Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 512.542

О ПРОНОРМАЛЬНОСТИ ПОДГРУПП НЕЧЕТНОГО ИНДЕКСА В КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУППАХ

А. С. Кондратьев,
Н. В. Маслова, Д. О. Ревин

Аннотация. Для многих классов конечных простых групп доказана пронормальность подгрупп нечетного индекса.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.614

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, пронормальная группа, нечетный индекс, максимальная подгруппа, нормализатор силовской подгруппы.

Вячеславу Александровичу Белоногову к 80-летию

Введение

В соответствии с определением Ф. Холла подгруппа H группы G называется *пронормальной* (обозначение $H \operatorname{prn} G$), если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g \rangle$.

В дальнейшем мы рассматриваем только конечные группы, и в связи с этим термин «группа» употребляется нами в значении «конечная группа».

Понятие пронормальной подгруппы обобщает понятие нормальной подгруппы, поэтому особый интерес представляет исследование пронормальных подгрупп в простых группах.

Хорошо известно, что в любой группе пронормальными являются максимальные подгруппы (в частности, имеющие нечетный индекс), силовские подгруппы (в частности, силовские 2-подгруппы) и подгруппы, содержащие нормализатор силовской подгруппы (в частности, надгруппы нормализатора силовской 2-подгруппы).

В [1] высказана следующая

Гипотеза. *В конечной простой группе подгруппы нечетного индекса пронормальны.*

В этой же работе данная гипотеза была подтверждена для холловых подгрупп нечетного индекса.

Основным результатом статьи является следующее утверждение, подтверждающее эту гипотезу для многих классов простых групп.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14–21–00065). Второй автор является победителем конкурса молодых математиков 2013 г. Фонда Дмитрия Зимина «Династия».

Теорема. *Подгруппы нечетного индекса пронормальны в любой конечной простой группе, изоморфной одной из следующих групп:*

(1) A_n, $n \geq 5$;

(2) *одной из 26 спорадических групп;*

(3) *группе лиева типа на полем характеристики 2;*

(4) $L_{2^n}(q)$;

(5) $U_{2^n}(q)$;

(6) $S_{2n}(q)$, *где* $q \not\equiv \pm 3 \pmod 8$;

(7) $O_n(q)$;

(8) *исключительной группе лиева типа, отличной от* $E_6(q)$ *и* ${}^2E_6(q)$.

Для оставшихся простых групп, т. е. $L_n(q)$ и $U_n(q)$, если n не является степенью двойки и q нечетно, $S_{2n}(q)$ при $q \equiv \pm 3 \pmod 8$, $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ для нечетного q, вопрос о пронормальности подгрупп нечетного индекса пока остается открытым.

Отметим, что для непростых групп утверждение о пронормальности подгрупп нечетного индекса неверно. Скажем, в [2] приведен пример конечной группы, обладающей непронормальными холловыми подгруппами четного порядка (и, следовательно, нечетного индекса). Более простым примером служит группа Фробениуса порядка $5^2 \cdot 3$ с элементарным абелевым ядром, в которой любая нетривиальная циклическая подгруппа из ядра не пронормальна.

Поскольку подгруппы нечетного индекса — это в точности надгруппы силовских 2-подгрупп, естественно спросить *будут ли в конечных простых группах пронормальными надгруппы силовских p-подгрупп при $p \neq 2$*? Следующая серия примеров показывает, что это не так.

Для любого простого числа $p \neq 2$ найдется простая неабелева группа G, порядок которой не делится на p. Ввиду Z^*-теоремы Глаубермана [3] в группе G найдутся две сопряженные коммутирующие инволюции u и v. Подгруппы $\langle u \rangle$ и $\langle v \rangle$ сопряжены в G и являются надгруппами (тривиальной) силовской p-подгруппы. Но они не пронормальны, так как порождают абелеву группу.

Даже если потребовать, чтобы нечетное простое число p делило порядок простой группы G, надгруппы силовской p-подгруппы не обязаны быть пронормальными.

