Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 517.95

О ПРОНИЦАЕМЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА — БЕЛЬТРАМИ

Т. Ш. Кальменов, Д. Сураган

Аннотация. Представлены «проницаемые» краевые условия потенциала для оператора Лапласа — Бельтрами, рассматриваемого в области Ω на поверхности единичной сферы S в $\mathbb{R}^3$. Проницаемость краевых условий означает, что решение краевой задачи в Ω должно совпадать с решением уравнения Лапласа — Бельтрами, рассматриваемого на всей сфере без краевых условий.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.609

Ключевые слова: оператор Лапласа — Бельтрами, граничное условие, объемный потенциал, потенциал двойного слоя.

Введение. Начнем с описания соответствующей физической проблемы и обозначений. Затем рассмотрим аналог ньютоновского потенциала для оператора Лапласа — Бельтрами на сфере. Нашей целью является нахождение «проницаемых» краевых условий потенциала для оператора Лапласа — Бельтрами на поверхности единичной сферы S в $\mathbb{R}^3$.

Работа частично мотивирована исследованиями о движении точечных вихрей на сфере с непроницаемой границей (с граничным условиям Дирихле). Кидамби и Ньютон [1] рассматривали подобную задачу методом изображений. Крауди [2–4] также исследовал движение точечных вихрей на сфере. Он использовал конформное отображение в комплексную плоскость для изучения движения вихря на сфере. В [5] Гемрих и др. изучали похожую модельную задачу, для которой могут быть применимы методы из [1, 4]. В этой работе мы используем методы граничного интегрального уравнения в поисках «проницаемого» краевого условия для уравнения Лапласа — Бельтрами.

Физические предпосылки и обозначения. Подчеркнем известные физические свойства феномена движения вихря в несжимаемой жидкости на поверхности единичной сферы S. Рассмотрим ограниченную вихревую область, обозначая ее через $\Omega \subseteq S$, с односвязной границей γ. Пусть Ω_1 — остальная часть поверхность сферы $S\backslash\Omega$, на которой функция вихря ω равна нулю.

Имеет место следующее соотношение между функцией тока ψ и функцией вихря ω:

$$-\Delta_S\psi(x) = \omega(x) \quad \forall x \in \Omega, \tag{1}$$

где Δ_S — оператор Лапласа — Бельтрами и функция вихря должна удовлетворять условию ограниченности Гаусса

$$\int\limits_{\Omega} \omega\, dx = 0. \tag{2}$$

Мы ищем решение уравнения (1) в виде, аналогичном ньютоновскому потенциалу

$$\psi(x) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon(x,y)\omega(y)\,dy. \tag{3}$$

Это напоминает задачи, возникающие в процессе нахождения решения задачи на сфере в области без краевых условий [6, 7].

В работах [8, 9] мы нашли граничные условия ньютоновского потенциала и показали некоторые применения в спектральной теории. Аналогичные методы использованы в [10, 11].

В этой работе нашей целью является нахождение корректной краевой задачи для оператора Лапласа — Бельтрами в Ω, которая имеет единственное решение в виде потенциала (3) — функции тока для вихревого движения. Граничное условие должно быть таким, что функция тока, приходящая на границу области, должна проходить через нее без какого-либо изменения.

Дополнительно требуем от функции вихря выполнения следующего математического условия:

$$\int\limits_{\Omega} u\omega\,dy = 0. \tag{4}$$

где $u = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2\pi} \ln|x-y|\,dy$.

Если Ω_1 вырожденная, т. е. площадь Ω_1 равна нулю, то $\Omega \equiv S$ и

$$u = \int\limits_{S} \frac{1}{2\pi} \ln|x-y|\,dy = 0$$

и условие (4) отпадает, т. е. на поверхности всей сферы физические свойства задачи сохраняются.

Точка на сфере S может быть представлена в терминах сферических углов:

$$x(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \in S, \quad \varphi \in [0,2\pi),\ \theta \in [0,\pi].$$

В сферических координатах оператор Лапласа — Бельтрами Δ_S определяется так:

$$\Delta_S\psi(x) = \left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]\psi(x(\varphi,\theta)). \tag{5}$$

Напомним некоторые тождества на сфере. Пусть e_r, e_θ, e_φ — единичные векторы в сферических координатах. Градиент f на S можем определить как

$$\nabla_S f(x) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}e_\varphi + \frac{\partial f}{\partial\theta}e_\theta.$$

Определим (см. [5])

$$\underline{\mathrm{curl}}_S f(x) = -\frac{\partial f}{\partial\theta}e_\varphi + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}e_\theta.$$

Рассмотрим замкнутую гладкую кривую γ на S, которая делит S на две части: Ω и Ω_1, так что γ — граница Ω.

