*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6*

*УДК 510.223*

# ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ СОЛОВЕЯ

**В. Г. Кановей, В. А. Любецкий**

**Аннотация.** Известная $\Sigma$-конструкция Соловея в теории форсинга обобщена на случай промежуточных множеств, не являющихся подмножествами исходной модели. Наш метод приносит более прозрачное построение форсинга над промежуточной моделью, чем в классической работе Григорьева [1] о промежуточных моделях.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.611

**Ключевые слова:** промежуточные модели, сигма-конструкция, форсинг.

## 1. Введение

Хорошо известная $\Sigma$-конструкция Соловея [2, 4.4] (см. также [3, 13.3]) позволяет доказать, что если $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ — форсинг в счетной транзитивной модели $\mathfrak{M}$, $t \in \mathfrak{M}$ является $\mathbb{P}$-именем, а $X \subseteq \mathfrak{M}$ — любое множество, то существует такое множество $\Sigma(X, t) \subseteq \mathbb{P}$, что

(I) $\Sigma(X, t) \neq \varnothing$ в том и только том случае, когда существует $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathfrak{M}$ множество $G \subseteq \mathbb{P}$ такое, что $X = t[G]$;

(II) если $G \subseteq \mathbb{P}$ — $\mathbb{P}$-генерическое множество над $\mathfrak{M}$ и $t[G] = X$, то $G \subseteq \Sigma(X, t)$, $\Sigma(X, t) \in \mathfrak{M}[X]$, и множество $G$ также $\Sigma(X, t)$-генерическое над $\mathfrak{M}[X]$;

(III) модель $\mathfrak{M}[G]$ тем самым есть $\Sigma(X, t)$-генерическое расширение модели $\mathfrak{M}[X]$ в (II);

(IV) дополнительно в (II) если множество $G \subseteq \Sigma(X, t)$ является $\Sigma(X, t)$-генерическим над $\mathfrak{M}$, то $t[G] = X$.

Закономерно возникает проблема обобщения этой $\Sigma$-конструкции на произвольные множества $X$, не обязательно удовлетворяющие соотношению $X \subseteq \mathfrak{M}$. Этой проблеме и посвящена настоящая статья. Требуемое обобщение получим на базе вспомогательного форсинга $\Sigma^+(X, t)$, состоящего из «суперусловий» — пар вида $\langle p, a \rangle$, где $p \in \mathbb{P}$ и $a$ — функция с конечной областью, связывающая элементы множества $X$ с их именами. Это обобщение (теорема 10) будет прямым по отношению к условиям (I) и (III) и частичным по отношению к (II) и (IV). Используемая техника позволяет прийти к более удачным обобщениям, чем в [1]. Например, (III) получено в [1] при помощи свертывающего форсинга в комбинации с $\mathbb{P}$ (см. разд. 8), из-за чего структура окончательного форсинга для (III) не имеет в [1] определенного, ясного описания, сравнимого с нашим $\Sigma^+(X, t)$. Мы предполагаем, что эти результаты найдут применение к исследованию таких современных моделей теории множеств, как модели с эффектами кодировки в [4].

Работа выполнена первым автором при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–00006), вторым автором — при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14–50–00150).

Авторы выражают признательность рецензенту за внимание к работе и ценные замечания, позволившие улучшить изложение.

## 2. Основные предположения и определения

Определение 1. В дальнейшем предполагаем, что

$\mathfrak{M}$ — счетная транзитивная модель **ZFC**,

$\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ — форсинг (т. е. частично упорядоченное множество), элементы $p \in \mathbb{P}$ называются условиями, а соотношение $p \le q$ означает, что $p$ — более сильное условие,

$t \in \mathfrak{M}$ является $\mathbb{P}$-именем транзитивного множества (так что $\mathbb{P}$ вынуждает утверждение: «множество $t$ транзитивно»),

$X$ — конечное или счетное транзитивное множество, не обязательно удовлетворяющее $X \in \mathfrak{M}$ или $X \subseteq \mathfrak{M}$[1)].

В отношении форсинга будем придерживаться обозначений из [3, 9.2]. В частности, $\breve{x}$ — каноническое имя любого множества $x \in \mathfrak{M}$. Если $t$ — имя, а множество $G \subseteq \mathbb{P}$ $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathfrak{M}$, то через $t[G]$ обозначается $G$-интерпретация имени $t$, так что

$$\mathfrak{M}[G] = \{t[G] : t \in \mathfrak{M} \text{ — имя}\}.$$

Через $\Vdash$ обозначим отношение вынуждения $\Vdash^{\mathfrak{M}}_{\mathbb{P}}$ над моделью $\mathfrak{M}$.

Условие $p \in \mathbb{P}$ *решает* формулу $\Phi$, если либо $p \Vdash \Phi$, либо $p \Vdash \neg\Phi$.

Определение 2. Если множество $G \subseteq \mathfrak{M}$ генерическое над $\mathfrak{M}$, а $t$ — имя, и $X = t[G]$, то $\mathfrak{M}(X)$ есть наименьшая транзитивная модель теории **ZF** (не обязательно **ZFC**), содержащая $X$ (и все элементы транзитивного замыкания $X$) и все множества из модели $\mathfrak{M}$[2)]. Понятно, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}(X) \subseteq \mathfrak{M}[G]$.

Для $\mathbb{P}$-имен $s, t$ отношение $s \prec t$ будет означать, что $s$ присутствует в $t$ как имя возможного элемента множества $t[G]$. Тогда $\mathrm{PE}_t = \{s : s \prec t\}$ (множество всех «потенциальных элементов» множества $t[G]$) принадлежит модели $\mathfrak{M}$, и если множество $G \subseteq \mathbb{P}$ генерическое над $\mathfrak{M}$, то

$$t[G] = \{s[G] : s \in \mathrm{PE}_t \wedge \exists p \in G(p \Vdash s \in t)\}.$$

Пусть $d \subseteq \mathrm{PE}_t$. Условие $p \in \mathbb{P}$ называется *$d$-полным* , если

1) $p \Vdash s \in t$ для всех $s \in d$,

2) $p$ решает каждую формулу вида $s \in s'$ и $s = s'$, где $s, s' \in d$.