Пусть $p > 3$. В знакопеременной группе A_{p+4} подгруппы

$$\langle (1, \dots, p)(p+1, p+2)(p+3, p+4) \rangle \quad \text{и} \quad \langle (1, \dots, p)(p+1, p+3)(p+2, p+4) \rangle$$

сопряжены и являются надгруппами силовских p-подгрупп. Вместе с тем они не пронормальны, поскольку порождают абелеву группу.

Пусть $p = 3$. Ввиду [4] в спорадической группе Матье $G = M_{23}$ есть максимальная подгруппа L индекса 253, изоморфная расщепляемому расширению группы $L_3(4)$ с помощью группы, порожденной ее полевым автоморфизмом τ порядка 2. В $\mathrm{Soc}(L) \cong L_3(4)$ есть три класса сопряженных максимальных подгрупп индекса 56, изоморфных A_6, два из которых переставляются автоморфизмом τ. Пусть H — подгруппа в одном из этих двух классов. Тогда H является надгруппой (нетривиальной) силовской 3-подгруппы группы G, $\langle H, H^\tau \rangle = \mathrm{Soc}(L)$, однако в $\mathrm{Soc}(L)$ подгруппы H и H^τ не сопряжены. Отсюда вытекает, что H не пронормальна в L и, следовательно, в G.

Таким образом, гипотеза в случае ее справедливости подчеркнула бы особое значение простого числа 2 в теории простых групп.

Важную роль в доказательстве теоремы играет следующее простое утверждение [1, лемма 5].

Лемма 1. *Пусть G — конечная группа и $H \leq G$. Предположим также, что подгруппа H содержит некоторую силовскую подгруппу S группы G. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $H \operatorname{prn} G$;

(2) *подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$ для любого $g \in N_G(S)$.*

Таким образом, для доказательства пронормальности подгруппы H нечетного индекса в группе G достаточно установить сопряженность подгрупп H и H^g в $\langle H, H^g \rangle$ для любого нетривиального элемента $g \in N_G(S)$ нечетного порядка, где S — фиксированная силовская 2-подгруппа группы H (и, следовательно, группы G).

Поскольку в рассматриваемом случае группа G проста, воспользуемся описанием нормализаторов силовских 2-подгрупп в таких группах [5, следствие теорем 1–3][1)].

Лемма 2. *Пусть G — конечная простая неабелева группа и $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Тогда $N_G(S) = S$, за исключением следующих случаев:*

(1) $G \cong J_2,\ J_3,\ Suz$ *или* F_5 *и* $|N_G(S) : S| = 3$;

(2) $G \cong {}^2G_2(3^{2n+1})$ *или* J_1 *и* $N_G(S) \cong 2^3.7.3 < \mathrm{Hol}(2^3)$;

(3) *G — группа лиева типа над полем характеристики 2 и $N_G(S)$ — подгруппа Бореля в группе G;*

(4) $G \cong L_2(q)$, *где* $3 < q \equiv \pm 3 \pmod 8$ *и* $N_G(S) \cong A_4$;

(5) $G \cong E_6^\eta(q)$, $\eta = \pm$, *q нечетно и* $N_G(S) = S \times C$, *где C — неединичная циклическая группа порядка* $(q - \eta 1)_{2'}/(q - \eta 1, 3)_{2'}$;

(6) $G \cong S_{2n}(q)$, $n \geq 2$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ *и фактор-группа $N_G(S)/S$ изоморфна элементарной абелевой 3-группе порядка 3^t, где число t находится из двоичного разложения*

$$n = 2^{s_1} + \cdots + 2^{s_t}, \quad s_1 > \cdots > s_t \geq 0;$$

(7) $G \cong L_n^\eta(q)$, $n \geq 3$, $\eta = \pm$, *q нечетно и*

$$N_G(S) \cong S \times C_1 \times \cdots \times C_{t-1},$$

где число t находится из двоичного разложения

$$n = 2^{s_1} + \cdots + 2^{s_t},$$

$s_1 > \cdots > s_t > 0$, *и* $C_1, \dots, C_{t-2}, C_{t-1}$ *— циклические группы порядков* $(q - \eta 1)_{2'}$, $\dots$, $(q - \eta 1)_{2'}$, $(q - \eta 1)_{2'}/(q - \eta 1, n)_{2'}$ *соответственно.*

Таким образом, в «регулярном» случае для неабелевой простой группы G и ее силовской 2-подгруппы S справедливо равенство $N_G(S) = S$, откуда $H = H^g$ для любой подгруппы H группы G, содержащей S, и элемента $g \in N_G(S)$. Значит, в этом случае любая подгруппа H нечетного индекса пронормальна в группе G. Чтобы проверить пронормальность подгрупп нечетного индекса в конечных простых группах, остается рассмотреть «исключительные» случаи (1)–(7) в лемме 2.