Рассмотрим аналог ньютоновского потенциала для оператора Лапласа — Бельтрами

$$\psi(x) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon(x,y)\omega(y)\,dy, \quad \omega \in L_2(\Omega). \tag{6}$$

Учитывая условия ограниченности Гаусса (2), в соответствии с физическим смыслом в [6] выбираем ядро потенциала в виде

$$\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\log|1-\langle x,y\rangle| = -\frac{1}{4\pi}\log|1-\cos(\varphi-\varphi_y)\sin\theta\sin\theta_y - \cos\theta\cos\theta_y|,$$

которое удовлетворяет уравнению

$$-\Delta_S\varepsilon(x,y) = \delta(x-y) - \frac{1}{4\pi}$$

для $x = x(\varphi,\theta)$, $y = y(\varphi_y,\ \theta_y) \in S$, $(\varphi,\theta) \neq (\varphi_y,\theta_y)$. Следовательно, как в теории потенциалов для уравнения Лапласа, можем определить следующие два потенциала.

Определение 1. *Потенциалом простого слоя с гладкой функцией плотности* σ называется слабо сингулярный линейный интеграл:

$$(V\sigma)(x) := \alpha\int\limits_{\gamma} \varepsilon(x,y)\underline{\mathrm{curl}}_S\sigma(y)t(y)\,ds_y, \quad x \notin \gamma, \tag{7}$$

где $t(y)$ — единичный касательный вектор к γ в точке y.

Определение 2. *Потенциалом двойного слоя с гладкой функцией плотности* μ называется сингулярный линейный интеграл

$$(W\mu)(x) := \alpha\int\limits_{\gamma} \mu(y)\underline{\mathrm{curl}}_S\varepsilon(x,y)t(y)\,ds_y, \quad x \notin \gamma, \tag{8}$$

где $t(y)$ — единичный касательный вектор к γ в точке y.

Согласно классической теории потенциала любое решение уравнения Лапласа — Бельтрами может быть записано в виде суммы потенциалов (6)–(8). Однако для достижения цели этой работы мы используем потенциалы простого и двойного слоя для выражения краевого условия потенциала (6) на γ.

Потенциал простого слоя (7) как слабо сингулярный линейный интеграл непрерывен вдоль γ, и, как в случае потенциала двойного слоя для уравнения Лапласа, потенциал (8) имеет скачок на γ. Доказательство проводится аналогично случаю уравнения Лапласа методом изоляции сингулярных точек. Доказательства этих свойств потенциалов читатель может найти в работе [5].

Основной результат и доказательство. Основным результатом этой работы является

Теорема. *Пусть выполнены предположения* (2), (4) *и* ω *— произвольная функция класса* $L_2(\Omega)$. *Тогда потенциал* (6) *удовлетворяет граничному условию*

$$-\frac{\psi(x)}{2} + \int\limits_{\gamma} \psi(y)\underline{\mathrm{curl}}_S\varepsilon(x,y)t(y)\,ds_y - \int\limits_{\gamma} \varepsilon(x,y)\underline{\mathrm{curl}}_S\psi(y)t(y)\,ds_y = 0, \quad x \in \gamma. \tag{9}$$

Обратно, если функция $\psi \in W_2^2(\Omega)$ *удовлетворяет уравнению*

$$-\Delta_S\psi(x) = \omega(x) \quad \forall x \in \Omega \subset S \tag{10}$$

и граничному условию (9), *то она определяет потенциал* (6), *т. е.*

$$\psi(x) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon(x,y)\omega(y)\,dy, \quad x \in \Omega.$$

Замечание 1. Как известно, неоднородное уравнение Лапласа — Бельтрами (10), рассматриваемое на всей поверхности сферы S, имеет единственное решение без привлечения краевых условий. Нами рассматривается уравнение Лапласа — Бельтрами в области Ω на поверхности единичной сферы S в $\mathbb{R}^3$. Краевые условия (9) на границе γ таковы, что, во-первых, решение задачи внутри области Ω существует и единственно, а во-вторых, это решение совпадает с решением уравнения Лапласа — Бельтрами, рассматриваемого на всей сфере без краевых условий. Поэтому краевое условие (9) для уравнения Лапласа — Бельтрами (9) мы называем *проницаемым краевым условием.*