## 3. Суперусловия и множество $\mathbf{\Sigma}^+$

В этом разделе даются определения, ведущие к основной теореме.

Определение 3. Через $\mathbb{P}^+(X, t)$ обозначим множество всех пар $\langle p, a\rangle$ (называемых *суперусловиями*) таких, что $p \in \mathbb{P}$, $a$ — функция, $\operatorname{dom} a \subseteq \mathrm{PE}_t$ —

---

[1)]На самом деле, предположение о транзитивности $X$ не нарушает общности, так как любое множество $X$ эффективно кодируется транзитивным замыканием $\mathrm{TC}(\{X\})$, т. е. наименьшим транзитивным множеством, содержащим $X$ как элемент. Именно, $X$ есть тот единственный элемент множества $\mathrm{TC}(\{X\})$, который не принадлежит никакому элементу этого множества.

[2)]Принятая в теории форсинга запись $\mathfrak{M}(X)$ вместо $\mathfrak{M}[X]$ подчеркивает, что аксиома выбора не обязательно верна в этой модели в отличие от модели $\mathfrak{M}[G]$.

конечное множество, $\operatorname{ran} a \subseteq X$, условие $p$ является $(\operatorname{dom} a)$-полным и дополнительно $a(\breve{x}) = x$ для всех таких множеств $x \in \mathfrak{M}$, что $\breve{x} \in \operatorname{dom} a$.

Упорядочим $\mathbb{P}^+(X,t)$ так: $\langle p,a\rangle \le \langle p',a'\rangle$ (т. е. суперусловие $\langle p,a\rangle$ более сильное), если $p \le p'$ в $\mathbb{P}$ и $a$ продолжает $a'$ как функция.

Например, если $p \in \mathbb{P}$, то $\langle p, \varnothing\rangle \in \mathbb{P}^+(X,t)$.

Если $\langle p,a\rangle \in \mathbb{P}^+(X,t)$, то компоненту $p$ называем *условием*, а компоненту $a$ — *сопоставлением*, так как $a$ сопоставляет множествам имена. Суперусловия не обязательно принадлежат модели $\mathfrak{M}$, однако форсинг $\mathbb{P}^+(X,t)$, очевидно, принадлежит более широкой модели $\mathfrak{M}(X)$.

**Лемма 4.** *Если $\langle p,a\rangle \in \mathbb{P}^+(X,t)$, $q \in \mathbb{P}$, $q \le p$, то $\langle q,a\rangle \in \mathbb{P}^+(X,t)$.*

Следующее определение вводит множество $\Sigma^+(X,t)$ всех суперусловий $\langle p,a\rangle$, которые не вынуждают никаких утверждений, не совместимых с предположением о существовании такого генерического над $\mathfrak{M}$ множества $G \subseteq \mathbb{P}$, что $X = t[G]$ и $a(s) = s[G]$ для всех $s \in \operatorname{dom} a$.

Определение 5. Определяем множество $\Sigma^+_\gamma(X,t) \subseteq \mathbb{P}^+(X,t)$ трансфинитной индукцией по $\gamma \in \mathbf{Ord}$. Определение включает три пункта.

1. Множество $\Sigma^+_0(X,t)$ состоит из всех суперусловий $\langle p,a\rangle \in \mathbb{P}^+(X,t)$, для которых выполнено следующее: если $s, s' \in \operatorname{dom} a$, то соотношения $p \Vdash s \in$ (или $=$) $s'$ и $a(s) \in$ (соответственно $=$) $a(s')$ эквивалентны.

2. Если $\gamma \in \mathbf{Ord}$, то множество $\Sigma^+_{\gamma+1}(X,t)$ состоит из всех суперусловий $\langle p,a\rangle \in \Sigma^+_\gamma(X,t)$ таких, что для любого множества $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbb{P}$, плотного в $\mathbb{P}$, любого имени $s \in \mathrm{PE}_t$ и любого элемента $x \in X$ существует суперусловие $\langle q,b\rangle \in \Sigma^+_\gamma(X,t)$, для которого

a) $\langle q,b\rangle \le \langle p,a\rangle$ (т. е. $\langle q,b\rangle$ — более сильное условие) и $q \in D$,

b) $x \in \operatorname{ran} b$ и либо $s \in \operatorname{dom} b$, либо $q \Vdash s \notin t$.

3. Наконец, если ординал $\lambda$ определен, то $\Sigma^+_\lambda(X,t) = \bigcap\limits_{\gamma<\lambda} \Sigma^+_\gamma(X,t)$.

Последовательность множеств $\Sigma^+_\lambda(X,t)$ по построению убывает. Поэтому существует ординал $\lambda = \lambda(X,t)$ такой, что $\Sigma^+_{\lambda+1}(X,t) = \Sigma^+_\lambda(X,t)$; определяем $\Sigma^+(X,t) = \Sigma^+_\lambda(X,t)$.

**Лемма 6.** *Если $\langle p,a\rangle \in \Sigma^+(X,t)$, множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbb{P}$, плотно в $\mathbb{P}$ и $s \in \mathrm{PE}_t$, $x \in X$, то имеется пара $\langle q,b\rangle \in \Sigma^+(X,t)$, для которой $\langle q,b\rangle \le \langle p,a\rangle$, $q \in D$, $x \in \operatorname{ran} b$ и либо $s \in \operatorname{dom} b$, либо $q \Vdash s \notin t$.*

Доказательство. Имеем $\Sigma^+(X,t) = \Sigma^+_{\lambda(X,t)}(X,t) = \Sigma^+_{\lambda(X,t)+1}(X,t)$. □

Докажем, что множество $\Sigma^+(X,t)$ замкнуто по ослаблению.

