Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 514.7

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОТОК В ПРОСТРАНСТВЕ G_2–СТРУКТУР НА КОНУСЕ НАД $S^3 \times S^3$

Х. Ж. Кожасов

Аннотация. Предложен к рассмотрению поток G_2-структур на 7-мерном многообразии, допускающем G_2-структуру. Найдено общее решение этого потока в случае, когда многообразие — это конус над $S^3 \times S^3$. Доказана сходимость ассоциированной с решением метрики к конической метрике по модулю гомотетий.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.613

Ключевые слова: G_2-структура, G_2-многообразие, поток G_2-структур, конус над $S^3 \times S^3$.

Введение

В последнее время геометрами стали активно изучаться деформации различных структур на многообразиях с помощью потоков. Смысл использования потоков состоит в нахождении структуры на многообразии с хорошими свойствами. Данная работа касается 7-мерных многообразий с G_2-структурой. Среди них особый интерес представляют G_2-многообразия, определение которых дано ниже. До сих пор не известно критерия (аналога теоремы Яу [1]) того, когда 7-мерное многообразие, допускающее G_2-структуру, является G_2-многообразием. Более того, нет даже гипотезы. В [2] был построен первый пример некомпактного полного G_2-многообразия. Годом позже в [3] был получен аналогичный результат. Известно также несколько методов построения компактных G_2-многообразий [4, 5]. Далее стали изучаться потоки G_2-структур как инструмент для получения G_2 многообразий. В [6] предложено рассмотреть поток теплопроводности $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \Delta\varphi$, но отвечающие потоку уравнения оказались очень громоздкими и нелинейными даже для тривиальных ситуаций. В дальнейшем потоки G_2-структур изучались в [7]. Укажем работы [8, 9], также посвященные этому вопросу.

В данной работе изучаются деформации G_2-структуры на конусе над произведением двух 3-сфер $C(S^3 \times S^3)$ с помощью потока

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \wedge dr = d\varphi.$$

Также находится его общее решение и доказывается сходимость решения потока к G_2-структуре, отвечающей конической метрике на $C(S^3 \times S^3)$.

Автор признателен Я. В. Базайкину за постановку задачи и полезные советы. Также автор благодарит рецензента за полезные исправления и замечания.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.B25.31.0029).

1. Определение геометрического потока в пространстве G_2-структур

Дадим несколько определений, в основном следуя [10, гл. 10]. Рассмотрим 8-мерную алгебру октав Кэли $\mathbb{O}$ с базисом $1, e_1, e_2, \dots, e_7$ и законом умножения, изображенном на рис. 1, и отождествим мнимые октавы $\operatorname{Im}(\mathbb{O}) = \operatorname{Span}(e_1, e_2, \dots, e_7)$ с $\mathbb{R}^7$. Умножение $\circ$ в $\mathbb{O}$ задает положительно определенное скалярное $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и «векторное» $\cdot \times \cdot$ произведения векторов u, v из $\mathbb{R}^7 \cong \operatorname{Im}(\mathbb{O})$ следующим образом:

$$\langle u, v \rangle = -\operatorname{Re}(u \circ v), \quad u \times v = \operatorname{Im}(u \circ v).$$

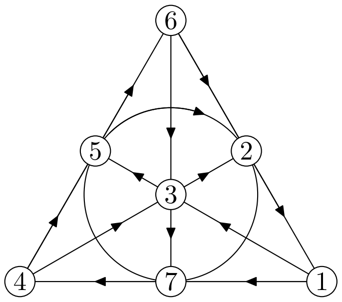

Рис. 1. Проективная плоскость Фано.