[1)] Здесь и далее мы используем следующую символику [6]: $L_n^+(q) = L_n(q)$, $L_n^-(q) = U_n(q)$, $E_6^+(q) = E_6(q)$, $E_6^-(q) = {}^2E_6(q)$.

1. Предварительные результаты

Наши обозначения, в основном, стандартны, и их можно найти в [4].

Для группы G через $\mathrm{Soc}(G)$, $O_2(G)$ и $Z(G)$ обозначаются цоколь (подгруппа, порожденная всеми минимальными нормальными подгруппами), 2-радикал (наибольшая нормальная 2-подгруппа) и центр группы G соответственно. Через $\mathrm{Syl}_p(G)$ обозначается множество силовских p-подгрупп группы G.

Нам будет полезно следующее утверждение, непосредственно вытекающее из определения пронормальной подгруппы.

Лемма 3. *Пусть H — подгруппа и N — нормальная подгруппа группы G, и пусть $^{-} : G \to G/N$ — естественный эпиморфизм. Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $H \operatorname{prn} G$, то $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{G}$;*

(2) *если $N \le H$ и $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{G}$, то $H \operatorname{prn} G$.*

В частности, подгруппа H нечетного индекса пронормальна в G тогда и только тогда, когда подгруппа $H/O_2(G)$ пронормальна в $G/O_2(G)$.

Лемма 4. *Пусть H — подгруппа группы G и $g \in G$. Допустим, что для некоторого элемента $y \in \langle H, H^g \rangle$ подгруппы H^y и H^g сопряжены в $\langle H^y, H^g \rangle$. Тогда подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$.*

Доказательство. См. [1, лемма 4]. $\square$

Лемма 5. *Пусть H и M — подгруппы группы G, причем $H \le M$. Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $H \operatorname{prn} G$, то $H \operatorname{prn} M$;*

(2) *если $S \le H$ для некоторой силовской подгруппы S группы G, причем $N_G(S) \le M$ и $H \operatorname{prn} M$, то $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Утверждение (1) непосредственно вытекает из определения пронормальной подгруппы. Утверждение (2) следует из леммы 1. $\square$

Лемма 6. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Допустим, что $A \trianglelefteq G$ и G/A — π-группа. Предположим также, что индекс некоторой подгруппы H группы G не делится на числа из π и $(H \cap A) \operatorname{prn} A$. Тогда $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Поскольку для любого $p \in \pi$ подгруппа H содержит некоторую силовскую p-подгруппу группы G, имеем $G = HA$. Кроме того, $H \cap A$ содержит силовскую p-подгруппу группы A. Пусть $g \in G$ и $g = ha$, где $h \in H$ и $a \in A$. Тогда $H^g = H^a$. По условию леммы существует элемент

$$y \in \langle H \cap A, H^a \cap A \rangle \le \langle H, H^a \rangle$$

такой, что $H^y \cap A = H^a \cap A$. В силу леммы 4 можем заменить H на H^y и считать, что $H^a \cap A = H \cap A$, т. е. $a \in N_A(H \cap A)$ и $g \in N_G(H \cap A)$. Таким образом, для завершения доказательства достаточно показать, что $H \operatorname{prn} N_G(H \cap A)$.