**Лемма 7.** *Предположим, что $\langle p,a\rangle \in \Sigma^+(X,t)$. Тогда*

(i) *если $\langle q,b\rangle \in \Sigma^+_0(X,t)$ и $\langle p,a\rangle \le \langle q,b\rangle$, то $\langle q,b\rangle \in \Sigma^+(X,t)$;*

(ii) *если $q \in \mathbb{P}$, $q \ge p$, и $\langle q,a\rangle \in \mathbb{P}^+(X,t)$, то $\langle q,a\rangle \in \Sigma^+(X,t)$.*

Доказательство. (i) Доказываем соотношение $\langle q,b\rangle \in \Sigma^+_\gamma(X,t)$ индукцией по $\gamma$. Случай $\gamma = 0$ и предельный шаг достаточно просты. Рассмотрим шаг $\gamma \to \gamma+1$. По индуктивному предположению $\langle q,b\rangle \in \Sigma^+_\gamma(X,t)$. Пусть множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbb{P}$, плотно в $\mathbb{P}$, $s \in \mathrm{PE}_t$ и $x \in X$. Поскольку $\langle p,a\rangle \in \Sigma^+_{\gamma+1}(X,t)$, по построению имеется более сильное суперусловие $\langle r,c\rangle \in \Sigma^+_\gamma(X,t)$, для которого $\langle r,c\rangle \le \langle p,a\rangle$, $r \in D$, $x \in \operatorname{ran} c$ и либо $s \in \operatorname{dom} b$, либо $r \Vdash s \notin t$. Но тогда $\langle r,c\rangle \le \langle q,b\rangle$, поэтому суперусловие $\langle r,c\rangle$ также обеспечивает выполнение и соотношения $\langle q,b\rangle \in \Sigma^+_{\gamma+1}(X,t)$.

(ii) Из $\langle q,a\rangle \in \mathbb{P}^+(X,t)$ следует, что суперусловие $\langle q,a\rangle$ принадлежит множеству $\Sigma_0^+(X,t)$ вместе с $\langle p,a\rangle$. Остается сослаться на (i). $\square$

## 4. Основная теорема

Еще одно определение предваряет наш главный результат.

Определение 8. Если множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathfrak{M}$, то через $a[G]$ обозначим функцию, заданную на множестве $\operatorname{dom} a[G] = \mathrm{PE}_t[G] = \{s \in \mathrm{PE}_t : s[G] \in t[G]\}$ равенством $a[G](s) = s[G]$ для всех имен $s \in \mathrm{PE}_t[G]$. Если $\Gamma \subseteq \mathbb{P}^+(X,t)$, то пусть

$$\Gamma{\downarrow} = \{p \in \mathbb{P} : \exists a(\langle p,a\rangle \in \Gamma)\} \quad (\text{проекция } \Gamma \text{ на } \mathbb{P}),$$

$$A[\Gamma] = \{a : \exists p(\langle p,a\rangle \in \Gamma)\} \quad (\text{все сопоставления в парах из } \Gamma),$$

$$a[\Gamma] = \bigcup A[\Gamma] \quad (\text{объединение всех сопоставлений в } \Gamma).$$

**Лемма 9.** *Если множество $G \subseteq \mathbb{P}$ $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathfrak{M}$, то $\operatorname{ran} a[G] = t[G]$.*

Сформулируем основную теорему этой статьи.

**Теорема 10** (ср. с утверждениями (I)–(IV) из введения). *В предположениях определения* 1 *выполнено следующее:*

(i) *неравенство $\Sigma^+(X,t) \neq \varnothing$ равносильно тому, что существует $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathfrak{M}$ множество $G \subseteq \mathbb{P}$, для которого $X = t[G]$;*

(ii) *если $G \subseteq \mathbb{P}$ $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathfrak{M}$ и $t[G] = X$, то*

$$G^+ = \{\langle p,a\rangle \in \Sigma^+(X,t) : p \in G \wedge a \subset a[G]\}$$

*есть множество, $\Sigma^+(X,t)$-генерическое над $\mathfrak{M}(X)$, и $G = G^+{\downarrow}$;*

(iii) *значит, в* (ii) *модель $\mathfrak{M}[G]$ — $\Sigma^+(X,t)$-генерическое расширение модели $\mathfrak{M}(X)$;*

(iv) *если $\Gamma \subseteq \Sigma^+(X,t)$ — $\Sigma^+(X,t)$-генерическое множество над $\mathfrak{M}(X)$, то множество $H = G^+{\downarrow} \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над моделью $\mathfrak{M}$, кроме того, $t[H] = X$ и $a[\Gamma] = a[H]$.*

Эта теорема будет доказана в разд. 5 и 6.

## 5. Лемма об ограничении

Здесь доказывается часть (i) теоремы 10. В частности, покажем, что если $X = t[G]$, где $G \subseteq \mathbb{P}$ — генерическое множество, то трансфинитная длина построения из определения 5 есть некоторый ординал из $\mathfrak{M}$ (ключевая лемма 13). Продолжаем рассуждать в условиях определения 1.

