j \neq i$, — тождественно. Из $g(T_i) = T_j$, $g \in G_T$, $g^{-1}F_i g = F_j$ следует $G_T F_1 F_2 \ldots Fv = F_1 F_2 \ldots Fv G_T$. Отсюда $F_1 F_2 \ldots F_v \subset G_T$. Группа F_T максимальна, поэтому $F_1 F_2 \ldots F_v \subseteq F_T$. С другой стороны, $F_T \subseteq F_1 F_2 \ldots Fv$. Тем самым $F_T = F_1 F_2 \ldots F_v$.

Если r — матрица перехода от M к T, то $G = r^{-1} G_T r$; $F = r^{-1} F_T r = r^{-1} F_1 r \cdot r^{-1} F_2 r \ldots r^{-1} F v r$.

Теорема доказана.

Заметим, что если Γ — примитивная подгруппа $GL(n,R)$, то Γ примитивна и как подгруппа $GL(n,P)$. Если Γ — неприводимая примитивная разрешимая подгруппа $GL(n,R)$ и F — максимальный абелев нормальный делитель, то $\Gamma : F \leq \rho(n)$. Любая примитивная разрешимая подгруппа группы $GL(n,R)$ обладает абелевым нормальным делителем конечного индекса, причем граница для индекса зависит только от n.

Замечание. Пусть n — нечетное число. Рассмотрим максимальные неприводимые примитивные разрешимые подгруппы Γ группы $GL(n,Q)$, где Q — поле рациональных чисел, у которых максимальный абелев нормальный делитель $F = \{\pm 1\}$. Если V — централизатор F в Γ и A/F — абелев нормальный делитель группы Γ/F, содержащийся в V/F, то из [7] следует, что $A = (a_1)(b_1) \ldots (a_t)(b_t) \cdot F$, где $(a_i, b_i) = \varepsilon_i$, $\varepsilon_i^{v_i} = 1$, $n = v_1 v_2 \ldots v_t$.

Но так как в Q нет первообразных корней нечетной степени из единицы, то в $GL(n,Q)$ нет неприводимых примитивных разрешимых подгрупп с $F = \{\pm 1\}$.

Легко видеть, что если в $GL(n,Q)$ есть неприводимые примитивные разрешимые подгруппы, то $n = 2^t$.

Пусть теперь Γ — неприводимая импримитивная разрешимая подгруппа $GL(p,Q)$, где p — простое нечетное число. Число систем импримитивности группы Γ может равняться либо 1, либо p. Так как в $GL(p,Q)$ нет неприводимых примитивных разрешимых подгрупп, в силу леммы 5 из [7] первый случай не может иметь места. В силу той же леммы не может реализоваться и второй случай: тогда у Γ максимальный абелев нормальный делитель был бы больше, чем $\{\pm 1\}$.

Итак, в $GL(p, Q)$ нет неприводимых разрешимых подгрупп с $F = \{\pm 1\}$.

Из отмеченного выше и того факта, что если Γ — неприводимая подгруппа $GL(n, R)$, то Γ неприводима и как подгруппа $GL(n, P)$ (см. [1]), следует, что и в $GL(p, Z)$ нет неприводимых разрешимых подгрупп, у которых максимальный абелев нормальный делитель совпадал бы с $\{\pm 1\}$.

Следовательно, если Γ — максимальная неприводимая примитивная разрешимая подгруппа группы $GL(p, Z)$, то она является конечным расширением мультипликативной группы расширения p-й степени кольца Z.

Поэтому в $GL(p, Z)$ нет конечных неприводимых примитивных разрешимых подгрупп. При $p = 3$ отсюда следует импримитивность федоровских групп движений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Супруненко Д. А., Матюхин В. И.* О разрешимых группах матриц над евклидовым кольцом // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. 1965. № 3. С. 5–9.
2. *Супруненко Д. А.* Группы матриц (Сер. Современная алгебра). М.: Наука, 1972.
3. *Математическая энциклопедия.* М.: Советская энциклопедия, 1982.
4. *Матюхин В. И.* Разрешимые линейные группы над евклидовым кольцом // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 6. С. 1379–1384.
5. *Супруненко Д. А.* Ядро одного гомоморфизма // Сиб. мат. журн. 1965. Т. 6, № 1. С. 199–206.
6. *Супруненко Д. А.* О гомоморфизме Минковского. Памяти Н. Г. Чеботарёва. Красноярск: КГУ, 1964.
7. *Супруненко Д. А.* Разрешимые и нильпотентные линейные группы. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1958.

Статья поступила 3 октября 2011 г., окончательный вариант — 11 февраля 2014 г.

Матюхин Валентин Иванович
Лукишская средняя школа,
пер. Лукишкю, 5, Вильнюс LT01108, Литва
markask@mail.ru