Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 517.518+517.54

МОДУЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С ВЕСОВЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ (p, q)–ИСКАЖЕНИЕМ

М. В. Трямкин

Аннотация. Получены аналоги неравенств Полецкого и Вяйсяля для отображений с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (p, q)-искажением без дополнительного предположения об $\mathscr{N}$-свойстве Лузина.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.616

Ключевые слова: отображение с весовым ограниченным (p, q)-искажением, функция Полецкого, модуль семейства кривых.

§ 1. Введение

Понятие модуля семейства кривых на плоскости было введено в 1950 г. Альфорсом и Бьерлингом [1], а затем распространено на многомерные пространства Фугледе [2] и Б. В. Шабатом [3]. На языке этого понятия было сформулировано одно из эквивалентных описаний квазиконформных отображений, в связи с чем метод модулей приобрел важное значение в работе с этим классом отображений, позволив найти альтернативный подход к их изучению. Необходимость в таком подходе была вызвана отсутствием в многомерных пространствах теоремы Римана.

В 1960-е годы Ю. Г. Решетняк начал систематическое исследование отображений с ограниченным искажением, представляющих собой неоднолистный аналог квазиконформных отображений (подробное изложение содержится в [4]). Пусть Ω — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Отображение $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если для почти всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство $|Df(x)|^n \leq KJ(x, f)$, где $K \in [1, \infty)$ — постоянная,

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

— матрица Якоби, $|Df(x)|$ и $J(x, f)$ — ее операторная норма и определитель соответственно.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00552), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2263.2014.1) и Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

Основополагающий топологический результат Ю. Г. Решетняка заключается в том, что всякое непостоянное отображение с ограниченным искажением непрерывно, открыто и дискретно (см. [4, гл. 2, § 6]).

Впервые метод модулей к исследованию отображений с ограниченным искажением применил Е. А. Полецкий в 1970 г. [5]. Опираясь на упомянутые топологические характеристики, Е. А. Полецкий с помощью процедуры поднятия путей установил свойства некоторого специального отображения, известного сегодня как функция Полецкого. Это позволило показать, что для отображений с ограниченным искажением модуль образа семейства кривых не превосходит модуля прообраза [5, теорема 1]. Последнее утверждение в наши дни называется *неравенством Полецкого.* В той же работе [5] получено некоторое улучшение этого неравенства в нормальных областях (см. [5, теорема 2]). Полезная интерпретация последнего была получена Ю. Вяйсяля [6, 3.1] и называется в литературе *неравенством Вяйсяля.* Немногим ранее были установлены аналогичные оценки для емкости (см. [7, 8]). Отметим, однако, что модульные неравенства суть более общие, чем соответствующие емкостные (см., например, [9, пример 1]).

Оценки для модуля и емкости играют ключевую роль в исследовании поведения отображения на границе, в теории распределения значений в духе Неванлинны (теоремы типа Лиувилля и Пикара, устранение особенностей) (см. [10]), в свя́зи дилатации с минимальной кратностью ветвления и др. Отметим также, что модульная техника нашла применение в метрических пространствах с мерой, что привело к рассмотрению так называемых пространств Левнера (см., например, [11]).

Метод модулей, как показывает ряд недавно вышедших работ (см., например, [12], а также [13–15]), продолжает оставаться основным инструментом в изучении различных обобщений отображений с ограниченным искажением. В [12] рассматриваются Q-гомеоморфизмы с функцией Q из различных классов (интегрируемые, с ограниченным средним и с ограниченным конечным колебанием), отображения с конечным искажением длины и с конечным искажением площади и для них устанавливаются результаты о дифференцируемости, поведении на границе, устранении особенностей, нормальных семействах и пр. В [13] установлены модульные и емкостные неравенства для отображений с конечным искажением при минимальных условиях регулярности в предположении об $\mathscr{N}$-свойстве Лузина на исходное отображение. В [14] аналогичные неравенства получены для отображений с конечным (p, q)-искажением длины. В [15] оценка на модуль доказана для некоторого специального класса отображений, обладающих следующими свойствами: открытость, дискретность, дифференцируемость почти всюду, $\mathscr{N}$- и $\mathscr{N}^{-1}$-свойства Лузина и так называемое свойство абсолютной непрерывности в обратном направлении.

Задача нашей работы — установить модульные неравенства для естественного обобщения класса отображений с ограниченным искажением без некоторых аналитических предположений, характерных для вывода результатов упомянутых выше работ. В настоящей статье основным является следующее

Определение [16]. Пусть $\theta, \sigma : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — локально суммируемые функции (называемые *весовыми*) такие, что $\theta > 0$, $\sigma > 0$ почти всюду. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с (θ, σ)-весовым ограниченным (p, q)-искажением*, $n - 1 < q \leq p < \infty$, если

1) f непрерывно, открыто и дискретно;

2) f принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$;

3) $J(x,f) \geq 0$ для почти всех $x \in \Omega$;

4) отображение f имеет *конечное искажение*, т. е. для почти всех $x \in \Omega$ из $J(x,f) = 0$ вытекает $Df(x) = 0$;

5) функция (θ,σ)-весового (p,q)-искажения

$$\Omega \ni x \mapsto \mathscr{K}_q^{\theta,\sigma}(x,f) = \begin{cases} \frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df(x)|}{\sigma^{\frac{1}{p}}(f(x))J(x,f)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } J(x,f) \neq 0, \\ 0, & \text{если } J(x,f) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

принадлежит классу $L_\varkappa(\Omega)$, где $\varkappa$ находится из условия $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\varkappa = \infty$ при $q = p$).

Через $K^{\theta,\sigma}_{q,p}(f;\Omega)$ обозначим величину $\left\|\mathscr{K}_q^{\theta,\sigma}(\cdot,f) \mid L_\varkappa(\Omega)\right\|$.

В этом определении наличие пункта 1 связано с тем, что при $q \in (n-1,n)$ отображение может не обладать требуемыми топологическими свойствами. Отметим, что при $\theta = \sigma \equiv 1$ и $p = q = n$ получаем отображения, введенные Ю. Г. Решетняком.

В [16] получены емкостные неравенства для введенного класса отображений без требования $\mathscr{N}$-свойства Лузина. Подчеркнем, что ранее модульные и емкостные неравенства устанавливались в предположении, что отображение обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, которое заключается в том, что образ множества меры нуль также имеет меру нуль. Это требование необходимо было для того, чтобы образ множества точек ветвления имел нулевую меру. В настоящей статье доказываем модульные неравенства без дополнительного предположения об $\mathscr{N}$-свойстве Лузина. Это оказывается возможным благодаря следующему замечательному факту, установленному в [17] (см. также [16, 18–20]): частные производные функции Полецкого обращаются в нуль почти всюду на образе множества точек ветвления. В § 3 остановимся на этом подробнее. Этот факт использовался в [16] для получения оценок на емкости. Отметим, что при $q \in (n-1,n)$ отображение f не обязательно обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, что продемонстрировано в [21].

Во всех наших последующих рассмотрениях отображение f имеет $(\theta,1)$-весовое (p,q)-искажение, т. е. $\sigma \equiv 1$.

§ 2. Предварительные сведения

2.1. В этом пункте дадим сводку определений и результатов, связанных с топологическими свойствами отображений.

Всюду в тексте символ Ω обозначает область (т. е. открытое связное множество) в пространстве $\mathbb{R}^n$, символ m_n — n-мерную меру Лебега в $\mathbb{R}^n$, m_1 — линейную меру Лебега в $\mathbb{R}$. Для области $U \subset \mathbb{R}^n$ запись $U \Subset \Omega$ означает, что множество U ограничено и $\overline{U} \subset \Omega$.

Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, $U \Subset \Omega$, $y \notin f(\partial U)$. Символом $\mu(y,f,U)$ будем обозначать *степень отображения f в точке y*. Подробную информацию об этом понятии можно найти, например, в [4, 2.1; 10, I.4]. Если $\mu(y,f,U) > 0$ для любой области $U \Subset \Omega$ и любой точки $y \in f(U) \setminus f(\partial U)$, то говорят, что отображение f *сохраняет ориентацию*.

Рассмотрим непрерывное открытое и дискретное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ и точку $x \in \Omega$. Существует область $V \Subset \Omega$ такая, что $x \in V$ и $\overline{V} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Если $V' \Subset \Omega$ — другая область с таким свойством, то можно показать (см.

[10, с. 18]), что $\mu(f(x), f, V) = \mu(f(x), f, V')$. Поэтому равенство $i(x, f) = \mu(f(x), f, V)$ корректно определяет величину $i(x, f)$, называемую *локальным индексом отображения* f *в точке* x.

Область $D \Subset \Omega$ называется *нормальной* для непрерывного открытого и дискретного отображения $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, если $f(\partial D) = \partial f(D)$. Если $x \in \Omega$ и D — нормальная область такая, что $D \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$, то D называется *нормальной окрестностью* точки x. Согласно [10, I.4.9] всякая точка $x \in \Omega$ имеет нормальную окрестность.

Отметим, что если D — нормальная область для отображения f, то $\mu(y, f, D)$ не зависит от $y \in f(D)$ (см. [10, с. 18]). Эту постоянную будем обозначать через $\mu(f, D)$.

Точка $x \in \Omega$ называется *точкой ветвления* непрерывного отображения $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, если f не является гомеоморфизмом ни в какой окрестности точки x. Множество всех точек ветвления отображения f обозначим символом B_f.

Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение и $U \subset \Omega$. *Функцией кратности* называется отображение $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto N(y, f, U) = \#\{f^{-1}(y) \cap U\}$. Обозначим также

$$N(f, U) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, U).$$

Предложение 1 [10, I.4.10]. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное, открытое и дискретное отображение, сохраняющее ориентацию. Тогда*

(1) *если $U \Subset \Omega$, то $N(y, f, U) \le \mu(y, f, U)$ для всех $y \notin f(\partial U)$ и $N(y, f, U) = \mu(y, f, U)$ для $y \notin f(\partial U \cup (U \cap B_f))$;*

(2) *если D — нормальная область, то $N(f, D) = \mu(f, D)$;*

(3) *если $A \subset \Omega$ — компактное множество, то $N(f, A) < \infty$;*

(4) *каждая точка $x \in \Omega$ имеет окрестность V такую, что если U — окрестность x и $U \subset V$, то $N(f, U) = i(x, f)$;*

(5) *$x \in B_f$ тогда и только тогда, когда $i(x, f) \ge 2$.*

2.2. Здесь приведем понятия и утверждения, необходимые для описания аналитических свойств отображений.

Пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Если существует функция $v_i \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, такая, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо равенство (см. [22])

$$\int\limits_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int\limits_\Omega v_i(x) \varphi(x)\, dx,$$

то v_i называется *обобщенной частной производной* функции u и обозначается через $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. *Обобщенным градиентом* ∇u называется набор $(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.

Функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$, имеющая в области Ω обобщенные частные производные по всем переменным, *принадлежит пространству Соболева* $W_p^1(\Omega)$, $p \ge 1$, если $u \in L_p(\Omega)$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_p(\Omega)$ для каждого $i = 1, \dots, n$.