Два этих умножения позволяют определить 3-форму (далее называемую *ассоциативной*) ϕ_0 на $\mathbb{R}^7$ равенством

$$\phi_0(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle.$$

В базисе $e_1, e_2, \dots, e_7$ форма ϕ_0 имеет вид $e^{456} + e^{621} + e^{174} + e^{527} + e^{637} + e^{135} + e^{432}$, где символом e^{ijk} обозначена базисная форма $e^i \wedge e^j \wedge e^k$, а $e^i(e_j) = \delta^i_j$. *Группой* G_2 называется стабилизатор ϕ_0 в $GL(7)$ относительно канонического действия $GL(7) \hookrightarrow \wedge^3(\mathbb{R}^7)$. Это 14-мерная простая исключительная группа Ли. Далее M — 7-мерное ориентированное многообразие. Для каждой точки $p \in M$ обозначим через $\Lambda^3_+(T^*_p M)$ множество таких $\phi \in \Lambda^3(T^*_p M)$, для которых существует сохраняющий ориентацию изоморфизм $G : T_p M \to \mathbb{R}^7$ такой, что $G^*(\phi_0) = \phi$. Заметим, что $\Lambda^3_+(T^*_p M) \simeq GL_+(7)/G_2$. Множество $\Lambda^3_+(T^*_p M)$ открыто в $\Lambda^3(T^*_p M)$, поскольку

$$\dim \Lambda^3_+(T^*_p M) = \dim GL_+(7) - \dim G_2 = 49 - 14 = 35 = \dim \Lambda^3(T^*_p M).$$

Множество положительных форм $\Lambda^3_+(M)$ по определению состоит из таких $\varphi \in \Lambda^3(M)$, для которых $\varphi(p) \in \Lambda^3_+(T^*_p M)$, $p \in M$. Другими словами, для $\varphi \in \Lambda^3_+(M)$ над окрестностью U каждой точки $p \in M$ существует такая тривиализация $\psi : TU \to U \times \mathbb{R}^7$ расслоения TM, что $\psi^*_p(\phi_0) = \varphi(p)$.

G_2-структурой на M называется любая положительная форма $\varphi \in \Lambda^3_+(M)$. Известен топологический критерий существования G_2-структуры на M (необходимо и достаточно равенство нулю первых двух характеристических классов Штифеля — Уитни многообразия M). G_2-структура на M задает риманову метрику $g = g_\varphi$ следующим образом. В локальных координатах $x^1, x^2, \dots, x^7$ в окрестности точки M зададим тензорное поле B выражением

$$B_{ij}\ dx^1 \wedge \dots \wedge dx^7 = \frac{\partial}{\partial x^i} \lrcorner \varphi \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \lrcorner \varphi \wedge \varphi.$$

Метрика g определяется через B по формуле

$$g_{ij} = \frac{1}{6^{\frac{2}{9}}} \frac{B_{ij}}{\det(B)^{\frac{1}{9}}}.$$

Такая нормировка нужна для того, чтобы $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ в описанной выше локальной тривиализации TM.

Если связность Леви-Чивиты ∇ метрики g сохраняет G_2-структуру φ ($\nabla\varphi = 0$), то φ называется *параллельной G_2-структурой*, а M — *G_2-многообразием*. Заметим, что уравнение $\nabla\varphi = 0$ крайне нелинейно и задача поиска на M параллельной G_2-структуры становится очень сложной. Группа голономии G_2 многообразия есть подгруппа в группе Ли G_2. Интересно, что G_2-многообразия являются Риччи-плоскими.

Теорема 1 [11]. $\nabla\varphi = 0 \Rightarrow \mathrm{Ric}(g_\varphi) = 0$.

Имеется полезный критерий параллельности G_2-структуры.

Теорема 2 [12]. *Равенство $\nabla\varphi = 0$ равносильно тому, что $d\varphi = 0$ и $\delta\varphi = 0$, где δ — сопряженный к d оператор относительно L^2-произведения на формах, индуцированного метрикой g_φ.*

Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — гладко зависящее от t семейство G_2-структур на M. *Потоком G_2-структур* называется система эволюционных дифференциальных уравнений на компоненты φ в базисе $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$:

$$\frac{\partial\varphi_{ijk}}{\partial t} = F(\varphi)_{ijk},$$

где $F(\varphi)_{ijk}$ — некоторые, вообще говоря, дифференциальные выражения по пространственным переменным от компонент φ. Примером таких потоков являются предложенный Брайантом поток теплопроводности [6]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Delta_g\varphi,$$