Рассмотрим фактор-группу $N_G(H \cap A)/(H \cap A)$. Она содержит нормальную π'-подгруппу $N_A(H \cap A)/(H \cap A)$, дополнение $H/(H \cap A)$ к которой является π-группой. Отсюда ввиду теоремы Шура — Цассенхауза получаем, что

$$H/(H \cap A) \operatorname{prn} N_G(H \cap A)/(H \cap A) \quad \text{и} \quad H \operatorname{prn} N_G(H \cap A). \quad \square$$

Лемма 7. *Пусть $G = A_5$. Тогда*

(1) *любая максимальная подгруппа в G либо изоморфна A_4, либо является диэдральной группой порядка 6 или 10;*

(2) *любая максимальная подгруппа нечетного индекса в G изоморфна A_4 и, в частности, совпадает с нормализатором силовской 2-подгруппы;*

(3) *любые две подгруппы одинакового порядка в G сопряжены.*

Доказательство. Утверждение (1) хорошо известно (см., например, [4]). Утверждение (2) непосредственно вытекает из (1). Из (1) также следует, что для любой нетривиальной собственной подгруппы H в G справедливо одно из следующих утверждений:

• H является силовской подгруппой в G;

• H является нормализатором некоторой силовской подгруппы в группе G и максимальна в G;

• H имеет порядок 2.

Поскольку все инволюции в группе G сопряжены, легко видеть, что любая подгруппа в G, имеющая тот же порядок, что и H, сопряжена в G с H. Тем самым (3) доказано. □

Лемма 8. *Пусть $G = A_5 \times A_5$. Тогда любая подгруппа нечетного индекса пронормальна в G.*

Доказательство. Пусть π_i — отображение координатной проекции группы G на ее i-й прямой сомножитель для $i = 1, 2$. Пусть H — подгруппа нечетного индекса в G, $S \in \mathrm{Syl}_2(H)$ и g — нетривиальный элемент нечетного порядка в $N_G(S)$. Тогда $|N_G(S)/S| = 3^2$ и $|g| = 3$. Если $H^{\pi_i} \cong A_5$ для $i = 1, 2$, то ввиду теоремы Ремака [7, гл. 3] и нечетности индекса $|G : H|$ подгруппы H и G совпадают. Если $H^{\pi_i} \not\cong A_5$ для $i = 1, 2$, то $H \leq N_G(S)$, а $N_G(S)/S$ — абелева группа. Таким образом, в этом случае $H/S \operatorname{prn} N_G(S)/S$ и $H \operatorname{prn} N_G(S)$. В частности, H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. Значит, можно считать, что $H^{\pi_1} \cong A_5$ и $H^{\pi_2} \leq A_4$. Рассмотрим подгруппу $M \cong A_5 \times A_4$ в G, содержащую H и g. Легко видеть, что $H \trianglelefteq M$ и, следовательно, $H \operatorname{prn} M$, откуда $H \operatorname{prn} G$ по лемме 5. □

Лемма 9. *Пусть $G = A_5 \times 3$. Тогда любая подгруппа нечетного индекса пронормальна в G.*

Доказательство. Заметим, что $G \cong L/O_2(L)$, где $L = A_5 \times A_4$. Поскольку L — подгруппа нечетного индекса в $A_5 \times A_5$, в силу лемм 5 и 8 в L подгруппы нечетного индекса пронормальны. Теперь справедливость утверждения леммы следует из леммы 3. □

Лемма 10. *Пусть $G = L_2(q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ и 5 не делит $|G|$. Тогда любые две изоморфные подгруппы нечетного индекса сопряжены в G.*

Доказательство. Пусть H_1 и H_2 — две изоморфные собственные подгруппы нечетного индекса в G. Ввиду теоремы Силова можно считать, что H_1 и H_2 обладают общей силовской 2-подгруппой S и не равны S. Так как 5 не делит порядок группы G, $H_i \not\cong A_5$ и из [8, теорема 8.27] с помощью простых вычислений получаем, что имеет место один из следующих случаев.