Отображение $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W_p^1(\Omega)$ ($W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$), если все f_i принадлежат $W_p^1(\Omega)$ (все f_i принадлежат $W_p^1(D)$ для любой области $D \Subset \Omega$). Через $Df(x)$, $|Df(x)|$ и $J(x, f)$ обозначаем матрицу Якоби $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\dots,n}$, ее операторную норму $\sup\limits_{|h|=1} |Df(x)h|$ и якобиан $\det Df(x)$ соответственно.

Для $(n \times n)$-матрицы $M = (a_{ij})$ через $\operatorname{adj} M$ обозначаем $(n \times n)$-матрицу, транспонированную к матрице (A_{ij}), где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Введем проекцию $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, которая точке $x = (x_1, \dots, x_n)$ ставит в соответствие точку $\pi_j(x) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$. Обозначим $\bar{x}_j = \pi_j(x)$. Точку $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (\bar{x}_j, x_j)$. Говорят, что непрерывное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}(\Omega)$, если для любого $j = 1, \dots, n$ отображение $x_j \mapsto f(\bar{x}_j, x_j)$ при почти всех $\bar{x}_j \in \pi_j(\Omega)$ абсолютно непрерывно на любом отрезке $[a, b]$ таком, что $\pi_j(\Omega) \times [a, b] \subset \Omega$.

Известно (см. [23, 26.4]), что если $f \in \mathrm{ACL}(\Omega)$, то f имеет почти всюду в Ω обычные частные производные, которые будут борелевскими функциями.

Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}^p(\Omega)$, $p \geq 1$, если $f \in \mathrm{ACL}(\Omega)$ и все частные производные f принадлежат классу $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Предложение 2 [10, I.1.2]. *Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathrm{ACL}^p(\Omega)$ тогда и только тогда, когда f непрерывно и $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$. При этом обобщенные и обычные частные производные совпадают почти всюду.*

Нам понадобятся также следующие предложения.

Предложение 3 [24, гл. VI, § 3, теорема 1]. *Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$. Тогда*

$$\frac{d}{dx} \int\limits_a^x f(t)\, dt = f(x) \quad \text{почти всюду на } [a, b].$$

Точки, в которых это равенство выполнено, называются точками Лебега функции f.

Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *аппроксимативно дифференцируемым* в точке $x \in \Omega$, если существует линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\lim_{r \to 0} \frac{m_n(\{y \in B(x, r) : |f(y) - f(x) - L(y - x)| > \varepsilon\})}{r^n} = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Предложение 4 [20, лемма 1]. *Пусть функция $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, имеет аппроксимативную производную $\mathrm{ap}\,\psi'(t)$ почти всюду на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b |\,\mathrm{ap}\,\psi'(t)|\, dt < \infty$. Тогда функция $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна и для почти всех $t \in [a, b]$ ее обычная производная $\psi'(t)$ совпадает с $\mathrm{ap}\,\psi'(t)$.*

Формула замены переменной [25, 3.2.20] Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — измеримое отображение, аппроксимативно дифференцируемое почти всюду и обладающее $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Через $J(x, f)$ обозначим определитель матрицы Якоби, составленной из аппроксимативных частных производных. Тогда для всякого измеримого множества $A \subset \Omega$ и всякой неотрицательной измеримой функции $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функции $u(f(x))|J(x, f)|$, $u(y)N(y, f, A)$ измеримы, где полагаем $u(f(x))|J(x, f)| = 0$, если $u(f(x))$ не определено. Если одна из этих функций интегрируема, то такова и вторая, причем

$$\int\limits_A u(f(x))|J(x, f)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(y)N(y, f, A)\, dy.$$

Известно [26, 6.1.3, замечание (ii)], что отображение класса Соболева аппроксимативно дифференцируемо почти всюду, причем аппроксимативные и обобщенные частные производные совпадают почти всюду.

2.3. Этот пункт посвящен понятию модуля семейства кривых, которое обобщим нужным нам образом.

Кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$ — это непрерывное отображение $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, где I — промежуток в $\mathbb{R}$ (т. е. множество вида $\langle a, b\rangle$, где каждая из угловых скобок может быть круглой или квадратной, $a \le b$, $a, b \in \mathbb{R}$; допускаются также бесконечные промежутки). Кривая α называется *замкнутой* (*открытой*), если промежуток I компактен (открыт). Обозначим $|\alpha| = \alpha(I)$. Запись $\gamma' \subset \gamma$ будет означать, что кривая γ' есть сужение кривой γ на подынтервал или точку.

Если $\alpha : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — замкнутая кривая, то ее *длиной* назовем величину

$$\ell(\alpha) = \sup \sum_{i=1}^{l} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i+1})|, \tag{2}$$

где точная верхняя грань берется по всем конечным разбиениям $a = t_1 \le t_2 \le \dots \le t_l \le t_{l+1} = b$. Если кривая α не замкнута, то положим ее длину равной $\ell(\alpha) = \sup \ell(\alpha|_J)$, где супремум берется по всем замкнутым подынтервалам J интервала I.

Кривая $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ называется *спрямляемой*, если $\ell(\alpha) < \infty$. Кривая называется *локально спрямляемой*, если каждая ее замкнутая подкривая спрямляема.

Рассмотрим замкнутую кривую $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Предположим, что она спрямляема. Определим функцию $s_\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ равенством $s_\alpha(t) = \ell(\alpha|_{[a,t]})$. Для спрямляемой кривой α существует единственная кривая $\alpha^0 : [0, \ell(\alpha)] \to \mathbb{R}^n$, полученная из α монотонно возрастающей заменой параметра, такая, что $s_{\alpha^0}(t) = t$ и $\alpha = \alpha^0 \circ s_\alpha$ [23, 2.4] . Кривая α^0 называется *натуральной параметризацией* кривой α.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — борелевское множество и $\rho : A \to [0, \infty]$ — борелевская функция. Интеграл от ρ вдоль спрямляемой кривой $\alpha : [a, b] \to A$ определяется следующим образом:

$$\int_\alpha \rho\, ds = \int_0^{\ell(\alpha)} \rho(\alpha^0(t))\, dt,$$

где справа стоит обычный интеграл Лебега. Если кривая α абсолютно непрерывна, то [23, 4.1]

$$\int_\alpha \rho\, ds = \int_a^b \rho(\alpha(t))|\dot\alpha(t)|\, dt. \tag{3}$$

Для локально спрямляемой кривой $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ полагаем

$$\int_\alpha \rho\, ds = \sup_\beta \int_\beta \rho\, ds, \tag{4}$$

где супремум берется по всем замкнутым подкривым β кривой α.

Пусть Γ — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Борелевская функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для Γ, если

$$\int_\gamma \rho\, ds \ge 1 \tag{5}$$

для каждой локально спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma$. Совокупность всех допустимых функций обозначаем через $\operatorname{adm}\Gamma$. Для весовой функции $\omega : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ и $p \in [1,\infty)$ определим *ω-весовой p-модуль* семейства Γ формулой

$$\operatorname{mod}_p^\omega \Gamma = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p \omega \, dm_n.$$

Свойства весовой функции будем оговаривать отдельно (как минимум предполагается, что она локально суммируема и почти всюду $\omega > 0$). При $\omega \equiv 1$ получаем обычное определение p-модуля и вместо $\operatorname{mod}_p^1 \Gamma$ будем писать $\operatorname{mod}_p \Gamma$. Если $\operatorname{adm}\Gamma = \varnothing$ (этот случай реализуется только тогда, когда в семействе Γ есть хотя бы одна кривая, задающая постоянное отображение), то полагаем $\operatorname{mod}_p^\omega \Gamma = \infty$.

Если Γ — семейство кривых в области Ω и $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, то через $f(\Gamma)$ обозначаем семейство кривых $f \circ \gamma$, где $\gamma \in \Gamma$.

Замечание 1. Как следует из определения модуля, кривые, которые не являются локально спрямляемыми, можно не учитывать. Точнее, если Γ — семейство кривых и Γ_1 — семейство таких $\gamma \in \Gamma$, что γ локально спрямляема, то $\operatorname{mod}_p^\omega \Gamma = \operatorname{mod}_p^\omega \Gamma_1$. В связи с этим, допуская известную вольность, будем говорить, что семейство кривых, которые не являются локально спрямляемыми, имеет *нулевой модуль*.

Пусть α — спрямляемая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^n$. Отображение $g : |\alpha| \to \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на α*, если $g \circ \alpha^0$ абсолютно непрерывно на $[0, \ell(\alpha)]$.

Теорема Фугледе [2]. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса $\mathrm{ACL}^p(\Omega)$, $p \geq 1$, и Γ — семейство локально спрямляемых кривых в Ω такое, что каждая кривая имеет замкнутую подкривую, на которой f не абсолютно непрерывно. Тогда $\operatorname{mod}_p \Gamma = 0$.*

Из теоремы Фугледе и некоторых дополнительных соображений (см. [12, замечание 2.13]) можно вывести

Предложение 5. *Пусть функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$, принадлежащая классу $\mathrm{ACL}^p(\Omega)$, абсолютно непрерывна на спрямляемой кривой $\gamma : [a,b] \to \Omega$. Тогда*

$$|u(\gamma(a)) - u(\gamma(b))| \leq \int\limits_\gamma |\nabla u| \, ds.$$

§ 3. Аналог леммы Полецкого

В доказательстве модульных неравенств проводятся рассуждения, обосновывающие возможность параметризации кривой некоторым специальным образом. Впервые эти рассуждения были реализованы в лемме 6 из [5], которая в дальнейшем получила название леммы Полецкого. Нам потребуется ее аналог. Прежде чем его сформулировать, выясним содержание понятия абсолютной преднепрерывности, которое заключает в себе описание специального типа параметризации.

Предположим, что $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое дискретное отображение. Пусть $\beta : I_0 \to \mathbb{R}^n$ — замкнутая спрямляемая кривая и $\alpha : I \to \Omega$ — кривая такая, что $f \circ \alpha \subset \beta$, т. е. $I \subset I_0$. Если функция $s_\beta : I_0 \to [0, \ell(\beta)]$

постоянна на некотором интервале $J \subset I$, то и отображение β постоянно на J. В свою очередь, ввиду дискретности f отображение α также постоянно на J. Следовательно, существует единственное отображение $\alpha^* : s_\beta(I) \to \Omega$ такое, что $\alpha = \alpha^* \circ s_\beta|_I$. Легко видеть, что α^* непрерывно и $f \circ \alpha^* \subset \beta^0$. Кривая α^* называется *f-представителем кривой α* (*относительно* β), если $\beta = f \circ \alpha$. Предположим теперь, что $\beta = f \circ \alpha$. Отображение f называется *абсолютно преднепрерывным на* α, если α^* абсолютно непрерывно.

Приведем аналог леммы Полецкого.