где $\Delta_g = d\delta + \delta d$ — лапласиан Ходжа метрики $g = g(\varphi)$, и поток Каригианниса [7]

$$\frac{\partial\varphi_{ijk}}{\partial t} = h_i^l\varphi_{ljk} + h_j^l\varphi_{ilk} + h_k^l\varphi_{ijl} + X^l(*\varphi)_{lijk},$$

где h_{ij} — симметрический 2-тензор на M, X^k — векторное поле на M.

Геометрическим потоком G_2-структур на M будем называть уравнение

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \wedge X = d\varphi,$$

где X — некоторая постоянная (не зависящая от времени) 1-форма на M.

2. Геометрический поток на конусе над $S^3 \times S^3$

Рассмотрим конус над произведением 3-мерных сфер $C(S^3 \times S^3)$. На группе Ли $S^3 = SU(2)$ определены левоинвариантные векторные поля, которые в касательном пространстве к группе $SU(2)$ в единице выглядят так:

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти поля связаны коммутационными соотношениями

$$[\xi^1, \xi^2] = 2\xi^3, \quad [\xi^2, \xi^3] = 2\xi^1, \quad [\xi^3, \xi^1] = 2\xi^2.$$

Если через η_1, η_2, η_3 обозначить двойственные к ξ^1, ξ^2, ξ^3 1-формы, то

$$d\eta_1 = -2\eta_2 \wedge \eta_3, \quad d\eta_2 = -2\eta_3 \wedge \eta_1, \quad d\eta_3 = -2\eta_1 \wedge \eta_2.$$

Пусть η_1, η_2, η_3 и $\tilde{\eta}_1$, $\tilde{\eta}_2$, $\tilde{\eta}_3$ — левоинвариантные кореперы на первой и на второй сферах из декартова произведения $S^3 \times S^3$ соответственно, а dr — 1-форма на $\mathbb{R}$. Определим следующие 1-формы на $C(S^3 \times S^3)$:

$$e^1 = A(r)(\eta_1 + \tilde{\eta}_1), \quad e^2 = A(r)(\eta_2 + \tilde{\eta}_2), \quad e^3 = A(r)(\eta_3 + \tilde{\eta}_3),$$

$$e^4 = B(r)(\eta_1 - \tilde{\eta}_1), \quad e^5 = B(r)(\eta_2 - \tilde{\eta}_2), \quad e^6 = B(r)(\eta_3 - \tilde{\eta}_3), \quad e^7 = dr,$$

где $A(r)$ и $B(r)$ — некоторые положительные функции, $r > 1$. В базисе e^i, $i = 1, \ldots, 7$, G_2-структура задается формулой

$$\varphi = e^{456} + e^{621} + e^{174} + e^{527} + e^{637} + e^{135} + e^{432}, \tag{1}$$

а соответствующая метрика — формулой

$$g = dr^2 + \sum_{i=1}^{3} A^2(\eta_i + \tilde{\eta}_i)^2 + \sum_{j=1}^{3} B^2(\eta_j - \tilde{\eta}_j)^2 \tag{2}$$

Вопрос о параллельности описанной G_2-структуры изучался в [2, 3]. В [13, 14] рассматривалось семейство G_2-структур более общего вида.

Замечание. Класс G_2-структур (1) на $\mathscr{C}(S^3 \times S^3)$ находится во взаимно однозначном соответствии с классом метрик (2) на $\mathscr{C}(S^3 \times S^3)$.