Доказательство теоремы. Предполагая сначала, что ψ принадлежит $C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \gamma)$, непосредственным вычислением при любом $x \in \Omega$ находим

$$\begin{aligned}\psi(x) = \int\limits_{\Omega} \varepsilon(x,y)\omega(y)\,dy &= \int\limits_{\Omega} \varepsilon(x,y)(-\Delta_s\psi(y))\,dy \\ &= \int\limits_{\Omega} \psi(y)(-\Delta_s\varepsilon(x,y))\,dy + \int\limits_{\gamma} \psi(y)\underline{\mathrm{curl}}_S\varepsilon(x,y)t(y)\,ds_y \\ &\quad - \int\limits_{\gamma} \varepsilon(x,y)\underline{\mathrm{curl}}_S\psi(y)t(y)\,ds_y \\ &= \psi(x) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \psi(y)\,dy + \int\limits_{\gamma} \psi(y)\underline{\mathrm{curl}}_S\varepsilon(x,y)t(y)\,ds_y \\ &\quad - \int\limits_{\gamma} \varepsilon(x,y)\underline{\mathrm{curl}}_S\psi(y)t(y)\,ds_y,\end{aligned}$$

где $t(y)$ — единичный касательный вектор к γ в точке y. Отсюда

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \psi(y)\,dy + \int\limits_{\gamma} \psi(y)\underline{\mathrm{curl}}_S\varepsilon(x,y)t(y)\,ds_y - \int\limits_{\gamma} \varepsilon(x,y)\underline{\mathrm{curl}}_S\psi(y)t(y)\,ds_y. \tag{11}$$

Учитывая условия ограниченности Гаусса (2) и (4), вычислим

$$\int\limits_{\Omega} \psi(y)\,dy = \int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \varepsilon(y,x)\omega(x)\,dxdy. \tag{12}$$

Перейдем к физическим сферическим координатам:

$$x(\varphi,\theta) = (x_1,x_2,x_3) = (\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta),$$

$$y(\varphi,\theta) = (y_1,y_2,y_3) = (\cos\varphi_y\sin\theta_y, y_2 := \sin\varphi_y\sin\theta_y, \cos\theta_y),$$

$$\varphi,\varphi_y \in [0,2\pi), \quad \theta,\theta_y \in [0,\pi].$$

Имеем $|y-x|^2 = 2(1-\langle y,x\rangle)$, где $\langle y,x\rangle = \cos(\varphi-\varphi_y)\ \sin\theta\sin\theta_y + \cos\theta\cos\theta_y$. Следовательно,

$$-\frac{1}{2\pi}\log|y-x| = -\frac{1}{4\pi}(\log(1-\langle y,x\rangle) + \log 2),$$

т. е.

$$\varepsilon(y,x)=\frac{1}{4\pi}\log 2-\frac{1}{2\pi}\log|y-x|,\quad y,x\in S.$$

Подставим последнее выражение в (12):

$$\int\limits_{\Omega}\psi(y)\,dy=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{4\pi}\log 2-\frac{1}{2\pi}\log|y-x|\right)\omega(x)\,dxdy.$$

Учитывая условия ограниченности Гаусса (2) и (4), получим

$$\int\limits_{\Omega}\psi(y)\,dy=0. \tag{13}$$

Тем самым из (11) находим

$$\int\limits_{\gamma}\psi(y)\underline{\mathrm{curl}}_S\varepsilon(x,y)t(y)\,ds_y-\int\limits_{\gamma}\varepsilon(x,y)\underline{\mathrm{curl}}_S\psi(y)t(y)\,ds_y=0,\quad x\in\Omega. \tag{14}$$

Используя свойства потенциала простого и двойного слоя [6], из (14) при $\Omega\ni x\to\gamma$ находим

$$-\frac{\psi(x)}{2}+\int\limits_{\gamma}\psi(y)\underline{\mathrm{curl}}_S\varepsilon(x,y)t(y)\,ds_y-\int\limits_{\gamma}\varepsilon(x,y)\underline{\mathrm{curl}}_S\psi(y)t(y)\,ds_y=0,\quad x\in\gamma. \tag{15}$$

Предельным переходом несложно показать, что формула (15) остается справедливой для всех $\psi\in W_2^2(\Omega)$.