Лемма 1. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (p, q)-искажением, $n - 1 < q \le p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Предположим, что Γ — семейство кривых в Ω такое, что для любой кривой $\gamma \in \Gamma$ выполнено следующее: кривая $f \circ \gamma$ локально спрямляема и γ имеет замкнутую подкривую α, на которой f не абсолютно преднепрерывно. Тогда $\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma) = 0$, где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$.*

В доказательстве этой леммы большое значение имеют свойства функции Полецкого, которая определяется следующим образом. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое дискретное отображение, сохраняющее ориентацию, $U \subset \Omega$ — нормальная область и $N = \mu(f, U)$. На множестве $V = f(U)$ определим отображение $g_U : V \to \mathbb{R}^n$, называемое функцией Полецкого, равенством

$$V \ni y \mapsto g_U(y) = \frac{1}{N} \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap U} i(x, f)x. \tag{6}$$

Необходимые нам свойства отображения (6) будут приведены в предложении 6, для формулировки которого нужно сделать следующее замечание. Поскольку отображение $f : \Omega \to \Omega' = f(\Omega)$ принадлежит классу Соболева, оно аппроксимативно дифференцируемо почти всюду. Следовательно (см., например, [27; 25, теорема 3.1.8]), существует борелевское множество $\Sigma \subset \Omega$, $m_n(\Sigma) = 0$, вне которого f обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Обозначим $Z = \{x \in \Omega \setminus \Sigma : J(x, f) = 0\}$. С точностью до множества меры нуль множество Z можно считать борелевским. Кроме того, $m_n(Z) = 0$. Также можно считать, что $B_f \subset Z \cup \Sigma$, так как $Df(x) = 0$ в точках $x \in B_f$, где $Df(x)$ существует.

Дополнение $\Omega \setminus \Sigma$ можно разложить на счетную совокупность дизъюнктных измеримых множеств F_k, $k \in \mathbb{N}$, таких, что $\bigcup F_k = \Omega \setminus \Sigma$ и отображение $f|_{F_k} : F_k \to \Omega'$ липшицево для всех $k \in \mathbb{N}$ (см. [27; 25, теорема 3.1.8]). Каждое множество $F_k \setminus Z$ представимо в виде объединения счетного семейства дизъюнктных измеримых множеств F_{km}, $m \in \mathbb{N}$, таких, что отображение $f|_{F_{km}} : F_{km} \to \Omega'$ билипшицево для всех $m \in \mathbb{N}$ [25, лемма 3.2.2]. Согласно теореме Радемахера [25, теорема 3.1.6] отображения $f|_{F_{km}} : F_{km} \to \Omega'$ дифференцируемы почти всюду на области определения, а в силу теорему Лебега о дифференцировании аддитивной функции [28, 29] множества F_{km} можно считать состоящими только из точек плотности. Переобозначим семейство дизъюнктных множеств $\{F_{km}\}$ как $\{E_l\}$. Получим разложение

$$\Omega = \Sigma \cup Z \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l, \tag{7}$$

в правой части которого все множества дизъюнктны. Ему соответствует разложение в образе:

$$\Omega' = Z' \cup \Sigma' \cup \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E'_l,$$

где $Z' = f(\Sigma)$, $\Sigma' = f(Z)$, $E'_l = f(E_l)$, причем $m_n(\Sigma') = 0$, а Z' может иметь положительную m_n-меру. Можно считать, что $f(B_f) \subset Z' \cup \Sigma'$.

Сформулируем свойства функции Полецкого.

Предложение 6 [17, теорема 1]. *Предположим, что непрерывное, открытое и дискретное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $q > n-1$, $J(x,f) \geq 0$ почти всюду и f имеет конечное коискажение:* $\operatorname{adj} Df = 0$ *почти всюду на множестве $Z = \{x \in \Omega : J(x,f) = 0\}$. Тогда*

1) *f сохраняет ориентацию;*

2) *отображение g_U, определенное равенством* (6), *непрерывно, принадлежит классу Соболева $W^1_1(V)$ и имеет конечное искажение, т. е. $Dg_U(y) = 0$ почти всюду на множестве нулей якобиана $\det Dg_U(y)$. Более того, $f((\Sigma \cup Z) \cap U) \subset \{y \in V : Dg_U(y) = 0\}$, в частности, $f(B_f \cap U) \subset \{y \in V : Dg_U(y) = 0\}$.*

Замечание 2. Отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением в силу конечности искажения имеет конечное коискажение, поэтому согласно предложению 6 сохраняет ориентацию.

Также нам потребуется

Предложение 7 [18, следствие 4]. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to \Omega'$ областей пространства $\mathbb{R}^n$ принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $n-1 \leq q \leq \infty$, и имеет конечное коискажение:* $\operatorname{adj} D\varphi = 0$ *почти всюду на множестве $Z = \{x \in \Omega : J(x,\varphi) = 0\}$. Тогда обратный гомеоморфизм φ^{-1} принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega')$ и имеет конечное искажение: $D\varphi^{-1}(y) = 0$ почти всюду на множестве $Z' = \{y \in \Omega' : J(y,\varphi^{-1}) = 0\}$.*

Доказательству леммы 1 предпошлем несколько утверждений.

Лемма 2. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением, $n-1 < q \leq p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Тогда отображение g_U, определенное равенством* (6), *принадлежит классу $\mathrm{ACL}^{p'}(V)$, где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$.*

Замечание 3. Это утверждение может быть получено как следствие более общей теоремы 4 из [16]. Тем не менее приведем непосредственное доказательство, так как его элементы потребуются нам в дальнейшем. Данное доказательство не повторяет рассуждений из [16], хотя и основано на сходных идеях.

Доказательство. Согласно предложению 6 отображение g_U непрерывно и $g_U \in W^1_1(V)$, следовательно, $g_U \in \mathrm{ACL}(V)$ в силу предложения 2. Осталось показать, что частные производные отображения g_U принадлежат классу $L_{p'}(V)$. Пусть $y_0 \in V' = V \setminus f(B_f \cap U)$. Тогда ввиду пп 1, 2 предложения 1 множество $f^{-1}(y_0) \cap U$ состоит из N точек $x_1, \dots, x_N$. Через $U_1, \dots, U_N$ обозначим непересекающиеся нормальные окрестности точек $x_1, \dots, x_N$. Отображения $f|_{U_j} : U_j \to f(U_j)$, $j = 1, \dots, N$, являются гомеоморфизмами, удовлетворяющими условию предложения 7. Тогда если возьмем область W такую, что $y_0 \ni W \subset f(U_1) \cap \dots \cap f(U_N)$, то получим обратные гомеоморфизмы $h_j : W \to f^{-1}(W) \cap U_j$ класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(W)$. Эти соображения позволяют сделать следующий вывод: если $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетный набор непересекающихся открытых шаров, покрывающих V' с точностью до множества меры нуль (существующий по теореме Витали (см., например, [26, 1.5.1, следствие 2])), то каждое множество $f^{-1}(B_i) \cap U$ имеет N компонент связности D_{ij}, $j = 1, \dots, N$, при этом возникают гомеоморфизмы $h_{ij} : B_i \to D_{ij}$, $j = 1, \dots, N$, класса $W^1_1(B_i)$. Таким образом, почти всюду в B_i определена матрица Якоби Dh_{ij}. Из (6) следует, что для $y \in B_i$

$$g_U(y) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(y).$$

Если $g_{s,U}$ — s-я координатная функция отображения g_U, то для почти всех $y \in B_i$ справедлива цепочка неравенств, где $k = 1, \dots, n$:

$$\left|\frac{\partial g_{s,U}}{\partial y_k}(y)\right|^{p'} \le |Dg_U(y)|^{p'} \le \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|Dh_{ij}(y)|\right)^{p'} \le \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|Dh_{ij}(y)|^{p'}.$$

На множестве $B_i \setminus (Z' \cup \Sigma')$ справедливы известные из алгебры соотношения

$$Dh_{ij}(y) = \frac{\operatorname{adj} Df(h_{ij}(y))}{J(h_{ij}(y), f)}, \quad |\operatorname{adj} Df(h_{ij}(y))| \le |Df(h_{ij}(y))|^{n-1}.$$

Используя их и формулу замены переменной, перейдем от интегрирования по $B_i \setminus (Z' \cup \Sigma')$ к интегрированию по $D_{ij} \setminus (Z \cup \Sigma) = h_{ij}(B_i) \setminus (Z \cup \Sigma)$:

$$\int\limits_{B_i\setminus(Z'\cup\Sigma')} |Dh_{ij}(y)|^{p'}\,dy = \int\limits_{B_i\setminus(Z'\cup\Sigma')} \frac{|\operatorname{adj} Df(h_{ij}(y))|^{p'}}{J(h_{ij}(y), f)^{p'}}\,dy \le \int\limits_{D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \frac{|Df(x)|^{p'(n-1)}}{J(x,f)^{p'}} J(x,f)\,dx. \quad (8)$$

Рассмотрим два случая.

Случай I: $q < p$. К последнему интегралу в (8) применим неравенство Гёльдера с показателями q'/p' и $q'/(q'-p')$, где $q' = q/(q-(n-1))$, предварительно умножив и поделив подынтегральное выражение на $\omega^{p'/q'}$:

$$\int\limits_{D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \frac{\omega^{p'/q'}(x)|Df(x)|^{p'(n-1)}}{\omega^{p'/q'}(x)J(x,f)^{p'}} J(x,f)\,dx \le \Biggl(\int\limits_{D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \omega(x)\,dx\Biggr)^{\frac{p'}{q'}} \Biggl(\int\limits_{D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \frac{|Df(x)|^{\frac{p'q'(n-1)}{q'-p'}}}{\omega^{\frac{p'}{q'-p'}}(x)J(x,f)^{\frac{(p'-1)q'}{q'-p'}}}\,dx\Biggr)^{\frac{q'-p'}{q'}}.$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\frac{p'q'(n-1)}{q'-p'} = \frac{pq}{p-q}, \quad \frac{p'}{q'-p'}\cdot\frac{-(n-1)}{q-(n-1)} = -\frac{p}{p-q}, \quad \frac{(p'-1)q'}{q'-p'} = \frac{q}{p-q}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{B_i\setminus(Z'\cup\Sigma')} |Dh_{ij}(y)|^{p'}\,dy \le \Biggl(\int\limits_{D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \omega(x)\,dx\Biggr)^{\frac{p'}{q'}} \Biggl(\int\limits_{D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \left(\frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df(x)|}{J(x,f)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{pq}{p-q}}\,dx\Biggr)^{\frac{q'-p'}{q'}}.$$

Далее, в силу предложения 6 почти всюду на $(Z'\cup\Sigma')\cap U$ частные производные g_U обращаются в нуль, значит, интеграл по V можно заменить интегралом по объединению множеств $B_i\setminus(Z'\cup\Sigma')$; применяя также неравенство Гёльдера для сумм с показателями q'/p' и $q'/(q'-p')$, вспоминая (1) и учитывая суммируемость ω, получаем

$$\int\limits_V \left|\frac{\partial g_{s,U}}{\partial y_k}(y)\right|^{p'} dy = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{B_i\setminus(Z'\cup\Sigma')} \left|\frac{\partial g_{s,U}}{\partial y_k}(y)\right|^{p'} dy$$