Если функции A и B гладко зависят от вещественного параметра $t \in [0, \infty)$, т. е. имеется гладкое семейство G_2-структур

$$\begin{gathered}\varphi = \varphi(t) = B^3(\eta_4 - \tilde{\eta}_4) \wedge (\eta_5 - \tilde{\eta}_5) \wedge (\eta_6 - \tilde{\eta}_6) + A^2 B(\eta_6 - \tilde{\eta}_6) \wedge (\eta_2 + \tilde{\eta}_2) \wedge (\eta_1 + \tilde{\eta}_1) \\ + AB(\eta_1 + \tilde{\eta}_1) \wedge dr \wedge (\eta_4 - \tilde{\eta}_4) + AB(\eta_5 - \tilde{\eta}_5) \wedge (\eta_2 + \tilde{\eta}_2) \wedge dr + AB(\eta_6 - \tilde{\eta}_6) \wedge (\eta_3 + \tilde{\eta}_3) \wedge dr \\ + A^2 B(\eta_1 + \tilde{\eta}_1) \wedge (\eta_3 + \tilde{\eta}_3) \wedge (\eta_5 - \tilde{\eta}_5) + A^2 B(\eta_4 - \tilde{\eta}_4) \wedge (\eta_3 + \tilde{\eta}_3) \wedge (\eta_2 + \tilde{\eta}_2),\end{gathered}$$

то справедлива следующая

Лемма 3. *Геометрический поток*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \wedge dr = d\varphi \tag{3}$$

эквивалентен системе уравнений

$$A = 2BB_x, \quad 8BB_{xx} + 12B_x^2 = 1, \tag{4}$$

где $x = t + r$.

Доказательство леммы 3 приведено в приложении.

Лемма 4. *Общее решение системы* (4) *задается формулами*

$$A = 2B\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{f(y)}{B^3}}, \quad x = \int_0^B \frac{db}{\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{f(y)}{b^3}}} + h(y), \tag{5}$$

где $y = r - t$, а $f(y)$ и $h(y)$ — произвольные дифференцируемые функции.

Доказательство. B и B_x — всюду положительные функции, так как равенство нулю какой-либо из них в некоторой точке означало бы вырождение метрики (2). Уравнение

$$8BB_{xx} + 12B_x^2 = 1, \tag{6}$$

эквивалентно
$$\left(B_x^2 B^3\right)_x = \frac{1}{12}(B^3)_x.$$
Проинтегрировав последнее, получим
$$B_x^2 = \frac{1}{12} + \frac{f(y)}{B^3}, \tag{7}$$
где $f(y)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Зафиксируем число y' и построим общее решение (6) вдоль прямой $y = y'$. Поскольку $B_x > 0$,
$$\frac{dx}{dB} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{f(y')}{B^3}}}, \tag{8}$$
$$x = \int\limits_0^B \frac{db}{\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{f(y')}{b^3}}} + h(y').$$
Так как y' произвольно, последнее равенство верно для любого значения y:
$$x = \int\limits_0^B \frac{db}{\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{f(y)}{b^3}}} + h(y), \tag{9}$$
что вместе с (7) и первым уравнением (4) дает требуемое. $\square$

Пусть на $\mathscr{C}(S^3 \times S^3)$ заданы метрика $g_\infty(r)$ и семейство метрик $g(t,r)$. Будем говорить, что *g сходится к g_∞ равномерно на любом конечном интервале* $(1, K] \subset (1, \infty)$, и писать $g \to g_\infty$ при $t \to +\infty$, если
$$\forall K > 1 \quad \sup_{1<r\le K} |g(r,t) - g_\infty(r)| \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty. \tag{10}$$

Теорема 5. *Для ограниченных функций $f(y)$ и $h(y)$ таких, что $f(y) \ge 0$, $h(y) < y$, метрика g, отвечающая решению* (5) *потока* (3), *обладает следующим свойством: $\frac{g}{(t+1)^2}$ сходится равномерно на любом конечном интервале к конической метрике $g_\infty(s) = ds^2 + s^2 \cdot g_{S^3\times S^3}$, где $g_{S^3\times S^3}$ — метрика на $S^3 \times S^3$, не зависящая от s. Другими словами, класс гомотетии метрики g сходится к классу гомотетии конической метрики g_∞ в смысле* (10).