**Лемма 11.** *Пусть множество $G \subseteq \mathbb{P}$ $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathfrak{M}$ и $t[G] = X$. Если $\langle p,a\rangle \in \mathbb{P}^+(X,t)$, $a \subseteq a[G]$, и $p \in G$, то $\langle p,a\rangle \in \Sigma^+(X,t)$. В частности, если $p \in G$, то $\langle p,\varnothing\rangle \in \Sigma^+(X,t)$.*

Доказательство. Докажем индукцией по $\gamma$, что $\langle p,a\rangle \in \Sigma_\gamma^+(X,t)$. Пусть $\gamma = 0$. Согласно $(\operatorname{dom} a)$-полноте условия $p$ если $s, s' \in \operatorname{dom} a$, то $p$ решает формулу $s \in s'$. Если $p \Vdash s \in s'$, то $s[G] \in s'[G]$, поэтому $a(s) \in a(s')$, так как $a \subseteq a[G]$. Аналогично если $p \Vdash s \notin s'$, то $a(s) \notin a(s')$.

Шаг $\gamma \to \gamma+1$. Пусть, напротив, $\langle p,a\rangle \notin \Sigma_{\gamma+1}^+(X,t)$, но $\langle p,a\rangle \in \Sigma_\gamma^+(X,t)$ по индуктивному предположению. По определению существуют множество

$D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbb{P}$, плотное в $\mathbb{P}$, и такие элементы $s \in \mathrm{PE}_t$, $x \in X$, что ни одно суперусловие $\langle q, b\rangle \in \Sigma^+_\gamma(X,t)$ не удовлетворяет сразу всем соотношениям $\langle q, b\rangle \le \langle p, a\rangle$, $q \in D$, $x \in \operatorname{ran} b$ и либо $s \in \operatorname{dom} b$, либо $q \Vdash s \notin t$. Благодаря генеричности имеется условие $q \in G \cap D$, $q \le p$. Коль скоро $t[G] = X$, существует такое конечное сопоставление $b : (\operatorname{dom} b \subseteq \mathrm{PE}_t) \to X$, что

1) $a \subseteq b$, $x \in \operatorname{ran} b$,

2) $r[G] \in t[G]$ и $b(r) = r[G]$ для каждого имени $r \in \operatorname{dom} b$,

3) либо $s[G] \notin t[G]$, либо $s \in \operatorname{dom} b$.

Имеется более сильное условие $q' \in G \cap D$ такое, что если $s[G] \notin t[G]$, то $q' \Vdash s \notin t$ и, кроме того, условие $q'$ является $(\operatorname{dom} b)$-полным. Тогда $\langle q', b\rangle \in \Sigma^+_\gamma(X,t)$ по индуктивному предположению; противоречие.

Предельный шаг очевиден. □

**Лемма 12.** *Если $\langle p, a\rangle \in \Sigma^+(X,t)$, то существует $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathfrak{M}$ множество $G \subseteq \mathbb{P}$ такое, что $p \in G$ и $t[G] = X$.*

Доказательство. Как $\mathfrak{M}$, так и $X$ счетны, поэтому лемма 6 позволяет построить убывающую последовательность суперусловий

$$\langle p, a\rangle = \langle p_0, a_0\rangle \ge \langle p_1, a_1\rangle \ge \langle p_2, a_2\rangle \ge \dots$$

в $\Sigma^+(X,t)$ такую, что последовательность $\{p_n\}_{n\in\omega}$ пересекает каждое множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbb{P}$, плотное в $\mathbb{P}$. Тогда $G = \{p \in \mathbb{P} : \exists n (p_n \le p)\}$ — генерическое множество, кроме того, объединение $\varphi = \bigcup_n a_n : \operatorname{dom}\varphi \to X$ всех сопоставлений $a_n$ удовлетворяет условиям (1) $\operatorname{ran}\varphi = X$, $\operatorname{dom}\varphi \subseteq \mathrm{PE}_t$; (2) для каждого $s \in \mathrm{PE}_t$ либо $s \in \operatorname{dom}\varphi$ — тогда $s[G] \in t[G]$, либо $q \Vdash s \notin t$ для некоторого $q \in G$ — тогда $s[G] \notin t[G]$. Из-за транзитивности обоих множеств $t[G] = \{s[G] : s \in \operatorname{dom}\varphi\}$ и $X = \operatorname{ran}\varphi$ чтобы вывести $t[G] = X$, достаточно проверить, что $\varphi(s) \in \varphi(s') \iff s[G] \in s'[G]$ для всех $s, s' \in \operatorname{dom}\varphi$. По построению $\varphi$ имеется индекс $n$, для которого $s, s' \in \operatorname{dom} a_n$. По определению условие $p_n \in G$ $(\operatorname{dom} a_n)$-полно, так что $p_n$ решает $s \in s'$.

Если $p_n \Vdash s \in s'$, то $s[G] \in s'[G]$, а с другой стороны, имеем $\varphi(s) = a_n(s) \in a_n(s') = \varphi(s')$, поскольку $\langle p_n, a_n\rangle \in \Sigma^+_0(X,t)$.

Аналогично если $q \Vdash s \notin s'$, то $s[G] \notin s'[G]$ и $\varphi(s) \notin \varphi(s')$. □

Согласно ключевой лемме 13 если $\Sigma^+(X,t) \ne \varnothing$, то ординалы вида $\lambda(X,t)$, как в определении 5, ограничены в модели $\mathfrak{M}$.