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{B_i\setminus(Z'\cup\Sigma')} |Dh_{ij}(y)|^{p'}\, dy$$

$$\leq \frac{1}{N}\Bigg(\sum_{i,j}\int\limits_{D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \omega(x)\,dx\Bigg)^{\frac{p'}{q'}} \Bigg(\sum_{i,j}\int\limits_{D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \left(\frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df(x)|}{J(x,f)^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{pq}{p-q}} dx\Bigg)^{\frac{q'-p'}{q'}}$$

$$= \frac{1}{N}\big\|\omega \mid L_1\big(\bigcup D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)\big)\big\|^{\frac{p'}{q'}} \|\mathscr{K}^{\theta,1}_{p,q}(\cdot,f)\mid L_{\frac{pq}{p-q}}(\cup D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma))\|^{\frac{pq}{p-q}\cdot\frac{q'-p'}{q'}}$$

$$\leq \frac{1}{N}\|\omega \mid L_1(U)\|^{\frac{p'}{q'}} K^{\theta,1}_{p,q}(f;U)^{p'(n-1)} < \infty.$$

Случай II: $p=q$. К последнему интегралу из (8) применим неравенство Гёльдера с показателями 1 и ∞, предварительно умножив и поделив подынтегральное выражение на ω:

$$\int\limits_{D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \frac{\omega(x)|Df(x)|^{p'(n-1)}}{\omega(x)J(x,f)^{p'}} J(x,f)\,dx$$

$$\leq \Bigg(\int\limits_{D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \omega(x)\,dx\Bigg) \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \frac{|Df(x)|^{p'(n-1)}}{\omega(x)J(x,f)^{p'-1}}.$$

Учитывая, что

$$\frac{p'-1}{p'(n-1)} = \frac{1}{p}, \quad -\frac{n-1}{q-(n-1)}\cdot\frac{1}{p'(n-1)} = -\frac{n-1}{p-(n-1)}\cdot\frac{1}{p'(n-1)} = -\frac{1}{p},$$

получаем

$$\int\limits_{B_i\setminus(Z'\cup\Sigma')} |Dh_{ij}(y)|^{p'}\, dy$$

$$\leq \Bigg(\int\limits_{D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \omega(x)\,dx\Bigg) \operatorname*{ess\,sup}_{x\in D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \left(\frac{\theta^{\frac{1}{p}}(x)|Df(x)|}{J(x,f)^{\frac{1}{p}}}\right)^{p'(n-1)}.$$

Принимая во внимание соотношения

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \left(\frac{\theta^{\frac{1}{p}}(x)|Df(x)|}{J(x,f)^{\frac{1}{p}}}\right)^{p'(n-1)}$$

$$\leq \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\cup D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)} \frac{\theta^{\frac{1}{p}}(x)|Df(x)|}{J(x,f)^{\frac{1}{p}}}\right)^{p'(n-1)}$$

$$\leq \left\|\mathscr{K}^{\theta,1}_{p,q}(\cdot,f)\mid L_\infty\big(\bigcup D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)\big)\right\|^{p'(n-1)} \leq \left\|\mathscr{K}^{\theta,1}_{p,q}(\cdot,f)\mid L_\infty(U)\right\|^{p'(n-1)},$$

а также предложение 6, выводим

$$\int\limits_V \left|\frac{\partial g_{s,U}}{\partial y_k}(y)\right|^{p'} dy = \sum_{i\in\mathbb{N}}\int\limits_{B_i\setminus(Z'\cup\Sigma')}\left|\frac{\partial g_{s,U}}{\partial y_k}(y)\right|^{p'} dy$$

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{B_i\setminus(Z'\cup\Sigma')}|Dh_{ij}(y)|^{p'}\,dy$$

$$\leq \frac{1}{N}\left\|\mathscr{K}^{\theta,1}_{p,q}(\cdot,f)\mid L_\infty(U)\right\|^{p'(n-1)}\int\limits_{\bigcup D_{ij}\setminus(Z\cup\Sigma)}\omega(x)\,dx$$

$$\leq \frac{1}{N}\|\omega\mid L_1(U)\|K^{\theta,1}_{p,q}(f;U)^{p'(n-1)}<\infty.$$

Лемма доказана.

Для того чтобы перейти к следующей лемме, фиксируем область $D \Subset \Omega$. Удалим из нее множество точек ветвления. Тогда для всякого $x \in D\setminus B_f$ найдется число $r(x)>0$ такое, что открытый шар $B(x,r(x))$ содержится в $D\setminus B_f$ и f инъективно на $B(x,r(x))$. В силу теоремы Безиковича (см., например, [26, 1.5.2, теорема 2]) в семействе $\{B(x,r(x)) : x\in D\setminus B_f\}$ найдется счетный набор шаров $\{B_j\}$ таких, что

$$D\setminus B_f\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}}B_j,\quad \sum_{j\in\mathbb{N}}\chi_{B_j}(x)\leq C(n),$$

где последнее неравенство выполняется для любой точки $x\in D\setminus B_f$, а постоянная $C(n)$ зависит только от размерности пространства.

Согласно предложению 7 обратные отображения $h_j=(f|_{B_j})^{-1} : f(B_j)\to B_j$ принадлежат классу Соболева $W^1_1(f(B_j))$ и имеют конечное искажение. Через A_j обозначим борелевское множество точек $y\in f(B_j)$, в которых определена матрица Якоби Dh_j. Поскольку h_j принадлежит классу Соболева, $m_n(f(B_j)\setminus A_j)=0$. Положив $Dh_j(y)=0$ в точках $y\in f(B_j)\setminus A_j$, получим борелевские функции $|Dh_j| : f(B_j)\to\mathbb{R}$. Определим борелевскую функцию $\rho_0=\sup\limits_{j\in\mathbb{N}}|Dh_j|\chi_{f(B_j)}$.

Положим $B^k_f=\{x\in D : i(x,f)=k\}$, $k\geq 2$. Каждая точка $x\in B^k_f$ обладает нормальной окрестностью $U\subset D$. Покроем множество B^k_f такими нормальными окрестностями U_{ki}, $i\in\mathbb{N}$, и обозначим через g_{ki} отображения $g_{U_{ki}}$, определенные формулой (6). Через G_{ki} обозначим борелевское множество точек $y\in f(U_{ki})$, в которых определена матрица Якоби Dg_{ki}. Поскольку g_{ki} принадлежит классу Соболева, $m_n(f(U_{ki})\setminus G_{ki})=0$. Положив $Dg_{ki}(y)=0$ в точках $y\in f(U_{ki})\setminus G_{ki}$, получим борелевские функции $|Dg_{ki}| : f(U_{ki})\to\mathbb{R}$. Определим борелевские функции $\eta_{ki}=|Dg_{ki}|\chi_{f(U_{ki})}$. Введем также борелевское множество

$$F=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}(f(B_j)\setminus A_j)\cup\bigcup_{\substack{k\geq 2,\\ i\in\mathbb{N}}}(f(U_{ki})\setminus G_{ki}).$$

Легко видеть, что $m_n(F)=0$.

Лемма 3 (ср. с [10, II.7.2]). *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (p, q)-искажением, $n - 1 < q \leq p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Через Γ_0 обозначим семейство замкнутых кривых α в области D таких, что либо кривая $f \circ \alpha$ неспрямляема, либо $f \circ \alpha$ спрямляема и по крайней мере одно из следующих условий неверно:*

1) $\int\limits_{f\circ\alpha} \chi_F \, ds = 0$;

2) $\int\limits_{f\circ\alpha} \rho_0 \, ds < \infty$;

3) *если β — замкнутая подкривая кривой α и $|\beta| \subset B_j$, то h_j абсолютно непрерывно на $f \circ \beta$;*

4) *если β — замкнутая подкривая кривой α и $|\beta| \subset U_{ki}$, то g_{ki} абсолютно непрерывно на $f \circ \beta$;*

5) *если β — замкнутая подкривая кривой α и $|\beta| \subset U_{ki}$, то*

$$\int\limits_{f\circ\beta} \eta_{ki} \, ds < \infty.$$

Тогда $\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma_0) = 0$, где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$.

Доказательство. Если семейство Γ_0 состоит из замкнутых кривых α таких, что кривые $f \circ \alpha$ неспрямляемы, то $\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma_0) = 0$ в силу замечания 1. Далее будем считать, что все кривые $f \circ \alpha$ спрямляемы. Через Γ_q, $q = 1, \dots, 5$, обозначим совокупность кривых $\alpha \in \Gamma_0$, для которых условие q) не выполняется. Если покажем, что $\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma_q) = 0$ для всех q, то отсюда будет следовать, что $\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma_0) = 0$.

1. Если $\alpha \in \Gamma_1$, то $f \circ \alpha$ — кривые такие, что $\int\limits_{f\circ\alpha} \chi_F \, ds > 0$. Определим борелевскую функцию $\tau : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, полагая $\tau(x) = \infty$, если $x \in F$, и $\tau(x) = 0$, если $x \notin F$. Тогда $\tau \in \operatorname{adm} f(\Gamma_1)$, поскольку $\int\limits_{f\circ\alpha} \tau \, ds = \infty$. Следовательно,

$$\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma_1) \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tau^{p'}(x) \, dx = \int\limits_{F} \tau^{p'}(x) \, dx = 0, \quad \text{так как } m_n(F) = 0.$$

2. Согласно неравенству Гёльдера с показателями p' и p'', $1/p' + 1/p'' = 1$, имеем (учтено, что характеристическая функция равна 1 или 0)

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |Dh_j(y)| \chi_{f(B_j)}(y) = \sum_{j\in\mathbb{N}} (|Dh_j(y)| \chi_{f(B_j)}(y) \cdot \chi_{f(B_j)}(y))$$
$$\leq \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} |Dh_j(y)|^{p'} \chi_{f(B_j)}(y) \Big)^{1/p'} \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{f(B_j)}(y) \Big)^{1/p''}$$
$$\leq (C(n))^{1/p''} \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} |Dh_j(y)|^{p'} \chi_{f(B_j)}(y) \Big)^{1/p'}.$$

Предложение 7 говорит о том, что $Dh_j = 0$ почти всюду на $Z' \cap f(B_j)$. Принимая во внимание полученное неравенство, определение функции ρ_0, конечнократность покрытия, а также что $m_n(\Sigma') = 0$, и проделав те же выкладки, что и в доказательстве леммы 2, получаем (знак интеграла и знак суммы переставлены по теореме Беппо Леви для рядов [24, гл. V, § 5, п. 5])

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_0^{p'} \, dm_n = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\sup_{j\in\mathbb{N}} |Dh_j(y)| \chi_{f(B_j)}(y))^{p'} \, dy \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}} |Dh_j(y)| \chi_{f(B_j)}(y) \Big)^{p'} dy$$

$$\leq (C(n))^{\frac{p'}{p''}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \int\limits_{f(B_j)\setminus(Z'\cup\Sigma')} |Dh_j(y)|^{p'}\, dy$$

$$\leq (C(n))^{\frac{p'}{p''}} C(n) \|\omega \mid L_1(D)\|^{\frac{p'}{q'}} K^{\theta,1}_{p,q}(f;D)^{p'(n-1)} < \infty.$$

В частности, $h_j \in \mathrm{ACL}^{p'}(f(B_j))$.