Доказательство. Поскольку $r > 1$, $t \ge 0$, в каждый момент времени t будет $x > t + 1$. Далее иногда вместо переменных x и y будут использоваться $s = \frac{x}{t+1}$ и t, где $s > 1$ — пространственная переменная предельной метрики. Докажем, что
$$\sup_{s>1} \left| \frac{B(s,t)}{t+1} - \frac{s}{\sqrt{12}} \right| \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty. \tag{11}$$
Нормировка на $t + 1$ — это в точности гомотетия соответствующей метрики.

Подставив $t = 0$ в (9), получим
$$r = \int\limits_0^{B|_{t=0}(r)} \frac{db}{\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{f(r)}{b^3}}} + h(r), \quad h(y) = y - \int\limits_0^{B|_{t=0}(y)} \frac{db}{\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{f(y)}{b^3}}}.$$

Замечание. Условие $h(y) < y$ соответствует положительности $B|_{t=0}$.

По теореме о среднем для всех $B>0$ найдется B' такое что

$$x=\int\limits_0^B \frac{db}{\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{f(y)}{b^3}}}+h(y)=\frac{B}{\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{f(y)}{B'^3}}}+h(y).$$

Если $x\to+\infty$, то $B,B'\to+\infty$, так как $f(y)\geq 0$, $h(y)$ ограничены и $B_x\to\frac{1}{\sqrt{12}}$ при $B\to+\infty$.

Таким образом, $B\approx\frac{x}{\sqrt{12}}-\frac{h(y)}{\sqrt{12}}$ при $x\approx+\infty$.

Обоснуем сходимость (11). Для этого заметим, что при фиксированном t ввиду неотрицательности и ограниченности $g(y)$ будет

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{B(s,t)}{t+1}-\frac{s}{\sqrt{12}}\right)=\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{f(y)}{B^3}}-\frac{1}{\sqrt{12}}\geq 0,$$

$$\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{f(y)}{B^3}}-\frac{1}{\sqrt{12}}\to 0 \quad \text{при } s=\frac{x}{t+1}\to+\infty\Leftrightarrow x\to+\infty.$$

Тогда

$$\sup_{s>1}\left|\frac{B(s,t)}{t+1}-\frac{s}{\sqrt{12}}\right|=\frac{|h(y)|}{\sqrt{12}(t+1)}\to 0 \quad \text{при } t\to+\infty. \tag{12}$$

Покажем сходимость

$$\forall K>1 \ \sup_{1<s\leq K}\left|\frac{B(s,t)^2}{(t+1)^2}-\frac{s^2}{12}\right|\to 0 \quad \text{при } t\to+\infty. \tag{13}$$

Имеем

$$\sup_{1<s\leq K}\left|\frac{B(s,t)^2}{(t+1)^2}-\frac{s^2}{12}\right|\leq\sup_{1<s\leq K}\left|\frac{B(s,t)}{t+1}-\frac{s}{\sqrt{12}}\right|\left|\frac{B(s,t)}{t+1}+\frac{s}{\sqrt{12}}\right|$$
$$\leq\frac{|h(y)|}{\sqrt{12}(t+1)}\left(\frac{|h(y)|}{\sqrt{12}(t+1)}+2\sup_{1<s\leq K}\frac{s}{\sqrt{12}}\right)\to 0 \quad \text{при } t\to+\infty.$$

Наконец, докажем сходимость (10) метрики

$$\frac{g}{(t+1)^2}=\frac{1}{(t+1)^2}\left(dx^2+\sum_{i=1}^3 A^2(\eta_i+\tilde\eta_i)^2+\sum_{j=1}^3 B^2(\eta_j-\tilde\eta_j)^2\right)$$
$$=ds^2+\sum_{i=1}^3\frac{A^2}{(t+1)^2}(\eta_i+\tilde\eta_i)^2+\sum_{j=1}^3\frac{B^2}{(t+1)^2}(\eta_j-\tilde\eta_j)^2$$

к конической метрике

$$g_\infty(s)=ds^2+s^2\left(\frac{1}{36}\sum_{i=1}^3(\eta_i+\tilde\eta_i)^2+\frac{1}{12}\sum_{j=1}^3(\eta_j-\tilde\eta_j)^2\right). \tag{14}$$

Поскольку метрики записаны в одном базисе, для обоснования (10) достаточно иметь в виду (13) и вспомнить, что $A=2BB_x$. □

Замечание. 1. Метрика g_∞ в формуле (14) имеет вид

$$ds^2+s^2\cdot g_{S^3\times S^3},$$

где $g_{S^3\times S^3}$ — левоинвариантная метрика на $S^3\times S^3$.