**Лемма 13** (лемма об ограничении). *Существует ординал $\lambda^*(t) \in \mathfrak{M}$ такой, что $\lambda(t[G], t) < \lambda^*(t)$ для любого $\mathbb{P}$-генерического над $\mathfrak{M}$ множества $G \subseteq \mathbb{P}$. Поэтому $\Sigma^+(t[G], t) \in \mathfrak{M}$ для любого такого множества $G$.*

Доказательство. Пусть $G \subseteq \mathbb{P}$ $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathfrak{M}$. Тогда $X = t[G] \in \mathfrak{M}[G]$, так что $\lambda(X,t)$ — ординал в $\mathfrak{M}$, причем имеются ординал $\lambda_p(t) \in \mathfrak{M}$ и условие $p \in G$ такие, что $\lambda(X,t) = \lambda_p(t)$. Положим $\lambda^*(t) = \sup_{p\in\mathbb{P}} \lambda_p(t)$. Второе утверждение леммы следует из первого, так как $\Sigma^+(X,t)$ есть результат индуктивного построения длины $\lambda^*(t)$ в $\mathfrak{M}$. □

**Следствие 14** (утверждение (i) теоремы 10). *В условиях теоремы* 10 *следующие три предложения равносильны:*

(i) *найдется такое $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathfrak{M}$ множество $G \subseteq \mathbb{P}$, для которого $t[G] = X$;*

(ii) $\Sigma^+(X,t) \ne \varnothing$;

(iii) $\Sigma^+_{\lambda^*(t)}(X,t) = \Sigma^+_{\lambda^*(t)+1}(X,t) \neq \varnothing$.

Доказательство. Используем леммы 11–13. $\square$

## 6. Доказательство основной теоремы

Докажем утверждения (ii)–(iv) теоремы 10. Продолжаем рассуждать в предположениях определения 1.

**Лемма 15** (теорема 10(iv)). *Если $\Gamma \subseteq \Sigma^+(X,t)$ — $\Sigma^+(X,t)$-генерическое над $\mathfrak{M}(X)$ множество, то множество $H = \Gamma{\downarrow} \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathfrak{M}$, кроме того, $t[H] = X$ и $a[\Gamma] = a[H]$.*

Доказательство. Согласно лемме 6 если множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbb{P}$, плотно в $\mathbb{P}$, то множество $D^* = \{\langle p,a\rangle \in \Sigma^+(X,t) : p \in D\}$ плотно в $\Sigma^+(X,t)$ и принадлежит модели $\mathfrak{M}(X)$. Отсюда следует генеричность множества $H$.

Далее, если $\langle p,a\rangle \in \Gamma \subseteq \Sigma^+(X,t)$, то по определению $\operatorname{dom} a \subseteq \mathrm{PE}_t$ — конечное множество, и если $s \in \operatorname{dom} a$, то $p \Vdash s \in t$. Так как $p \in H$, имеем $s[H] \in t[H]$, откуда $s \in \mathrm{PE}_t[H]$. С другой стороны, если $s \in \mathrm{PE}_t[H]$ и $x \in X$, то по лемме 6 имеется суперусловие $\langle q,b\rangle \in \Gamma$, для которого $s \in \operatorname{dom} b$ и $x \in \operatorname{ran} b$. Поэтому $a[\Gamma]$ отображает $\mathrm{PE}_t[H]$ на $X$.

По определению если $\langle p,a\rangle \in \Gamma$ и $s,s' \in \operatorname{dom} a$, то $p$ решает каждую из формул $s \in s'$ и $s = s'$, причем соотношение $p \Vdash s \in s'$ равносильно тому, что $a(s) \in a(s')$, и то же для $=$. Следовательно, если $s,s' \in \mathrm{PE}_t[H]$, то соотношение $s[H] = s'[H]$ равносильно $a[\Gamma](s) = a[\Gamma](s')$. Заключаем, что $a[\Gamma] = a[H]$.

Окончательно, $t[H] = \operatorname{ran} a[H] = \operatorname{ran} a[\Gamma] = X$. $\square$

**Лемма 16** (теорема 10(ii)). *Если $G \subseteq \mathbb{P}$ — $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathfrak{M}$ множество и $X = t[G]$, то множество*

$$G^+ = \{\langle p,a\rangle \in \Sigma^+(X,t) : p \in G \wedge a \subset a[G]\}$$

*$\Sigma^+(X,t)$-генерическое над $\mathfrak{M}(X)$, при этом $G = G^+{\downarrow}$.*

Доказательство. Пусть имеется условие $p_0 \in G$, которое вынуждает противоположное, т. е. для любого $\mathbb{P}$-генерического над $\mathfrak{M}$ множества $H \subseteq \mathbb{P}$ если $X = t[H]$ и $p_0 \in H$, то множество $H^+$ не является $\Sigma^+(X,t)$-генерическим над моделью $\mathfrak{M}(X)$. Согласно лемме 11 имеем $\langle p_0,\varnothing\rangle \in \Sigma^+(X,t)$.

Пусть $\Gamma \subseteq \Sigma^+(X,t)$ является $\Sigma^+(X,t)$-генерическим над $\mathfrak{M}(X)$ и содержит $\langle p_0,\varnothing\rangle$. Тогда $H = \Gamma{\downarrow}$ будет $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathfrak{M}(X)$ и $t[H] = X$ по лемме 15. Остается проверить, что $\Gamma = H^+$, т. е. для любого суперусловия $\langle p,a\rangle \in \Sigma^+(X,t)$ вывести, что $\langle p,a\rangle \in \Gamma$ равносильно $p \in H \wedge a \subset a[H]$.

Если $\langle p,a\rangle \in \Gamma$, то по определению $p \in H = \Gamma{\downarrow}$ и $a \subseteq a[\Gamma]$, но $a[\Gamma] = a[H]$ согласно лемме 15.