Если $\alpha \in \Gamma_2$, то $\int\limits_{f\circ\alpha} \rho_0\, ds = \infty$. Следовательно, $\rho/\nu \in \operatorname{adm} f(\Gamma_2)$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$, и, значит,

$$\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma_2) \leq \frac{1}{\nu^{p'}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_0^{p'}\, dm_n \quad \text{для всех } \nu \in \mathbb{N}.$$

Последнее неравенство означает, что $\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma_2) = 0$.

3. Теорема Фугледе и $h_j \in \mathrm{ACL}^{p'}(f(B_j))$ влекут равенство $\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma_3) = 0$.

4. Из теоремы Фугледе и леммы 2 следует, что $\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma_4) = 0$.

5. Из определения функции η_{ki} и леммы 2 получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_{ki}^{p'}\, dm_n = \int\limits_{f(U_{ki})} |Dg_{ki}(y)|^{p'}\, dy < \infty.$$

Если $\alpha \in \Gamma_5$ и β — замкнутая подкривая кривой α, $|\beta| \subset U_{ki}$, то $\int\limits_{f\circ\beta} \eta_{ki}\, ds = \infty$ и тем более $\int\limits_{f\circ\alpha} \eta_{ki}\, ds = \infty$. Следовательно, $\eta_{ki}/\nu \in \operatorname{adm} f(\Gamma_5)$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$, и, значит,

$$\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma_5) \leq \frac{1}{\nu^{p'}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_{ki}^{p'}\, dm_n \quad \text{для всех } \nu \in \mathbb{N},$$

откуда выводим, что $\operatorname{mod}_{p'} f(\Gamma_5) = 0$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 1. Пусть D — область, о которой шла речь выше, $\alpha : I_0 \to D$ — замкнутая кривая такая, что кривая $f \circ \alpha$ спрямляема и условия 1–5 из леммы 3 выполнены. Покажем, применяя предложение 4, что в таком случае отображение f абсолютно преднепрерывно на α, т. е. кривая $\alpha^* : I \to D$, где $I = s_{f\circ\alpha}(I_0)$, абсолютно непрерывна.

Заметим, что $f\circ\alpha^* = (f\circ\alpha)^0$. Таким образом, кривая $f\circ\alpha^*$ имеет натуральную параметризацию и, значит, липшицева. Поэтому интегрирование по этой кривой можно выполнять, используя формулу (3), в которой $|D(f \circ \alpha^*)(t)| = 1$ для почти всех $t \in I$.

Шаг I. Здесь покажем, что α^* обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Очевидно, достаточно показать, что каждая координатная функция α^*_r, $r = 1, \dots, n$, отображения $\alpha^* = (\alpha^*_1, \dots, \alpha^*_n)$ обладает этим свойством на I. Пусть $J \subset I$ и $m_1(J) = 0$. Установим, что $m_1(\alpha^*_r(J)) = 0$. Дизъюнктному разложению $I = (I\setminus\alpha^{*-1}(B_f))\cup\alpha^{*-1}(B_f)$ соответствует дизъюнктное разложение $J = J_1 \cup J_2$, где $J_1 \subset I \setminus \alpha^{*-1}(B_f)$, $J_2 \subset \alpha^{*-1}(B_f)$, $m_1(J_1) = m_1(J_2) = 0$.

Так как B_f — замкнутое множество, $\alpha^{*-1}(B_f)$ также замкнуто и, следовательно, множество $I \setminus \alpha^{*-1}(B_f)$ можно покрыть замкнутыми промежутками $\{I_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ с не пересекающимися в $I \setminus \alpha^{*-1}(B_f)$ внутренностями таким образом, что множество $\alpha^*(I_\mu)$ содержится в некотором шаре B_{j_μ}. Поскольку $\alpha^*|_{I_\mu} = h_{j_\mu} \circ f \circ \alpha^*|_{I_\mu}$ для всякого $\mu \in \mathbb{N}$ и условие 3 леммы 3 выполнено, функция $\alpha_r^*|_{I_\mu}$ абсолютно непрерывна для всех $r=1,\dots,n$ и $\mu\in\mathbb{N}$ и, значит, $m_1(\alpha_r^*(J_1))=0$.

Теперь перейдем к множеству $J_2\subset\alpha^{*-1}(B_f)$. Разложению

$$\alpha^{*-1}(B_f)=\bigcup_{k\geq 2}\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)$$

соответствует разложение

$$J_2=\bigcup_{k\geq 2}\bigcup_{i\in\mathbb{N}}J_{2,ki},$$

где $J_{2,ki}\subset\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)$, и $m_1(J_{2,ki})=0$ для всех $k\geq 2$, $i\in\mathbb{N}$. Пусть замкнутый промежуток $J'_{2,ki}\subset I$ таков, что $|\beta|\subset U_{ki}$, где $\beta=\alpha^*|_{J'_{2,ki}}$. Так как выполнено условие 4 леммы 3 и $J_{2,ki}\subset J'_{2,ki}$, то $m_1((g_{ki}\circ f\circ\alpha^*)(J_{2,ki}))=0$. Если $t\in\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)$, то $\alpha^*(t)=g_{ki}\circ f\circ\alpha^*(t)$. Таким образом, $m_1(\alpha_r^*(J_{2,ki}))=0$. Поскольку объединение счетного семейства множеств меры нуль тоже имеет меру нуль, $m_1(\alpha_r^*(J_2))=0$.

Окончательно

$$m_1(\alpha_r^*(J))=m_1(\alpha_r^*(J_1))+m_1(\alpha_r^*(J_2))=0.$$

Шаг II. Здесь установим один вспомогательный факт. Пусть замкнутый промежуток $J\subset I$ таков, что $|\beta|\subset U_{ki}$, где $\beta=\alpha^*|_J$. Так как свойство 4 леммы 3 выполнено, функция $g_{r,ki}\circ f\circ\beta$, где $g_{r,ki}$ — r-я координатная функция отображения g_{ki}, абсолютно непрерывна на J. Следовательно, $g_{r,ki}\circ f\circ\beta$ дифференцируема для m_1-почти всех точек интервала J. Как уже отмечали, если $t\in\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)$, то $\alpha_r^*(t)=g_{r,ki}\circ f\circ\alpha^*(t)$. Отсюда следует, что функция $\alpha_r^*:\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)\to\mathbb{R}$ аппроксимативно дифференцируема почти всюду на $\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)$, причем если $t_0\in\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)$ — точка плотности множества $\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)$ и точка дифференцируемости функции $g_{r,ki}\circ f\circ\alpha^*$, то $\operatorname{ap}\dot\alpha_r^*(t_0)=\frac{d}{dt}(g_{r,ki}\circ f\circ\alpha^*)(t_0)$. Докажем следующий факт: *аппроксимативная производная* $\operatorname{ap}\dot\alpha_r^*$ *функции* α_r^* *обращается в нуль на множестве* $\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)$ *почти всюду относительно меры* m_1.

Так как формулировка доказываемого факта содержит слова «почти всюду», случай, когда $m_1(\alpha^{*-1}(B_f))=0$, можно не рассматривать. Отметим, что в [10, с. 47, доказательство утверждения 5.1] доказательство проводится в предположении $m_1(\alpha^{*-1}(B_f))=0$, которое оказывается законным, так как в [10] отображение f обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Итак, рассмотрим случай $m_1(\alpha^{*-1}(B_f))>0$. Тогда для некоторых значений k и i имеем $m_1\big(\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)\big)>0$. Возьмем точку $t_0\in\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)$. Можно предполагать, что точка t_0 такова, что существует последовательность $\delta_l\to+0$ при $l\to\infty$ такая, что $t_0+\delta_l\in\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)$ при каждом $l\in\mathbb{N}$. В самом деле, если ни одна точка множества $\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)$ не удовлетворяет этому условию, то это множество состоит из изолированных точек, и поэтому $m_1\big(\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)\big)=0$. Можно также считать, что t_0 — точка дифференцируемости функции $g_{r,ki}\circ f\circ\alpha^*$ и точка плотности множества $\alpha^{*-1}\big(B_f^k\cap U_{ki}\big)$. Поскольку условие 1 леммы 3 выполнено, для m_1-почти всех $t\in J$ имеем $f(\alpha^*(t))\notin F$. Вспоминая определение множества F, получаем, что для m_1-почти всех $t\in J$ в точке $f(\alpha^*(t))$ определена матрица Якоби Dg_{ki}. Будем считать, что матрица Dg_{ki} определена в точке

$f(\alpha^*(t_0))$. Принимая во внимание условие 5 леммы 3, определение η_{ki}, формулу (3), а также то, что $|D(f\circ\alpha^*)(t)| = 1$ для почти всех $t\in J$, получаем

$$\int\limits_J |\nabla g_{r,ki}(f(\alpha^*(t)))|\,dt \le \int\limits_J |Dg_{ki}(f(\alpha^*(t)))|\,dt = \int\limits_{f\circ\beta} \eta_{ki}\,ds < \infty,$$

откуда следует, что функция $|\nabla g_{r,ki}(f(\alpha^*(t)))|$ интегрируема на J.

В силу предложения 3 можно считать, что t_0 — точка Лебега функции $|\nabla g_{r,ki}(f(\alpha^*(t)))|$. Определение производной, предложения 3 и 5, условие 4 леммы 3, формула (3) позволяют написать следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned}\operatorname{ap}\dot\alpha_r^*(t_0) = \frac{d}{dt}(g_{r,ki}\circ f\circ\alpha^*)(t_0) &= \lim_{l\to\infty}\frac{g_{r,ki}\circ f\circ\alpha^*(t_0+\delta_l) - g_{r,ki}\circ f\circ\alpha^*(t_0)}{\delta_l}\\ \le \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\delta_l}\int\limits_{(f\circ\alpha^*)|_{[t_0,t_0+\delta_l]}} |\nabla g_{r,ki}|\,ds &= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\delta_l}\int\limits_{t_0}^{t_0+\delta_l}|\nabla g_{r,ki}(f(\alpha^*(t)))|\,dt\\ &= |\nabla g_{r,ki}(f(\alpha^*(t_0)))| = 0,\end{aligned}$$

где последнее равенство выполняется в силу предложения 5: $Dg_{ki} = 0$ почти всюду на $f(B_f\cap U_{ki})$.

Шаг III. На этом шаге покажем, что модуль аппроксимативной производной $|\operatorname{ap}\dot\alpha_r^*|$ интегрируем на I. Отметим, что функция α_r^* аппроксимативно дифференцируема m_1-почти всюду на I. В самом деле, для каждого μ функция $\alpha_r^*|_{I_\mu}$ абсолютно непрерывна (см. шаг I) и, значит, дифференцируема почти всюду на I_μ (тем более аппроксимативно дифференцируема, причем $\operatorname{ap}\dot\alpha_r^* = \dot\alpha_r^*$ почти всюду на I_μ); на предыдущем шаге показано, что α_r^* аппроксимативно дифференцируема почти всюду на $\alpha^{*-1}(B_f)$. Согласно утверждению, установленному на шаге II, имеем

$$\int\limits_I |\operatorname{ap}\dot\alpha_r^*|\,dm_1 = \sum_{\mu\in\mathbb{N}}\int\limits_{I_\mu}|\dot\alpha_r^*|\,dm_1 \le \sum_{\mu\in\mathbb{N}}\int\limits_{I_\mu}|\dot\alpha^*|\,dm_1, \tag{9}$$

где промежутки I_μ те же, что и на шаге I.