Случай 1: H_1 и H_2 изоморфны группе диэдра порядка $4z$, где z — нечетный делитель числа $q - \varepsilon$, $\varepsilon = \pm 1$ и $q \equiv \varepsilon \pmod 4$. В этом случае $H_i = T_iS$, где $T_i = O(H_i)$ — циклическая группа нечетного порядка z. В частности, T_1 и

T_2 являются S-сигнализаторами группы G и содержатся в ее максимальных S-сигнализаторах. В группе G любые два максимальных S-сигнализатора сопряжены элементом из $N_G(S)$ и являются циклическими группами порядка $(q-\varepsilon)/4$ [9, теорема 4(a1)], поэтому можно считать, что T_1 и T_2 содержатся в одном и том же максимальном сигнализаторе T. Но тогда $T_1 = T_2$, так как группа T циклическая. Отсюда получаем $H_1 = H_2$.

Случай 2: $H_1 \cong H_2 \cong A_4$. В этом случае $H_1 = H_2 = N_G(S)$.

Случай 3: $H_1 \cong H_2 \cong L_2(q_0)$, где $q = q_0^m$, m — нечетное число. В этом случае сопряженность подгрупп H_1 и H_2 вытекает из [6, табл. 3.5A, 3.5G] индукцией по количеству простых сомножителей числа m. $\square$

2. Доказательство теоремы

Зафиксируем обозначения. Пусть G — группа из условия теоремы или группа $^2G_2(3)$, H — ее собственная подгруппа нечетного индекса и $S \in \mathrm{Syl}_2(H) \subseteq \mathrm{Syl}_2(G)$. Ввиду леммы 1 можно считать, что $N := N_G(S) > S$, поэтому ввиду леммы 2 с точностью до изоморфизма группа G является одной из следующих групп: группой лиева типа над полем характеристики 2, $L_2(q)$ для $q \equiv \pm 3 \pmod 8$, J_1, J_2, J_3, Suz, F_5, $^2G_2(3^{2n+1})$. Ниже в леммах 11–18 рассмотрим каждый из этих случаев отдельно, используя в доказательствах без дополнительных пояснений введенные здесь обозначения.

Пусть также g — нетривиальный элемент нечетного порядка в N. Достаточно показать, что H и H^g сопряжены в подгруппе $K = \langle H, H^g\rangle$. Можно считать, что $K \leq M$, где M — максимальная подгруппа нечетного индекса в G. Будем обозначать чертой естественный эпиморфизм $\bar{\ } : M \to M/O_2(M)$.

Лемма 11. *Если G — конечная группа лиева типа над полем характеристики 2, то $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Считаем, что H содержит максимальную унипотентную подгруппу S, являющуюся силовской 2-подгруппой группы G. В этом случае N — подгруппа Бореля группы G. Как следует из [10, теорема 2.6.7], $HN = NH$ и $H \trianglelefteq HN$. Отсюда $H \operatorname{prn} HN$, и по лемме 5 имеем $H \operatorname{prn} G$. $\square$

Лемма 12. *Если $G = L_2(q)$, где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$, то $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Допустим, что лемма неверна и q — наименьшее из чисел, сравнимых с ± 3 по модулю 8, для которых группа $G = L_2(q)$ содержит непронормальную подгруппу H нечетного индекса.

Из леммы 2 следует, что $N \cong A_4$.

По [11, теорема 1] имеет место один из следующих четырех случаев.

Случай 1: $M \cong A_4$. В этом случае $M = N$ и $g \in M$. Кроме того, так как $S \leq H \leq M$ и S — подгруппа индекса 3 в M, подгруппа H совпадает либо с S, либо с M. В первом случае H пронормальна в G как силовская, а во втором — как максимальная подгруппа в G.

Случай 2: $M \cong A_5$. В этом случае $N \leq M$. Так как $M \cong L_2(4)$, по лемме 11 $H \operatorname{prn} M$ и, значит, $H \operatorname{prn} G$ по лемме 5.

Случай 3: $M \cong L_2(q_0)$, где $q = q_0^r$ для некоторого нечетного простого числа r. Легко видеть, что $q_0 \equiv \pm 3 \pmod 8$, откуда следует, что $N \leq M$. Ввиду выбора числа q имеем $H \operatorname{prn} M$ и, значит, $H \operatorname{prn} G$ по лемме 5.