Обратно, пусть $\langle p,a\rangle \in \Sigma^+(X,t)$, $p \in H$, и $a \subset a[H] = a[\Gamma]$. Утверждаем, что $\langle p,a\rangle \in \Gamma$. Если $s \in \operatorname{dom} a$, то $a \in \operatorname{dom} a[\Gamma]$, поэтому по определению существует суперусловие $\langle p_s,a_s\rangle \in \Gamma$, для которого $a \in \operatorname{dom} a_s$. Следовательно, имеется и такое суперусловие $\langle q,b\rangle \in \Gamma$, что $q \leq p$ и $\operatorname{dom} a \subseteq \operatorname{dom} b$. Тогда $a \subset b$, так как $a,b \subset a[\Gamma]$. Тем самым суперусловие $\langle q,b\rangle \in \Gamma$ сильнее, чем $\langle p,a\rangle \in \Sigma^+(X,t)$, откуда $\langle p,a\rangle \in \Gamma$. $\square$

**Лемма 17** (теорема 10(iii)). *Если множество $G \subseteq \mathbb{P}$ $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathfrak{M}$ и $X = t[G]$, то модель $\mathfrak{M}[G]$ есть $\Sigma^+(X,t)$-генерическое расширение модели $\mathfrak{M}(X)$.*

Доказательство. Имеем $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}(X)[G^+]$ в условиях леммы 16. $\square$

Этим доказательство теоремы 10 закончено.

## 7. Пример

Продолжаем рассуждать в предположениях определения 1. Положим

$$\Sigma(X,t) = \Sigma^+(X,t)\!\downarrow = \{p \in \mathbb{P} : \langle p, \varnothing\rangle \in \Sigma^+(X,t)\}.$$

Тогда $\Sigma(X,t) \subseteq \mathbb{P}$, и если множество $G \subseteq \mathbb{P}$ $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathfrak{M}$ и $X = t[G]$, то $G \subseteq \Sigma(X,t)$ по лемме 11. Но верно ли, по аналогии с утверждением (II) из введения, что множество $G$ является $\Sigma(X,t)$-генерическим над $\mathfrak{M}(X)$? Следующий пример дает отрицательный ответ.

Пример 18. Возьмем в качестве $\mathbb{P}$ счетную степень форсинга Коэна с конечной поддержкой. Таким образом, условия $p \in \mathbb{P}$ являются функциями с конечной областью определения $\operatorname{dom} p \subseteq \omega \times \omega$ и с областью значений $\operatorname{ran} p \subseteq \omega$. Любое генерическое множество $G \subseteq \mathbb{P}$ присоединяет объекты $x_n[G] \in \omega^\omega$, определенные так, что $x_n[G](i) = r$, когда существует такое условие $p \in G$, что $p(n,i) = r$. Через $\breve{x}_n$ обозначим каноническое имя для объекта $x_n[G] = \breve{x}_n[G]$, а через $t$ — имя всего множества этих объектов $t[G] = \{\breve{x}_n[G] : n \in \omega\}$. Другими словами, $\mathfrak{M}(t[G])$ — это симметрическое коэновское расширение, в котором аксиома выбора AC неверна, а $t[G] \subseteq \omega^\omega$ — бесконечное конечное по Дедекинду множество в модели $\mathfrak{M}(t[G])$.

Множества вида $t[G]$ нетранзитивны, поэтому, чтобы соответствовать определению 1, определим транзитивное замыкание $U(X) = X \cup U$, где

$$U = \omega \cup \{\{m,n\} : m,n \in \omega\} \cup \{\langle m,n\rangle : m,n \in \omega\},$$

для любого $X \subseteq \omega^\omega$ и соответственно через $t'$ обозначим каноническое имя транзитивного множества $t'[G] = \{\breve{x}_n[G] : n \in \omega\} \cup U$.

Коль скоро $U \in \mathfrak{M}$, можем отождествлять каждый элемент $u \in U$ с его каноническим именем $\breve{u}$. Тогда $\mathrm{PE}_{t'} = \{\breve{x}_n : n \in \omega\} \cup U$.

**Лемма 19.** *Если $p \in \mathbb{P}$ и $n,k,r \in \omega$, то соотношение $p \Vdash \breve{x}_n[G](k) = r$ равносильно тому, что $\langle n,k\rangle \in \operatorname{dom} p$ и $p(n,k) = r$.*

Если $X \subseteq \omega^\omega$, то множество суперусловий $\mathbb{P}^+(X \cup U, t')$ состоит по определению 3 из всех таких пар $\langle p, a\rangle$, что

1) $p \in \mathbb{P}$,

2) $a$ — функция, $\operatorname{dom} a \subseteq \{\breve{x}_n : n \in \omega\} \cup U$ — конечное множество,

3) $\operatorname{ran} a \subseteq X \cup U$,

4) $a(u) = u$ для всех $u \in U \cap \operatorname{dom} a$ и $a(\breve{x}_n) \in X$ для всех $\breve{x}_n \in \operatorname{dom} a$,

5) (полнота из определения 3) если имя $\breve{x}_n$ и пара $\langle k,r\rangle$ $(n,k,r \in \omega)$ принадлежат $\operatorname{dom} a$, то условие $p$ решает формулу «$\breve{x}_n[G](k) = r$», или, что равносильно, $\langle n,k\rangle \in \operatorname{dom} p$.

По определению 8 если множество $G \subseteq \mathbb{P}$ — генерическое над $\mathfrak{M}$, то функция

$$a[G] : \{\breve{x}_n : n \in \omega\} \cup U \xrightarrow{\text{на}} X \cup U$$

определена через $a[G](u) = u$ для $u \in U$, но $a[G](\breve{x}_n) = \breve{x}_n[G]$ для всех $n$.

Напомним, что $\Sigma(X \cup U, t') = \{p \in \mathbb{P} : \langle p, \varnothing\rangle \in \Sigma^+(X \cup U, t')\}$.