2. Метрика g_∞ рассматривалась в работах [2, 3].

3. Условия теоремы 5 можно переписать как некоторое условие на начальную G_2-структуру (метрику) для потока

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\wedge dr=d\varphi,$$

тем самым поставив задачу Коши для системы уравнений

$$\dot B+B'=\frac{A}{B},\quad \dot A+A'=\frac{1}{2}\left(1-\frac{A^2}{B^2}\right), \tag{15}$$

где через $\dot A$, $\dot B$ и A', B' обозначены частные производные по переменной t и по переменной r соответственно от функций A и B.

Приложение

Вычислим дифференциал Де Рама d от G_2-структуры φ на $C(S^3\times S^3)$. Для простоты будем обозначать через B' и A' производные $\frac{\partial B}{\partial r}$ и $\frac{\partial A}{\partial r}$ соответственно. Напомним, что в локальной тривиализации, описанной в разд. 2,

$$\varphi=e^{456}+e^{621}+e^{174}+e^{527}+e^{637}+e^{135}+e^{432},$$

$$d\varphi=de^{456}+de^{621}+de^{174}+de^{527}+de^{637}+de^{135}+de^{432},$$

$$\begin{aligned}de^{456}&=de^4\wedge e^5\wedge e^6-e^4\wedge de^5\wedge e^6+e^4\wedge e^5\wedge de^6\\&=\left(\frac{B'}{B}e^7\wedge e^4+2B(-\eta_2\wedge\eta_3+\tilde\eta_2\wedge\tilde\eta_3)\right)\wedge e^5\wedge e^6\\&-e^4\wedge\left(\frac{B'}{B}e^7\wedge e^5+2B(-\eta_3\wedge\eta_1+\tilde\eta_3\wedge\tilde\eta_1)\right)\wedge e^6+e^4\wedge e^5\wedge\left(\frac{B'}{B}e^7\wedge e^6\right.\\&\left.+2B(-\eta_1\wedge\eta_2+\tilde\eta_1\wedge\tilde\eta_2)\right)=3\frac{B'}{B}e^7\wedge e^4\wedge e^5\wedge e^6\\&+\frac{B}{2}\left(-\left(\frac{e^2}{A}+\frac{e^5}{B}\right)\wedge\left(\frac{e^3}{A}+\frac{e^6}{B}\right)+\left(\frac{e^2}{A}-\frac{e^5}{B}\right)\wedge\left(\frac{e^3}{A}-\frac{e^6}{B}\right)\right)\wedge e^5\wedge e^6\\&-\frac{B}{2}e^4\wedge\left(-\left(\frac{e^3}{A}+\frac{e^6}{B}\right)\wedge\left(\frac{e^1}{A}+\frac{e^4}{B}\right)+\left(\frac{e^3}{A}-\frac{e^6}{B}\right)\wedge\left(\frac{e^1}{A}-\frac{e^4}{B}\right)\right)\wedge e^6\\&+\frac{B}{2}e^4\wedge e^5\wedge\left(-\left(\frac{e^1}{A}+\frac{e^4}{B}\right)\wedge\left(\frac{e^2}{A}+\frac{e^5}{B}\right)+\left(\frac{e^1}{A}-\frac{e^4}{B}\right)\wedge\left(\frac{e^2}{A}-\frac{e^5}{B}\right)\right)=-3\frac{B'}{B}e^{4567}.\end{aligned}$$