Случай 4: M — диэдральная группа порядка $q-\varepsilon$, где число $\varepsilon = \pm 1$ выбрано так, что $q \equiv \varepsilon \pmod 4$. Заметим, что в этом случае группа M обладает нормальным циклическим 2-дополнением T и $M = ST$. Следовательно, группа H также обладает нормальным циклическим 2-дополнением T_0 и $H = ST_0$, причем $T_0 \leq T$. Далее, $H^g = ST_0^g$, и так как $H^g \leq M$, имеем $T_0^g \leq T$. Но поскольку группа T циклическая, она содержит единственную подгруппу порядка $|T_0|$, откуда $T_0 = T_0^g$ и $H = H^g$.

Таким образом, во всех случаях $H \operatorname{prn} G$; противоречие. $\square$

Лемма 13. *Если $G = J_1$, то $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Пусть $G = J_1$. Тогда ввиду леммы 2 имеем $N \cong 2^3 : 7 : 3$. Согласно [4] имеет место один из следующих двух случаев.

Случай 1: $M \cong 2^3 : 7 : 3$. В этом случае $M = N$ и достаточно показать, что в группе $\overline{M}$ любая подгруппа нечетного индекса (т. е. вообще любая подгруппа) пронормальна. Это так, поскольку любая нетривиальная собственная подгруппа в $\overline{M}$ силовская.

Случай 2: $M \cong 2 \times A_5$. Поскольку $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{M} \cong L_2(5)$ по лемме 12, ввиду леммы 3 получаем требуемое. $\square$

Лемма 14. *Если $G = J_2$, то $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Пусть $G = J_2$. Тогда ввиду леммы 2 имеем $|N/S| = 3$, поэтому $|g| = 3$. Согласно [4] имеет место один из следующих двух случаев.

Случай 1: $M \cong 2_-^{1+4} : A_5$. Разбор этого случая полностью идентичен разбору случая 2 в доказательстве леммы 13.

Случай 2: $M \cong 2^{2+4} : (3 \times S_3)$. Легко видеть, что $|N_M(S)/S| = 3$, поэтому $N = N_G(S) = N_M(S) \leq M$. Далее, $\bar{g} \in N_{\overline{M}}(\overline{S}) = Z(\overline{M})$. Таким образом, $\overline{H^g} = \overline{H}$. Ввиду лемм 5 и 3 требуемое доказано. $\square$

Лемма 15. *Если $G = J_3$, то $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Пусть $G = J_3$. Тогда ввиду леммы 2 имеем $|N/S| = 3$, поэтому $|g| = 3$. Согласно [4] имеет место один из следующих двух случаев.

Случай 1: $M \cong 2_-^{1+4} : A_5$. Разбор этого случая совпадает с разбором случая 2 в доказательстве леммы 13.

Случай 2: $M \cong 2^{2+4} : (3 \times S_3)$. Разбор этого случая совпадает с разбором случая 2 в доказательстве леммы 14. $\square$

Лемма 16. *Если $G = Suz$, то $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Пусть $G = Suz$. Тогда ввиду леммы 2 имеем $|N/S| = 3$, поэтому $|g| = 3$. Согласно [4] имеет место один из следующих трех случаев.

Случай 1: $M \cong 2_-^{1+6} : U_4(2)$. Из леммы 11 следует, что $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{M}$ и ввиду леммы 3 $H \operatorname{prn} M$. Согласно [4] имеем $|N_M(S) : S| = |N : S| = 3$, откуда $N \leq M$ и $H \operatorname{prn} G$ по лемме 5.

Случай 2: $M \cong 2^{4+6} : 3A_6$. Легко видеть, что $|N_M(S)/S| = 3$, поэтому $N = N_M(S) \leq M$. Далее, из того, что $\bar{g} \in N_{\overline{M}}(\overline{S})$, следует $\bar{g} \in Z(\overline{M})$. Таким образом, $\overline{H^g} = \overline{H}$. Ввиду лемм 5 и 3 требуемое доказано.