Таким образом, объемный потенциал (6) удовлетворяет граничному условию (9).

Обратно, покажем, что если функция $\psi_1\in W_2^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению

$$-\Delta_S\psi_1(x)=\omega(x)\quad\forall x\in\Omega \tag{16}$$

и граничному условию

$$-\frac{\psi_1(x)}{2}+\int\limits_{\gamma}\psi_1(y)\underline{\mathrm{curl}}_S\varepsilon(x,y)t(y)\,ds_y-\int\limits_{\gamma}\varepsilon(x,y)\underline{\mathrm{curl}}_S\psi_1(y)t(y)\,ds_y=0,\quad x\in\gamma, \tag{17}$$

то она совпадает с потенциалом (6).

Действительно, если не так, то функция $\Psi=\psi-\psi_1\in W_2^2(\Omega)$, где ψ — потенциал (6), удовлетворяет однородному уравнению

$$\Delta_S\Psi(x)=0,\quad x\in\Omega, \tag{18}$$

$$-\frac{\Psi(x)}{2}+\int\limits_{\gamma}\Psi(y)\underline{\mathrm{curl}}_S\varepsilon(x,y)t(y)\,ds_y-\int\limits_{\gamma}\varepsilon(x,y)\underline{\mathrm{curl}}_S\Psi(y)t(\mu y)\,ds_y=0,\quad x\in\gamma. \tag{19}$$

Сохраняя гладкость, продолжим функцию Ψ на всю поверхность S, т. е.

$$\Delta_S\widetilde{\Psi}(x)=0,\quad x\in S \tag{20}$$

и $\Psi\equiv\widetilde{\Psi}$, $x\in\Omega\cup\gamma$. Известно, что решением уравнения (20) может быть только константа, т. е.

$$\Psi=\mathrm{const},\quad x\in\Omega\cup\gamma.$$

С учетом (19) получим, что $\Psi = 0$, $x \in \gamma$, а так как она везде постоянна,

$$\Psi = 0, \quad x \in \Omega \cup \gamma, \tag{21}$$

т. е. $\psi_1 \equiv \psi$ совпадает с объемным потенциалом. Теорема доказана.

Замечание 2. Из теоремы следует, что ядро

$$\varepsilon(x,y) = -\frac{1}{4\pi} \log |1 - \langle x,y\rangle|$$

является функцией Грина краевой задачи (9), (10) в произвольной гладкой области Ω на S.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kidambi R., Newton P. K.* Point vortex motion on a sphere with solid boundaries // Phys. Fluids. 2000. V. 12, N 1. P. 581–588.

2. *Crowdy D.* Point vortex motion on the surface of a sphere with impenetrable boundaries // Phys. Fluids. 2006. V. 18, N 3. P. 036602–7.

3. *Crowdy D., Cloke M.* Analytical solutions for distributed multi polar vortex equilibria on a sphere // Phys. Fluids. 2003. V. 15, N 22. P. 22–34.

4. *Crowdy D.* Stuart vortices on a sphere // J. Fluid. Mech. 2004. V. 498, N 381. P. 381–402.

5. *Gemmrich S., Nigam N., Steinbach O.* Boundary integral equations for the Laplace–Beltrami operator // Mathematics and computation, a contemporary view. The Abel sympos. 2006: Proc. Third Abel symp. Heidelberg: Springer-Verl., 2008.

6. *Богомолов В. А.* Динамика завихренности на сфере // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1977. № 6. С. 57–65.

7. *Богомолов В. А.* О двумерной гидродинамике на сфере // Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15, № 1. С. 29–36.

8. *Kal′menov T. Sh., Suragan D.* To spectral problems for the volume potential // Dokl. Math. 2009. V. 80, N 2. P. 646–649.

9. *Kalmenov T. Sh., Suragan D.* A boundary condition and spectral problems for the Newton potentials // Operator theory: Advances and applications. 2011. V. 216. P. 187–210.

10. *Кальменов Т. Ш., Сураган Д.* Перенос условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 6. С. 1063–1068.

11. *Кальменов Т. Ш., Токмагамбетов Н. Е.* Об одной нелокальной краевой задаче для многомерного уравнения теплопроводности в нецилиндрической области // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1287–1293.

Статья поступила 8 января 2014 г.

Кальменов Танысбек Шарипович, Сураган Дурвудхан
Институт математики и математического моделирования,
ул. Шевченко, 28, Алматы 050010, Казахстан
kalmenov.t@mail.ru