Аналогично

$$de^{621}=\left(\frac{B'}{B}+2\frac{A'}{A}\right)e^{1267},\quad de^{174}=\frac{1}{A}e^{2347}+\frac{A}{B^2}e^{4567}-\frac{1}{A}e^{1267}+\frac{1}{A}e^{1357},$$

$$de^{527}=-\frac{1}{A}e^{2347}-\frac{1}{A}e^{1267}-\frac{1}{A}e^{1357}+\frac{A}{B^2}e^{4567},$$

$$de^{637}=\frac{1}{A}e^{1357}-\frac{1}{A}e^{2347}+\frac{1}{A}e^{1267}+\frac{A}{B^2}e^{4567},$$

$$de^{135}=-\left(\frac{B'}{B}+2\frac{A'}{A}\right)e^{1357},\quad de^{432}=\left(\frac{B'}{B}+2\frac{A'}{A}\right)e^{2347},$$

$$\begin{aligned} d\varphi &= -3\frac{B'}{B}e^{4567} + \left(\frac{B'}{B} + 2\frac{A'}{A}\right)e^{1267} + \frac{1}{A}e^{2347} + \frac{A}{B^2}e^{4567} - \frac{1}{A}e^{1267} + \frac{1}{A}e^{1357} \\ &\quad - \frac{1}{A}e^{2347} - \frac{1}{A}e^{1267} - \frac{1}{A}e^{1357} + \frac{A}{B^2}e^{4567} + \frac{1}{A}e^{1357} - \frac{1}{A}e^{2347} + \frac{1}{A}e^{1267} \\ &\quad + \frac{A}{B^2}e^{4567} - \left(\frac{B'}{B} + 2\frac{A'}{A}\right)e^{1357} + \left(\frac{B'}{B} + 2\frac{A'}{A}\right)e^{2347} \\ &= 3\left(\frac{A}{B^2} - \frac{B'}{B}\right)e^{4567} + \left(\frac{B'}{B} + 2\frac{A'}{A} - \frac{1}{A}\right)e^{1267} \\ &\quad + \left(\frac{B'}{B} + 2\frac{A'}{A} - \frac{1}{A}\right)e^{2347} - \left(\frac{B'}{B} + 2\frac{A'}{A} - \frac{1}{A}\right)e^{1357}. \end{aligned}$$

Вычислим $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. Напомним, что

$$e^i = A(\eta_i + \tilde{\eta}_i),\ i = 1,2,3, \quad e^j = B(\eta_{j-3} - \tilde{\eta}_{j-3}),\ j = 4,5,6, \quad e^7 = dr.$$

Имеем

$$\frac{\partial e^{456}}{\partial t} = 3\frac{\dot{B}}{B}e^{456}, \quad \frac{\partial e^{621}}{\partial t} = \left(\frac{\dot{B}}{B} + 2\frac{\dot{A}}{A}\right)e^{621}, \quad \frac{\partial e^{174}}{\partial t} = \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{A}}{A}\right)e^{174},$$

$$\frac{\partial e^{527}}{\partial t} = \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{A}}{A}\right)e^{527}, \quad \frac{\partial e^{637}}{\partial t} = \left(\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{A}}{A}\right)e^{637},$$

$$\frac{\partial e^{135}}{\partial t} = \left(\frac{\dot{B}}{B} + 2\frac{\dot{A}}{A}\right)e^{135}, \quad \frac{\partial e^{432}}{\partial t} = \left(\frac{\dot{B}}{B} + 2\frac{\dot{A}}{A}\right)e^{432},$$

где точкой сверху обозначены частные производные по t.