Если кривая α^* спрямляема на промежутке I_μ (ниже покажем, что это действительно так), то согласно [30, теорема (8.4), п. (iv)] имеем

$$\int\limits_{I_\mu}|\dot\alpha^*|\,dm_1 \le \ell(\alpha^*|_{I_\mu}). \tag{10}$$

Установим оценку для величины $\ell(\alpha^*|_{I_\mu})$. Из определения (2), элементарного неравенства

$$\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2} \le |a_1|+\dots+|a_n|,$$

условия 1 леммы 3, которое означает, что для m_1-почти всех $t\in I_\mu$ точка $f\circ\alpha^*(t)$ лежит в $f(B_{j_\mu})$ и в ней определен Dh_{j_μ}, а также из предложения 5, условия 3 леммы 3, соотношения $\alpha^*|_{I_\mu} = h_{j_\mu}\circ f\circ\alpha^*|_{I_\mu}$, формулы (3) и верного для почти всех $t\in I$ равенства $|D(f\circ\alpha^*)(t)| = 1$ получаем (супремум берется по всевозможным разбиениям промежутка I_μ точками $t_1,\dots,t_{l+1}$)

$$\ell(\alpha^*|_{I_\mu}) = \sup\sum_{i=1}^{l}|\alpha^*(t_i)-\alpha^*(t_{i+1})| \le \sup\sum_{i=1}^{l}\sum_{r'=1}^{n}|\alpha_{r'}^*(t_i)-\alpha_{r'}^*(t_{i+1})|$$

$$\le \sup \sum_{i=1}^{l}\sum_{r'=1}^{n}\int\limits_{(f\circ\alpha^*)|_{[t_i,t_{i+1}]}} |\nabla h_{r',j_\mu}|\,ds = \sup\sum_{i=1}^{l}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\sum_{r'=1}^{n}|\nabla h_{r',j_\mu}(f(\alpha^*(t)))|\,dt$$

$$\le n\sup\sum_{i=1}^{l}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}|Dh_{j_\mu}(f(\alpha^*(t))|\,dt \le n\int\limits_{I_\mu}|Dh_{j_\mu}(f\circ\alpha^*)|\,dm_1.$$

С учетом полученного соотношения, а также используя (9), (10), условие 2 леммы 3 и определение функции ρ_0, выводим

$$\int\limits_{I}|\operatorname{ap}\dot\alpha_r^*|\,dm_1 \le n\sum_{\mu\in\mathbb{N}}\int\limits_{I_\mu}|Dh_{j_\mu}(f\circ\alpha^*)|\,dm_1 \le n\int\limits_{f\circ\alpha^*}\rho_0\,ds<\infty.$$

Шаг IV. Результаты шагов I и III вместе с предложением 4 говорят о том, что координатные функции α_r^*, $r=1,\dots,n$, а значит, и кривая α^* абсолютно непрерывны, т. е. если $f\circ\alpha^*$ спрямляема и условия 1–5 леммы 3 выполнены, то f абсолютно преднепрерывно на α.

Чтобы завершить доказательство леммы 1, представим область Ω в виде $\Omega=\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}}D_i$, где $D_i\Subset\Omega$, $i\in\mathbb{N}$. Через Γ_i обозначим семейство замкнутых кривых α в D_i таких, что $f\circ\alpha$ спрямляема и f не абсолютно преднепрерывно на α. В силу сказанного выше это означает, что хотя бы одно из условий 1–5 не выполнено, и согласно заключению леммы 3 получаем $\operatorname{mod}_{p'}f(\Gamma_i)=0$. Следовательно,

$$\operatorname{mod}_{p'}f(\Gamma)\le\operatorname{mod}_{p'}\bigcup_{i\in\mathbb{N}}f(\Gamma_i)\le\sum_{i\in\mathbb{N}}\operatorname{mod}_{p'}f(\Gamma_i)=0.$$

Лемма доказана.

§ 4. Модульные неравенства

Сформулируем аналог неравенства Полецкого (ср. с [5, теорема 1]).

Теорема 1. *Пусть $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta,1)$-весовым ограниченным (p,q)-искажением, $n-1<q\le p<\infty$, а весовая функция $\omega(x)=\theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Если Γ — семейство кривых в области Ω, то справедливо неравенство*

$$(\operatorname{mod}_{p'}f(\Gamma))^{1/p'}\le K_{p,q}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}\big(\operatorname{mod}^{\omega}_{q'}\Gamma\big)^{1/q'},\tag{11}$$

где $p'=\frac{p}{p-(n-1)}$, $q'=\frac{q}{q-(n-1)}$.

Доказательство. В разложении (7) каждое множество E_l можно представить в виде $E_l=E_l^\natural\cup E_l^0$, где $m_n\big(E_l^0\big)=0$, а в каждой точке множества $E_l^\natural$ билипшицево отображение $f_l=f|_{E_l^\natural}$ дифференцируемо. Отметим, что множества $E_l^\natural$ и E_l^0 борелевские. Обозначим $E^0=\bigcup E_l^0$, тогда $m_n(E^0)=0$ и, значит, $m_n(f(E^0))=0$, поскольку отображение f обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина вне множества Σ.

По функции $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$ построим борелевскую функцию $\tilde\rho:\Omega\to[0,\infty]$, положив

$$\tilde\rho(x)=\begin{cases}\frac{\rho(x)J(x,f)}{|\operatorname{adj}Df(x)|}, & \text{если } x\in\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}}E_l^\natural,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Определим также функцию $\hat{\rho} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ равенством

$$\hat{\rho}(y) = \chi_{f(\Omega \setminus E^0)}(y) \sup_{x \in f^{-1}(y) \cap \Omega \setminus E^0} \tilde{\rho}(x).$$

Легко видеть, что $\hat{\rho}(y) = \sup\limits_{l \in \mathbb{N}} \hat{\rho}_l(y)$, где

$$\hat{\rho}_l(y) = \begin{cases} \tilde{\rho}\big(f_l^{-1}(y)\big), & \text{если } y \in f\big(E_l^\natural\big), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{12}$$

Отметим, что функция $\hat{\rho}$ борелевская (см. [25, 2.3.2]).

Шаг I. Здесь покажем, что $\hat{\rho} \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$. Ввиду замечания 1 считаем, что для любой кривой $\gamma \in \Gamma$ кривая $f \circ \gamma$ локально спрямляема.

Пусть $\gamma \in \Gamma$ и α — замкнутая подкривая кривой γ. Тогда для некоторой области $D \Subset \Omega$ имеем $\alpha : I \to D$. Согласно лемме 1 можно считать, что отображение f абсолютно преднепрерывно на α. Через α^* обозначаем f-представитель кривой α.

Вспомним множество F из леммы 3 (мы также будем использовать, не оговаривая особо, обозначения из последних двух абзацев, расположенных перед формулировкой этой леммы). Обозначим $C = F \cup f(E^0) \cup f(Z)$, где Z — множество из разложения (7). Можно считать, что $\int\limits_{f \circ \alpha} \chi_C \, ds = 0$, поскольку p'-модуль семейства кривых, не удовлетворяющих этому условию, равен нулю, ибо $m_n(C) = 0$. Таким образом, предполагаем, что

$$\int\limits_J \chi_C(f \circ \alpha^*(t)) \, dt = 0, \quad \text{где } J = s_{f \circ \alpha}(I).$$

Следовательно, для почти всех $t \in J$ имеем

$$f \circ \alpha^*(t) \in \bigcup_{l \in \mathbb{N}} f\big(E_l^\natural\big) \cup f(\Sigma), \quad f \circ \alpha^*(t) \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j. \tag{13}$$

Положим $J = J_1 \cup J_2$, где $J_1 = \alpha^{*-1}(B_f)$, $J_2 = J \setminus J_1$. Пусть $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$. Возможны несколько случаев.

Случай I: $m_1(J_2 \cap \alpha^{*-1}(\Sigma)) = 0$ и $m_1(J_2) > 0$. Тогда можно считать, что для почти всех $t \in J_2$ верно включение $f \circ \alpha^*(t) \in \bigcup\limits_{l \in \mathbb{N}} f\big(E_l^\natural\big)$. Учитывая дифференцируемость отображения f на множествах $E_l^\natural$, натуральную параметризацию кривой $f \circ \alpha^*$, а также справедливые для любой обратимой матрицы M соотношения

$$|Mh|_{|h|=1} \geq \inf_{|h|=1} |Mh| = |M^{-1}| = \frac{|\operatorname{adj} M|}{|\det M|},$$

применяя правило дифференцирования композиции, для почти всех $t \in J_2$ получаем

$$1 = |D(f \circ \alpha^*)(t)| = \left| Df(\alpha^*(t)) \frac{\dot{\alpha}^*(t)}{|\dot{\alpha}^*(t)|} \right| |\dot{\alpha}^*(t)| \geq \frac{|\operatorname{adj} Df(\alpha^*(t))|}{J(\alpha^*(t), f)} |\dot{\alpha}^*(t)|,$$

откуда

$$\tilde{\rho}(\alpha^*(t)) = \frac{\rho(\alpha^*(t)) J(\alpha^*(t), f)}{|\operatorname{adj} Df(\alpha^*(t))|} \geq \rho(\alpha^*(t)) |\dot{\alpha}^*(t)| \quad \text{для почти всех } t \in J_2. \tag{14}$$

Поскольку $B_f \subset \Sigma \cup Z$, исходя из определения функции $\tilde{\rho}$, имеем

$$\tilde{\rho}(\alpha^*(t)) = 0 \quad \text{для всех } t \in J_1. \tag{15}$$

В силу утверждения, установленного на шаге II в доказательстве леммы 1, на J_1 почти всюду выполнено равенство $|\dot{\alpha}^*(t)| = 0$. Учитывая его, абсолютную непрерывность кривой α^*, формулу (3), соотношения (14), (15), а также определения функций $\tilde{\rho}$ и $\hat{\rho}$, выводим

$$\int\limits_{\alpha} \rho\, ds = \int\limits_{J} (\rho \circ \alpha^*)|\dot{\alpha}^*|\, dm_1 = \int\limits_{J_2} (\rho \circ \alpha^*)|\dot{\alpha}^*|\, dm_1 + \int\limits_{J_1} (\rho \circ \alpha^*)|\dot{\alpha}^*|\, dm_1$$

$$\leq \int\limits_{J_2} \tilde{\rho} \circ \alpha^*\, dm_1 + \int\limits_{J_1} \tilde{\rho} \circ \alpha^*\, dm_1 = \int\limits_{J} \tilde{\rho} \circ \alpha^*\, dm_1 \leq \int\limits_{J} \hat{\rho} \circ f \circ \alpha^*\, dm_1 = \int\limits_{f\circ\alpha} \hat{\rho}\, ds.$$

Согласно (4) и (5) получаем $\hat{\rho} \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$.