Случай 3: $M \cong 2_+^{2+8} : (A_5 \times S_3) \cong 2_+^{2+8} : (A_5 \times 3).2$. В данном случае $N \leq M$ и достаточно показать, что $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{M} \cong (A_5 \times 3).2$. Требуемое вытекает из лемм 9 и 6. $\square$

Лемма 17. *Если $G = F_5$, то $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство. Пусть $G = F_5$. Тогда ввиду леммы 2 имеем $|N/S| = 3$, поэтому $|g| = 3$. Согласно [4] имеет место один из следующих двух случаев.

Случай 1: $M \cong 2_+^{1+8}.(A_5 \times A_5).2$. В данном случае $N \leq M$ и достаточно показать, что $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{M} \cong (A_5 \times A_5).2$. Требуемое вытекает из лемм 8 и 6.

Случай 2: $M \cong 2^3.2^2.2^6.(3 \times L_3(2))$. Снова $N \leq M$ и $\bar{g} \in Z(\overline{M}) \cong 3$, как и в разборе случая 2 в доказательстве леммы 14. $\square$

Лемма 18. *Если $G = {}^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1}$, то $H \operatorname{prn} G$.*

Доказательство будем вести индукцией по $n \geq 0$. Ввиду леммы 2 имеем $N \cong 2^3 : 7 : 3$.

Пусть $n = 0$. В этом случае группа G непроста и $G \cong L_2(8) : 3$. Ввиду [4] подгруппа H либо содержится в N, либо содержит простой цоколь группы G. В первом случае $H \operatorname{prn} N$, поскольку H/S либо силовская подгруппа в N/S, либо совпадает с N/S, либо тривиальна. Во втором случае H нормальна в G.

Пусть $n \geq 1$. Согласно [12] имеет место один из следующих трех случаев.

Случай 1: $M \cong {}^2G_2(3^{2m+1})$ и число $(2n+1)/(2m+1)$ целое простое. В данном случае $N \leq M$ и по предположению индукции $H \operatorname{prn} M$, откуда по лемме 5 следует требуемое.

Случай 2: $M = N_G(A)$, где A — циклическая π-холлова подгруппа порядка $(q+1)/4$ для $\pi = \pi(q+1) \setminus \{2\}$ и $M \cong (2^2 \times A) : 6$. Пусть $T = H \cap A$. Тогда $\overline{T} = \overline{H} \cap \overline{A} = \overline{H^g} \cap \overline{A}$ — нормальная π-холлова подгруппа в каждой из групп $\overline{H}$ и $\overline{H^g}$ и $\overline{K}/\overline{T}$ — циклическая группа. Поэтому $\overline{H}/\overline{T} = \overline{H^g}/\overline{T}$ и $H = H^g$.

Случай 3: $M \cong 2 \times L_2(q)$. Так как $q = 3^{2n+1}$, порядок группы M не делится на 5 и по лемме 10 подгруппы $\overline{H}$ и $\overline{H^g}$ сопряжены в $\overline{M} \cong L_2(q)$. Поскольку $\overline{H} \operatorname{prn} \overline{M}$ по лемме 12, получаем требуемое. $\square$

Теорема следует из лемм 12–18. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542.
2. *Ревин Д. О., Вдовин Е. П.* О пронормальности холловых подгрупп // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 35–43.
3. *Glauberman G.* Central elements in core-free groups // J. Algebra. 1966. V. 4, N 3. P. 403–420.
4. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
5. *Кондратьев А. С.* Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.
6. *Kleidman P. B., Liebeck M.* The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
7. *Robinson D.* A course in the theory of groups. New York: Springer-Verl., 1996.
8. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967.
9. *Кондратьев А. С., Мазуров В. Д.* 2-сигнализаторы конечных простых групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 5. С. 594–623.
10. *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.* The classification of the finite simple groups. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. (Math. Surveys Monogr.; V. 40, N 3).
11. *Маслова Н. В.* Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 100–118.

12. *Левчук В. М., Нужин Я. Н.* Строение групп Ри // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 26–41.

Статья поступила 13 февраля 2015 г.

Кондратьев Анатолий Семенович, Маслова Наталья Владимировна
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990;
Уральский федеральный университет
им. первого Президента России Б. Н. Ельцина,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
a.s.kondratiev@imm.uran.ru, butterson@mail.ru

Ревин Данила Олегович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
revin@math.nsc.ru