Доказательство леммы 3. Ввиду проделанных выше вычислений имеем

$$\begin{aligned} &3\frac{\dot{B}}{B}e^{4567} - \left(\frac{\dot{B}}{B} + 2\frac{\dot{A}}{A}\right)e^{1267} + \left(\frac{\dot{B}}{B} + 2\frac{\dot{A}}{A}\right)e^{1357} - \left(\frac{\dot{B}}{B} + 2\frac{\dot{A}}{A}\right)e^{2347} \\ &\quad = \frac{\partial\varphi}{\partial t} \wedge e^7 = d\varphi = 3\left(\frac{A}{B^2} - \frac{B'}{B}\right)e^{4567} + \left(\frac{B'}{B} + 2\frac{A'}{A} - \frac{1}{A}\right)e^{1267} \\ &\qquad + \left(\frac{B'}{B} + 2\frac{A'}{A} - \frac{1}{A}\right)e^{2347} - \left(\frac{B'}{B} + 2\frac{A'}{A} - \frac{1}{A}\right)e^{1357}, \end{aligned}$$

или

$$\frac{\dot{B}}{B} = -\frac{B'}{B} + \frac{A}{B^2}, \quad 2\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} = \frac{1}{A} - 2\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B},$$

или

$$\dot{B} + B' = \frac{A}{B}, \quad \dot{A} + A' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A^2}{B^2}\right). \tag{16}$$

Заменим переменные t и r на $x = r + t$ и $y = r - t$, в которых уравнения (16) принимают вид

$$2B_x = \frac{A}{B}, \quad 2A_x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A^2}{B^2}\right). \tag{17}$$

Выражая A из первого уравнения и подставляя полученное выражение во второе уравнение (17), приходим к требуемой системе

$$A = 2BB_x, \quad 8BB_{xx} + 12B_x^2 = 1. \quad \square$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yau S.-T.* On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1977. V. 74, N 5. P. 1798–1799.
2. *Bryant R. L., Salamon S. M.* On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy // Duke Math. J. 1989. V. 58, N 3. P. 829–850.
3. *Gibbons G. W., Page D. N., Pope C. N.* Einstein metrics on S^3, $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{R}^4$ bundles // Commun. Math. Phys. 1990. V. 127. P. 529–553.
4. *Joyce D. D.* Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2. I // J. Differ. Geom. 1996. V. 43, N 2. P. 291–328.
5. *Kovalev A. G.* Twisted connected sums and special Riemannian holonomy // J. Reine Angew. Math. 2003. V. 565. P. 125–160.
6. *Bryant R. L.* Some remarks on G_2-structures // Proc. Gokova Geometry-Topology Conf. 2005. P. 75–109.
7. *Karigiannis S.* Flows of G_2-Structures. I // Quart. J. Math. 2009. V. 60. P. 487–522.
8. *Bryant R. L. Xu Feng.* Laplacian flow for closed $G2$-structures: Short Time Behavior // arXiv article, 11 Jan 2011, arXiv:math.DG/1101.2004v1.
9. *Grigorian S.* Short-time behavior of a modified Laplacian coflow of G_2-structures // Adv. Math. 2013. V. 248. P. 378–415.
10. *Joyce D. D.* Compact manifolds with special holonomy. Oxford: Oxford Univ. Press, 2000. (Oxford Math. Monographs).
11. *Bonan E.* Sur les variétés Riemanniennes à groupe d'holonomie $G2$ ou Spin(7) // C. R. Acad. Sci. Paris. 1966. T. 262. P. 127–129
12. *Fernández M. Gray A.* Riemannian manifolds with structure group $G2$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1982. V. 132, N 4. P. 19–45.
13. *Brandhuber A., Gomis J., Gubser S. S., Gukov S.* Gauge theory at large N and new $G2$ holonomy metrics // Nuclear Phys. B. 2001. V. 611, N 1–3. P. 179–204.
14. *Базайкин Я. В., Богоявленская О. А.* Полные римановы метрики с группой голономии G_2 на деформациях конусов над $S^3 \times S^3$ // Мат. заметки. 2013. Т. 93, № 5. С. 645–657.

Статья поступила 3 июля 2014 г., окончательный вариант — 17 августа 2015 г.

Кожасов Хажгали Жанатович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati,
via Bonomea, 265, Trieste 34136, Italy
`hazhgaly@gmail.com`, `kkozhasov@sissa.it`