Случай II: $m_1(J_2 \cap \alpha^{*-1}(\Sigma)) > 0$ и $m_1(J_2) \neq m_1(\alpha^{*-1}(\Sigma))$. Представим J_2 в виде $J_2 = J_2^1 \cup J_2^2$ таким образом, что для почти всех точек $t \in J_2^1$ верно включение $f \circ \alpha^*(t) \in \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} f\big(E_l^\natural\big)$, а для почти всех $t \in J_2^2$ выполнено включение $\alpha^*(t) \in \Sigma$, и значит, $f \circ \alpha^*(t) \in f(\Sigma)$. Рассуждая, как в случае I, имеем

$$\tilde{\rho}(\alpha^*(t)) \geq \rho(\alpha^*(t))|\dot{\alpha}^*(t)| \quad \text{для почти всех } t \in J_2^1, \tag{16}$$

$$\tilde{\rho}(\alpha^*(t)) = 0 \quad \text{для почти всех } t \in J_2^2, \tag{17}$$

$$\tilde{\rho}(\alpha^*(t)) = 0 \quad \text{для всех } t \in J_1. \tag{18}$$

Докажем, что $|\dot{\alpha}^*(t)| = 0$ для почти всех $t \in J_2^2$. Пусть $t_0 \in J_2^2$ — точка дифференцируемости кривой α^*. Точка t_0 лежит в некотором замкнутом промежутке I_μ таком, что $\alpha^*(I_\mu) \subset B_{j_\mu}$ (см. шаг I доказательства леммы 1). Поскольку $m_1\big(J_2^2 \cap \alpha^{*-1}(\Sigma)\big) > 0$, можно считать, что существует последовательность $\delta_k \to +0$ при $k \to \infty$ такая, что $t_0 + \delta_k \in I_\mu \cap J_2^2$, т. е. $\alpha^*(t_0 + \delta_k) \in B_{j_\mu} \cap \Sigma$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В силу (13) для m_1-почти всех $t \in I_\mu$ имеем $f(\alpha^*(t)) \in A_{j_\mu}$. Будем считать, что матрица Dh_{j_μ} определена в точке $f(\alpha^*(t_0))$. Пусть α_r^* и h_{r,j_μ} — r-е координатные функции отображений α^* и h_{j_μ} соответственно. Поскольку $|\nabla h_{r,j_\mu}| \leq |Dh_{j_\mu}|$, ввиду условия 2 леммы 3 можно считать, что функция $|\nabla h_{r,j_\mu}(f(\alpha^*(t)))|$ интегрируема на I_μ. В силу предложения 3 можно предполагать, что t_0 — ее точка Лебега. Используя определение производной, предложения 3 и 5, условие 3 леммы 3, формулу (3) и равенство $\alpha^*|_{I_\mu} = h_{j_\mu} \circ f \circ \alpha^*|_{I_\mu}$, получаем

$$\dot{\alpha}_r^*(t_0) = \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha_r^*(t_0+\delta_k) - \alpha_r^*(t_0)}{\delta_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{h_{j_\mu} \circ f \circ \alpha^*(t_0+\delta_k) - h_{j_\mu} \circ f \circ \alpha^*(t_0)}{\delta_k}$$

$$\leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\delta_k} \int\limits_{(f\circ\alpha^*)|_{[t_0+\delta_k,t_0]}} |\nabla h_{r,j_\mu}|\, ds = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\delta_k} \int\limits_{t_0}^{t_0+\delta_k} |\nabla h_{r,j_\mu}(f(\alpha^*(t)))|\, dt$$

$$= |\nabla h_{r,j_\mu}(f(\alpha^*(t_0)))| \leq |Dh_{j_\mu}(f(\alpha^*(t_0)))| = 0,$$

где последнее равенство выполнено в силу предложения 7: гомеоморфизм h_{j_μ} имеет конечное искажение, т. е. $Dh_{j_\mu} = 0$ почти всюду на $Z' = f(\Sigma)$.

Теперь, учитывая, что $|\dot\alpha^*| = 0$ почти всюду на J_2^2 и на J_1, а также принимая во внимание соотношения (16)–(18), абсолютную непрерывность кривой α^*, формулу (3) и определения функций $\tilde\rho$, $\hat\rho$, имеем

$$\int\limits_\alpha \rho\,ds = \int\limits_J (\rho\circ\alpha^*)|\dot\alpha^*|\,dm_1 = \int\limits_{J_2^1} (\rho\circ\alpha^*)|\dot\alpha^*|\,dm_1 + \int\limits_{J_2^2} (\rho\circ\alpha^*)|\dot\alpha^*|\,dm_1$$
$$+ \int\limits_{J_1} (\rho\circ\alpha^*)|\dot\alpha^*|\,dm_1 \le \int\limits_{J_2^1} \tilde\rho\circ\alpha^*\,dm_1 + \int\limits_{J_2^2} \tilde\rho\circ\alpha^*\,dm_1 + \int\limits_{J_1} \tilde\rho\circ\alpha^*\,dm_1$$
$$= \int\limits_J \tilde\rho\circ\alpha^*\,dm_1 \le \int\limits_J \hat\rho\circ f\circ\alpha^*\,dm_1 = \int\limits_{f\circ\alpha} \hat\rho\,ds.$$

Ввиду (4) и (5) получаем $\hat\rho \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$.

Случай III: $m_1(J_2) = 0$ или $m_1(J_2 \cap \alpha^{*-1}(\Sigma)) = m_1(J_2) = m_1(\alpha^{*-1}(\Sigma)) > 0$. В этой ситуации для почти всех $t \in J$ имеем $|\dot\alpha^*(t)| = 0$. Последнее означает, что абсолютно непрерывная кривая α^* задает постоянное отображение, но тогда $\operatorname{mod}_{q'}^\omega \Gamma = \infty$, и неравенство (11) становится тривиальным.

Шаг II. Установим неравенство (11). Учитывая определение функции $\hat\rho_l$, используя формулу замены переменной и неравенство $|\operatorname{adj} Df_l| \le |Df_l|^{n-1}$, имеем

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} f(E_l^\natural)} \hat\rho_l^{p'}(y)\,dy = \int\limits_{f(E_l^\natural)} \frac{\rho^{p'}\big(f_l^{-1}(y)\big) J\big(y, f_l^{-1}\big)^{p'}}{|\operatorname{adj} Df_l^{-1}(y)|^{p'}}\,dy$$
$$= \int\limits_{E_l^\natural} \frac{\rho^{p'}(x)|\operatorname{adj} Df_l(x)|^{p'}}{J(x, f_l)^{p'}} J(x, f_l)\,dx \le \int\limits_{E_l^\natural} \frac{\rho^{p'}(x)|Df_l(x)|^{p'(n-1)}}{J(x, f_l)^{p'}} J(x, f_l)\,dx. \quad (19)$$

Далее рассмотрим два случая.

Случай I: $q < p$. Рассуждаем точно так же, как и в случае I доказательства леммы 2. К последнему интегралу в (19) применим неравенство Гёльдера с показателями q'/p' и $q'/(q'-p')$, предварительно умножив и поделив подынтегральное выражение на $\omega^{p'/q'}$ (напомним, что $\varkappa = pq/(p-q)$, поэтому $(q'-p')/q' = p'(n-1)/\varkappa$):

$$\int\limits_{E_l^\natural} \frac{\rho^{p'}(x)\omega^{p'/q'}(x)|Df_l(x)|^{p'(n-1)}}{J(x, f_l)^{p'}\omega^{p'/q'}(x)} J(x, f_l)\,dx$$
$$\le \bigg(\int\limits_{E_l^\natural} \rho^{q'}(x)\omega(x)\,dx\bigg)^{\frac{p'}{q'}} \bigg(\int\limits_{E_l^\natural} \bigg(\frac{\theta^{\frac1q}(x)|Df_l(x)|}{J(x, f_l)^{\frac1p}}\bigg)^{\varkappa} dx\bigg)^{\frac{p'(n-1)}{\varkappa}}$$
$$= \bigg(\int\limits_{E_l^\natural} \rho^{q'}(x)\omega(x)\,dx\bigg)^{\frac{p'}{q'}} \bigg(\int\limits_{E_l^\natural} \mathscr{K}_{p,q}^{\theta,1}(x, f)^{\varkappa}\,dx\bigg)^{\frac{p'(n-1)}{\varkappa}}. \quad (20)$$

Заметим, что $\hat\rho = 0$ на $f(\Sigma)$ и $f(Z)$ и $m_n(E^0) = m_n(f(E^0)) = m_n(Z) = m_n(\Sigma) = 0$. С учетом (19), (20), (12) выводим, применяя неравенство Гёльдера для сумм с показателями q'/p' и $\varkappa/(p'(n-1))$ и теорему Беппо Леви для рядов [24, гл. V, § 5, п. 5]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat\rho^{p'}(y)\,dy = \int\limits_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} f(E_l^\natural)} \hat\rho^{p'}(y)\,dy = \int\limits_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} f(E_l^\natural)} \sup_{l\in\mathbb{N}} \hat\rho_l^{p'}(y)\,dy \le \int\limits_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} f(E_l^\natural)} \sum_{l=1}^{\infty} \hat\rho_l^{p'}(y)\,dy$$

$$\le \sum_{l=1}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{E_l^\natural} \rho^{q'}(x)\omega(x)\,dx\Bigg)^{\frac{p'}{q'}}\Bigg(\int\limits_{E_l^\natural} \mathscr{K}_{p,q}^{\theta,1}(x,f)^{\varkappa}\,dx\Bigg)^{\frac{p'(n-1)}{\varkappa}}$$

$$\le \Bigg(\int\limits_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} E_l^\natural} \rho^{q'}(x)\omega(x)\,dx\Bigg)^{\frac{p'}{q'}}\Bigg(\int\limits_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} E_l^\natural} \mathscr{K}_{p,q}^{\theta,1}(x,f)^{\varkappa}\,dx\Bigg)^{\frac{p'(n-1)}{\varkappa}}$$

$$= K_{p,q}^{\theta,1}(f;\Omega)^{p'(n-1)}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^{q'}(x)\omega(x)\,dx\Bigg)^{\frac{p'}{q'}}.$$

Чтобы вывести неравенство (11), осталось возвести первый и последний члены полученного соотношения в степень $1/p'$ и воспользоваться определением ω-весового модуля.