**Лемма 20.** *В рассматриваемом случае если $G \subseteq \mathbb{P}$ есть $\mathbb{P}$-генерическое множество над $\mathfrak{M}$ и $X = t[G]$, то*

(i) $\Sigma(X \cup U, t') = \mathbb{P}$,

(ii) *множество* $\Sigma^+(X \cup U, t')$ *состоит из всех таких суперусловий* $\langle p, a \rangle \in \mathbb{P}^+(X \cup U, t')$, *что если имя* $\breve{x}_n$ *и пара* $\langle k, r \rangle$ *принадлежат* $\operatorname{dom} a$, *то* 1) $\langle n, k \rangle \in \operatorname{dom} p$, 2) $p(n,k) = r$ *равносильно* $a(\breve{x}_n)(k) = r$.

Доказательство. (i) Пусть $p \in \mathbb{P}$. По лемме 11 для вывода $p \in \Sigma(X \cup U, t')$ нужно найти такое $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathfrak{M}$ множество $G' \subseteq \mathbb{P}$, что $t[G'] = X$ и $p \in G'$. Множество $t[G] = \{\breve{x}_m[G] : m \in \omega\}$ топологически плотно в $\omega^\omega$. Значит, имеется такая биекция $\pi : N = \{n : \exists k(\langle n, k \rangle \in \operatorname{dom} p)\} \to \omega$, что если $\langle n, k \rangle \in \operatorname{dom} p$ (тогда $n \in N$), то $\breve{x}_{\pi(n)}[G](k) = p(n,k)$.

Используя инвариантность $\mathbb{P}$ относительно перестановок, получаем такое генерическое множество $G' \subseteq \mathbb{P}$, что $\breve{x}_{\pi(n)}[G] = \breve{x}_n[G']$ для всех $n \in N$, $t[G'] = t[G] = X$ и даже $x_m[G] = x_m[G']$ для всех, кроме конечного числа, индексов $m \in \omega$. Тогда $p \in G'$, что и требовалось.

(ii) Доказательство аналогично. $\square$

Согласно (i) форсинг $\Sigma(X \cup U, t')$ тождествен данному форсингу $\mathbb{P}$. Но множество $G$ не может быть $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathfrak{M}(X)$ и даже над любой меньшей моделью $\mathfrak{M}[\breve{x}_n[G]]$, так как $X = t[G] = \{\breve{x}_n[G] : n \in \omega\}$. Отсюда следует отрицательный ответ на вопрос в начале этого раздела.

Используя (ii), можно доказать, что $\Sigma^+(X \cup U, t')$ содержит коинициальное подмножество в $\mathfrak{M}(X)$, порядково изоморфное множеству $\mathbf{BColl}(\{\breve{x}_n : n \in \omega\}, X)$ (биективный свертывающий форсинг), состоящему из всех конечных частичных биекций $\{\breve{x}_n : n \in \omega\} \to X$.

**Следствие 21.** *В рассматриваемом случае вся модель* $\mathfrak{M}[G]$ *является* $\mathbf{BColl}(\{\breve{x}_n : n \in \omega\}, X)$-*генерическим расширением модели* $\mathfrak{M}(X)$.

## 8. О доказательстве Григорьева

Чтобы сравнить наш подход с подходом к промежуточным моделям в работе [1], кратко изложим здесь данное Григорьевым доказательство следующего, более абстрактного, аналога леммы 17.

**Теорема 22.** *В предположениях определения* 1 *если множество* $G \subseteq \mathbb{P}$ $\mathbb{P}$-*генерическое над* $\mathfrak{M}$ *и* $X = t[G]$, *то* $\mathfrak{M}[G]$ — *генерическое расширение модели* $\mathfrak{M}(X)$.

Доказательство основано на следующей лемме (теорема 2 в [1, 2.14]).

**Лемма 23.** *Пусть* $\mathbb{P}$ — *форсинг в* $\mathfrak{M}$, *а множество* $G \subseteq \mathbb{P}$ *генерическое над моделью* $\mathfrak{M}$. *Если* $x \in \mathfrak{M}[G]$ *и* $x \subseteq \mathfrak{M}$, *то модель* $\mathfrak{M}[x]$ — *генерическое расширение модели* $\mathfrak{M}$.

Доказательство (краткое, детали см. в [1, 2.13, 2.14]). Возьмем любое имя $t \in \mathfrak{M}$, для которого $x = t[G]$. Не ограничивая общности, считаем, что форсинг $\mathbb{P}$ равен $\mathscr{B} \setminus \{0\}$, где $\mathscr{B}$ — полная булева алгебра (ПБА) в $\mathfrak{M}$. Через $\mathscr{A}$ обозначим полную субалгебру, порожденную элементом $t$; это наименьшая ПБА $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, содержащая все множества вида $[\![\dot{y} \in t]\!]$, $y \in \mathfrak{M}$. Пусть $\mathbb{Q} = \mathscr{A} \setminus \{0\}$. Если множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathfrak{M}$, то $H = G \cap \mathbb{Q}$ будет $\mathbb{Q}$-генерическим над $\mathfrak{M}$, причем $\mathfrak{M}[x] = \mathfrak{M}[H]$. $\square$

Доказательство теоремы 22. Возьмем ординал $\alpha \in \mathfrak{M}$, больший, чем ранг множества $X$ по фон Нейману, и пусть $Y = V_\alpha \cap \mathfrak{M}(X)$ (тогда $X \subseteq Y$). Рассмотрим множество $H \subseteq \mathbb{C} = \mathbf{Coll}(\omega, Y)$, генерическое над $\mathfrak{M}[G]$. Тогда

$\mathfrak{M}[G][H]$ — генерическое расширение модели $\mathfrak{M}$ по теореме о двукратном итерированном форсинге, причем $\mathfrak{M}(X)[H] = \mathfrak{M}[r]$ для некоторого $r \in \omega^\omega$. Применив утверждение (III) введения, заключаем, что вся модель $\mathfrak{M}[G][H]$ есть генерическое расширение модели $\mathfrak{M}[r]$. Но $\mathfrak{M}[r] = \mathfrak{M}(X)[H]$ — генерическое расширение модели $\mathfrak{M}(X)$, поэтому $\mathfrak{M}[G][H]$ — генерическое расширение $\mathfrak{M}(X)$ по той же теореме о двукратном форсинге.