Случай II: $p = q$. Действуя, как в случае II доказательства леммы 2, к последнему интегралу в (19) применим неравенство Гёльдера с показателями 1 и ∞ (так как $p = q$, то $p' = q'$):

$$\int\limits_{E_l^\natural} \frac{\rho^{p'}(x)\omega(x)|Df_l(x)|^{p'(n-1)}}{J(x,f_l)^{p'}\omega(x)} J(x,f_l)\,dx$$

$$\le \int\limits_{E_l^\natural} \rho^{q'}(x)\omega(x)\,dx \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{x\in E_l^\natural}\left(\frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df_l(x)|}{J(x,f_l)^{\frac{1}{p}}}\right)^{p'(n-1)}$$

$$\le K_{p,q}^{\theta,1}(f;\Omega)^{p'(n-1)}\int\limits_{E_l^\natural} \rho^{q'}(x)\omega(x)\,dx. \quad (21)$$

Снова $\hat\rho = 0$ на $f(\Sigma)$ и $f(Z)$ и $m_n(E^0) = m_n(f(E^0)) = m_n(Z) = m_n(\Sigma) = 0$. Применяя (19), (21), (12) и теорему Беппо Леви для рядов, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat\rho^{p'}(y)\,dy = \int\limits_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} f(E_l^\natural)} \hat\rho^{p'}(y)\,dy = \int\limits_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} f(E_l^\natural)} \sup_{l\in\mathbb{N}} \hat\rho_l^{p'}(y)\,dy \le \int\limits_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} f(E_l^\natural)} \sum_{l=1}^{\infty} \hat\rho_l^{p'}(y)\,dy$$

$$\le K_{p,q}^{\theta,1}(f;\Omega)^{p'(n-1)}\sum_{l=1}^{\infty}\int\limits_{E_l^\natural} \rho^{q'}(x)\omega(x)\,dx = K_{p,q}^{\theta,1}(f;\Omega)^{p'(n-1)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^{q'}(x)\omega(x)\,dx,$$

откуда после возведения в степень $1/p'$ приходим к (11). Теорема доказана.

Неравенство Полецкого имеет обобщение, известное в литературе как неравенство Вяйсяля [6, 3.1]. Сформулируем его аналог.

Теорема 2. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (p, q)-искажением, $n - 1 < q \le p < \infty$, а весовая функция*

$$\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$$

локально суммируема. Пусть Γ — семейство кривых в Ω, Γ' — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$ и m — положительное целое число. Предположим, что выполняется следующее условие: для каждой кривой $\beta : I \to \mathbb{R}^n$ в Γ' существуют кривые $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ в Γ такие, что для всех $x \in \Omega$ и $t \in I$ равенство $\alpha_j(t) = x$ справедливо не более чем для $i(x, f)$ значений индекса j. Тогда

$$(\operatorname{mod}_{p'} \Gamma')^{1/p'} \le \frac{K_{p,q}^{\theta,1}(f; \Omega)^{n-1}}{m^{1/p'}} (\operatorname{mod}_{q'}^{\omega} \Gamma)^{1/q'}, \tag{22}$$

где $p' = \frac{p}{p-(n-1)}$, $q' = \frac{q}{q-(n-1)}$.

Доказательство. Будем опираться на доказательство теоремы 1. По функции $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$ построим функцию $\hat{\rho} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, полагая

$$\hat{\rho}(y) = \frac{1}{m} \chi_{f(\Omega \setminus E^0)}(y) \sup_{Q} \sum_{x \in Q} \tilde{\rho}(x),$$

где супремум берется по всем подмножествам Q множества $f^{-1}(y) \cap \Omega \setminus E^0$ таким, что $\#C \le m$, а функция $\tilde{\rho}$ и множество E^0 те же, что и в доказательстве теоремы 1. Легко видеть, что

$$\hat{\rho}(y) = \frac{1}{m} \sup \sum_{i=1}^{r} \hat{\rho}_{l_i}(y), \tag{23}$$

где точная верхняя грань берется по всевозможным наборам $\{l_1, \dots, l_r\}$ попарно различных натуральных чисел, а r пробегает все значения от 1 до m; функция $\hat{\rho}_{l_i}$ определена в (12). Отметим, что $\hat{\rho}$ — борелевская функция (см. [25, 2.3.2]).

Шаг I. Покажем, что $\hat{\rho} \in \operatorname{adm} \Gamma'$. Пусть $\beta : I_0 \to \mathbb{R}^n$ — замкнутая кривая в Γ'. Ввиду замечания 1 можно считать, что она спрямляема. Согласно предположению теоремы существуют кривые $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ в Γ такие, что $f \circ \alpha_j \subset \beta$ и $\#\{j : \alpha_j(t) = x\} \le i(x, f)$ для всех $t \in I_0$ и $x \in \Omega$. Имеем $\alpha_j(t) = \alpha_j^* \circ s_\beta(t)$ и $f \circ \alpha_j^* \subset \beta^0$, где $\alpha_j^* : I_j \to \Omega$ обозначает f-представитель кривой α_j относительно β. Лемма 1 позволяет считать, что все α_j^* абсолютно непрерывны. Возвращаясь к множеству C из доказательства теоремы 1, можно предполагать, что $\int\limits_\beta \chi_C \, ds = 0$. Повторяя рассуждения случаев I и II шага I доказательства теоремы 1 (случай III тривиален) для кривой α_j^*, получаем

$$1 \le \int\limits_{\alpha_j} \rho \, ds \le \int\limits_{I_j^1} \tilde{\rho} \circ \alpha_j^* \, dm_1, \tag{24}$$

где $I_j^1 = I_j \cap \alpha_j^{*-1}\left(\cup E_l^\natural\right)$. Интегрируем по I_j^1, поскольку на остальных частях промежутка I_j, как показано в упомянутых выше случаях, интеграл обращается в нуль.

Для $t \in [0, \ell(\beta)]$ определим $\tilde{\rho}_j(t) = \tilde{\rho}(\alpha_j^*(t))\chi_{I_j^1}(t)$ и $J_t = \{j : t \in I_j^1\}$. Поскольку локальный индекс отображения f во всякой точке $x \in \cup E_l^\natural$ равен 1, для почти всех $t \in [0, \ell(\beta)] \cap I_j^1$ точки $\alpha_j^*(t)$, $j \in J_t$, являются различными точками в $f^{-1}(\beta^0(t))$. Из этого наблюдения и определения функции $\hat{\rho}$ вытекает справедливое для почти всех $t \in [0, \ell(\beta)]$ неравенство

$$\hat{\rho}(\beta^0(t)) \geq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \tilde{\rho}_j(t).$$

Из последнего соотношения с учетом (24) выводим

$$\int_\beta \hat{\rho}\, ds = \int_0^{\ell(\beta)} \hat{\rho}(\beta^0(t))\, dt \geq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\ell(\beta)} \tilde{\rho}_j(t)\, dt = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \int_{I_j^1} \tilde{\rho} \circ \alpha_j^*\, dm_1 \geq 1.$$

Ввиду (4) и (5) имеем $\hat{\rho} \in \operatorname{adm} f(\Gamma')$.

Шаг II. Установим (22). Пользуясь равенством (23) и выкладками шага II доказательства теоремы 1, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\rho}^{p'}\, dy = \int_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} f(E_l^\natural)} \hat{\rho}^{p'}\, dy = \int_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} f(E_l^\natural)} \sup \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{r} \hat{\rho}_{l_i} \right)^{p'} dy$$

$$\leq \frac{1}{m} \int_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} f(E_l^\natural)} \sup \sum_{i=1}^{r} \hat{\rho}_{l_i}^{p'}\, dy \leq \frac{1}{m} \int_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} f(E_l^\natural)} \sum_{l=1}^{\infty} \hat{\rho}_l^{p'}\, dy$$

$$\leq \frac{K_{p,q}^{\theta,1}(f;\Omega)^{p'(n-1)}}{m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho^{q'}(x)\omega(x)\, dx \right)^{p'/q'}.$$

Возведя первый и последний члены полученного соотношения в степень $1/p'$ и воспользовавшись определением ω-весового модуля, приходим к неравенству (22). Теорема доказана.

Из установленной теоремы получим следствие. Сначала сформулируем

Предложение 8 [10, следствие II.3.4]. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое дискретное отображение, сохраняющее ориентацию, D — нормальная область для f, $\beta : [a, b) \to f(D)$ — кривая и $m = N(f, D)$. Тогда существуют кривые $\alpha_j : [a, b) \to D$, $1 \leq j \leq m$, такие, что*

1) $f \circ \alpha_j = \beta$,
2) $\#\{j : \alpha_j(t) = x\} = i(x, f)$ *для* $x \in D \cap f^{-1}(\beta(t))$,
3) $|\alpha_1| \cup \dots \cup |\alpha_m| = D \cap f^{-1}(|\beta|)$.

Из теоремы 2 выводим (ср. с [5, теорема 2])

Следствие 1. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta, 1)$-весовым ограниченным (p, q)-искажением, $n - 1 < q \leq p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Если D — нормальная область для f, Γ' — семейство кривых в $f(D)$, Γ — семейство кривых α в D такое, что $f \circ \alpha \in \Gamma'$, то*

$$(\operatorname{mod}_{p'} \Gamma')^{1/p'} \leq \frac{K_{p,q}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}}{N(f, D)^{1/p'}} \left(\operatorname{mod}_{q'}^{\omega} \Gamma \right)^{1/q'}.$$

Доказательство. Неравенство вытекает из теоремы 2 с $m = N(f, D)$, условие которой выполнено ввиду предложения 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlfors L., Beurling A.* Conformal invariants and function-theoretic null-sets // Acta Math. 1964. N 83. P. 101–129.
2. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. 1957. V. 98. P. 171–219.
3. *Шабат Б. В.* Метод модулей в пространстве // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130, № 6. С. 1210–1213.
4. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
5. *Полецкий Е. А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 2. С. 261–272.
6. *Väisälä J.* Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1972. N 509. P. 1–14.
7. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1969. N 448. P. 5–40.
8. *Martio O.* A capacity inequality for quasiregular mappings // Ann. Sci. Fenn. Ser. AI. 1970. N 474. P. 1–18.
9. *Полецкий Е. А.* О стирании особенностей квазиконформных отображений // Мат. сб. 1973. Т. 92, № 2. С. 242–256.
10. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verl., 1993.
11. *Heinonen J., Koskela P.* Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Math. 1998. N 181. P. 1–41.
12. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. New York: Springer-Verl., 2009.
13. *Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities // J. Reine Angew. Math. 2006. N 599. P. 1–26.
14. *Salimov R., Sevost'yanov E.* The Poletskii and Väisälä inequalities for the mappings with (p, q)-distortion // Complex variables and elliptic equations. 2014. V. 59, N 2. P. 217–231.
15. *Sevost'yanov E.* About one modulus inequality of the Väisälä type // preprint. 2013. http://arxiv.org/abs/1204.3810v4.
16. *Байкин А. Н., Водопьянов С. К.* Емкостные оценки, теоремы Лиувилля и об устранении особенностей для отображений с ограниченным (p, q)-искажением // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 290–321.
17. *Водопьянов С. К.* О регулярности функции Полецкого при слабых аналитических предположениях исходного отображения // Докл. АН. 2014. Т. 455, № 2. С. 130–134.
18. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Докл. АН. 2008. Т. 423, № 5. С. 592–596.
19. *Водопьянов С. К.* Отображения с конечным коискажением и классы Соболева // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 3. С. 301–305.
20. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.
21. *Пономарев С. П.* Об N-свойстве гомеоморфизмов класса W^1_p // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 2. С. 140–148.
22. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
23. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 229).
24. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
25. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
26. *Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Науч. кн., 2002.
27. *Whitney H.* On totally differentiable and smooth functions // Pac. J. Math. 1951. V. 1. P. 143–159.
28. *Radó N., Reichelderfer P. V.* Continuous transformation in analysis. Berlin: Springer-Verl., 1955.

29. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.
30. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Изд. иностр. лит., 1949.

Статья поступила 3 февраля 2015 г.

Трямкин Максим Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`maxtryamkin@yandex.ru`