Имеем $G \subseteq \mathfrak{M}(X)$ и $\mathfrak{M}(X) \subseteq \mathfrak{M}(X)[G] = \mathfrak{M}[G] \subseteq \mathfrak{M}[r][H]$. Итак, $\mathfrak{M}[G]$ — промежуточная модель между моделью $\mathfrak{M}(X)$ и ее генерическим расширением $\mathfrak{M}[r]G[H]$. Остается применить лемму 23 к моделям $\mathfrak{M}(X) \subseteq \mathfrak{M}[G] \subseteq \mathfrak{M}[G][H]$ в роли моделей $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}[x] \subseteq \mathfrak{M}[G]$. $\square$

## 9. Приложение: борелевость некоторых множеств

Наши результаты могут быть использованы для доказательства утверждений о борелевости некоторых множеств, для которых обычные методы дают лишь принадлежность более широкому классу $\mathbf{\Sigma}^1_1$ аналитических (или суслинских, см. [3, гл. 4; 5]) множеств. Ограничимся одним результатом, который сначала сформулируем неформально.

$(*)$ *Если $\mathfrak{M}$ — счетная транзитивная модель теории* **ZFC**, *то множество $S(\mathfrak{M})$ всех множеств, принадлежащих генерическим расширениям модели $\mathfrak{M}$, является борелевским.*

Неформальность состоит в том, что для точного определения того пространства, о борелевости $S(\mathfrak{M})$ в котором идет речь, потребовалось бы больше места, чем мы можем здесь уделить. Поэтому рассмотрим лишь частный (но достаточно представительный) случай множества $S'(\mathfrak{M}) = S(\mathfrak{M}) \cap \mathscr{P}(\omega^\omega)$, состоящего из всех (по необходимости не более чем счетных) множеств $R \subseteq \mathscr{P}(\omega^\omega)$, принадлежащих генерическим расширениям модели $\mathfrak{M}$.

Нам потребуется кодировка счетных множеств $R \subseteq \mathscr{P}(\omega^\omega)$. Если $y \in \omega^\omega$, то пусть $R_y = \{(y)_n : n \in \omega\} \setminus \{(y)_0\}$, где $(y)_n \in \omega^\omega$ и $(y)_n(k) = y(2^n(2k+1)-1)$ для всех $n$ и $k$. Таким образом, $\{R_y : y \in \omega^\omega\}$ — множество всех не более чем счетных множеств $R \subseteq \omega^\omega$ (включая пустое множество).

**Теорема 24.** *Если $\mathfrak{M}$ — счетная транзитивная модель теории* **ZFC**, *то множество $W = \{y \in \omega^\omega : R_y \in S(\mathfrak{M})\}$ всех кодов множеств $X \subseteq \mathscr{P}(\omega^\omega)$, принадлежащих генерическим расширениям модели $\mathfrak{M}$, борелевское.*

Доказательство. Пусть $\vartheta$ — наименьший ординал, не принадлежащий модели $\mathfrak{M}$. Определим множество $U \in \mathfrak{M}$, как в примере 18. Согласно следствию 14 если $y \in \omega^\omega$, то для выполнения $y \in W$ необходимо и достаточно, чтобы существовали форсинг $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ и $\mathbb{P}$-имя $t \in \mathfrak{M}$, для которых выполнено по выбору одно (любое) из следующих двух равносильных требований:

(A) существуют ординал $\lambda < \vartheta$ и последовательность множеств $\Sigma^+_\gamma(X, t')$, $\gamma \le \lambda + 1$, где $X = R_y \cup U$, как в определении 5, такие, что $\Sigma^+_\lambda(X, t') = \Sigma^+_{\lambda+1}(X, t') \neq \varnothing$;

(B) для любого ординала $\lambda < \vartheta$ и любой последовательности множеств $\Sigma^+_\gamma(X, t')$, $\gamma \le \lambda + 1$, где $X = R_y \cup U$, как в определении 5, если $\Sigma^+_\lambda(X, t') = \Sigma^+_{\lambda+1}(X, t')$, то $\Sigma^+_\lambda(X, t') \neq \varnothing$.

В варианте (A) получаем $\mathbf{\Sigma}^1_1$-определение для $W$, а в варианте (B) — $\mathbf{\Pi}^1_1$-определение. Коль скоро модель $\mathfrak{M}$ счетна, кванторы по $\mathbb{P}, t, \lambda$ не нарушают борелевости. $\square$

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Grigorieff S.* Intermediate submodels and generic extensions of set theory // Ann. Math. 1975. V. 101. P. 447–490.
**2.** *Solovay R. M.* A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. Math. 1970. V. 92. P. 1–56.
**3.** *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы. М.: МЦНМО, 2013.
**4.** *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* Эффективная минимальная кодировка несчетных множеств // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1074–1086.
**5.** *Kanovei V.* Borel equivalence relations: structure and classification. New York: Amer. Math. Soc., 2008. (Univ. Lect. Ser. AMS; V. 44).

*Статья поступила 12 сентября 2014 г., окончательный вариант — 24 июля 2015 г.*

Кановей Владимир Григорьевич
Институт проблем передачи информации РАН,
Большой Каретный пер., 19, стр. 1, Москва 127051;
Институт экономики и финансов,
ул. Новосущевская, 22, Москва 127994
`kanovei@iitp.ru`

Любецкий Василий Александрович
Институт проблем передачи информации РАН,
Большой Каретный пер., 19, стр. 1, Москва 127051
`lyubetsk@iitp.ru`