Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 512.542

РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ ПО СПЕКТРУ ДЛЯ ПРОСТЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 2

А. В. Васильев, М. А. Гречкосеева

Аннотация. Конечная группа G называется распознаваемой по спектру, если любая конечная группа, имеющая такое же множество порядков элементов, как G, изоморфна G. Доказано, что все конечные простые симплектические и ортогональные группы над полями характеристики 2, кроме $S_4(q)$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$ и $S_8(q)$, распознаваемы по спектру. Тем самым завершено исследование проблемы распознаваемости по спектру для конечных простых классических групп в характеристике 2.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.605

Ключевые слова: простая классическая группа, порядки элементов, распознаваемость по спектру.

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. *Спектром* $\omega(G)$ группы G называется множество порядков ее элементов. Группы *изоспектральны*, если их спектры совпадают. Для группы G *решить проблему распознаваемости по спектру* — значит найти число $h(G)$ попарно не изоморфных групп, изоспектральных группе G, и если $h(G)$ конечно, указать все такие группы. В случае, когда $h(G) = 1$, группа G называется *распознаваемой по спектру.* Если в G имеется нетривиальная нормальная разрешимая подгруппа, то $h(G) = \infty$ [1]. В то же время если G — неабелева простая группа, то, как правило, группа, изоспектральная G, изоморфна некоторому автоморфному расширению группы G и, в частности, $h(G)$ конечно (подробнее см. [2]). В этой работе мы завершаем решение проблемы распознаваемости для простых классических групп в характеристике 2.

Напомним, что имеется пять серий простых классических групп над полями характеристики 2, которые мы обозначаем, следуя [3], а именно $L_n(q)$, $n \geq 2$, $U_n(q)$, $n \geq 3$, $S_{2n}(q) \simeq O_{2n+1}(q)$, $n \geq 2$, и $O_{2n}^{\pm}(q)$, $n \geq 4$. Проблема распознаваемости уже решена для линейных и унитарных групп над полями характеристики 2 (см. [4, 5]). Следующий результат дает окончательный ответ в случае симплектических и ортогональных групп.

Теорема. *Пусть q — степень числа 2 и L — одна из простых групп $S_{2n}(q)$, где $n \geq 2$, или $O_{2n}^{\pm}(q)$, где $n \geq 4$. Тогда L распознаваема по спектру или выполняется одно из следующих утверждений.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14–21–00065).

(1) $L \in \{S_6(2), O_8^+(2)\}$, $\omega(S_6(2)) = \omega(O_8^+(2))$ *и* $h(L) = 2$.
(2) $L \in \{S_4(q), S_8(q)\}$ *и* $h(L) = \infty$.

Отметим, что утверждение теоремы уже доказано для групп $S_4(q)$ [6], $S_6(q)$ и $O_8^+(q)$ [7], $S_8(q)$ [8]. Также оно следует из [2, 9] для всех групп с $n \geq 20$. Более того, и в оставшемся случае $4 \leq n < 20$ для доказательства теоремы достаточно показать, что неабелев композиционный фактор группы, изоспектральной группе L, не может быть группой лиева типа в нечетной характеристике. Этому и посвящена настоящая работа.

2. Предварительные сведения

Через $[m_1, m_2, \dots, m_k]$ и $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ обозначаются наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель целых чисел $m_1, m_2, \dots, m_s$ соответственно. Через $\pi(m)$ обозначается множество простых делителей натурального числа m. Если r — простое число, то через $(m)_r$ обозначается r-часть числа m, т. е. наибольшая степень числа r, делящая m. Через $(m)_{r'}$ обозначается r'-часть числа m, т. е. отношение $m/(m)_r$.

Если q — целое число, r — нечетное простое число и $(q, r) = 1$, то через $e(r, q)$ обозначается мультипликативный порядок q по модулю r. Через $e(2, q)$ обозначается число 1, если 4 делит $q - 1$, и число 2, если 4 делит $q + 1$. *Примитивным простым делителем* числа $q^m - 1$, где $|q| > 1$ и $m \geq 1$, называется простое число r такое, что $e(r, q) = m$. Отметим, что в этом определении важно не только само число $q^m - 1$, но и числа q и m: примитивным простым делителем для $4^3 - 1$ и $(-2)^6 - 1$ будет 7, а примитивных простых делителей числа $2^6 - 1$ не существует. Множество примитивных простых делителей числа $q^m - 1$ обозначается через $R_m(q)$ и через $r_m(q)$ обозначается некоторый, вообще говоря, произвольный элемент множества $R_m(q)$.

Лемма 2.1 (Жигмонди [10]). *Пусть q — целое число, $|q| > 1$, $m \geq 1$. Тогда множество $R_m(q)$ непусто, исключая случаи, когда*

$$(q, m) \in \{(2, 1), (2, 6), (-2, 2), (-2, 3), (3, 1), (-3, 2)\}.$$

Наибольшим примитивным делителем числа $q^m - 1$, где $|q| > 1$, называется число $k_m(q) = \prod_{r \in R_m(q)} |q^m - 1|_r$ при $m \neq 2$ и число $k_2(q) = \prod_{r \in R_2(q)} |q + 1|_r$ при $m = 2$. Для $m \geq 3$ наибольший примитивный делитель может быть выражен в терминах кругового многочлена $\Phi_m(x)$.

Лемма 2.2. *Пусть q, m — целые числа, $|q| > 1$, $m \geq 3$. Если r — наибольший простой делитель числа m и $l = (m)_{r'}$, то*

$$k_m(q) = \frac{|\Phi_m(q)|}{(r, \Phi_l(q))},$$

причем если l не делит $r - 1$, то $(r, \Phi_l(q)) = 1$.

Доказательство. Из [11, предложение 2] следует, что

$$k_m(q) = |\Phi_m(q)|/(r, \Phi_m(q)).$$

Осталось заметить, что r делит $\Phi_m(q)$ тогда и только тогда, когда r делит $\Phi_l(q)$ (см., например, [12, лемма 8.1]). □

Кокликой графа называют множество попарно не смежных вершин. Через $t(\Gamma)$ обозначается неплотность графа Γ или, другими словами, наибольший размер коклики в Γ.

Для конечной группы G через $\pi(G)$ обозначается множество $\pi(|G|)$ и через $\mu(G)$ — множество максимальных по делимости элементов из $\omega(G)$. *Графом простых чисел* $GK(G)$ группы G называется простой помеченный граф, множеством вершин которого является $\pi(G)$ и в котором две различные вершины с метками r и s смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Через $t(G)$ обозначается число $t(GK(G))$. Для $r \in \pi(G)$ наибольший размер, который может иметь коклика графа $GK(G)$, содержащая r, обозначается через $t(r, G)$. В [13] установлено, что группа G с условиями $t(G) \geq 3$ и $t(2, G) \geq 2$ имеет ровно один неабелев композиционный фактор. Мы приводим следствие из этого результата.

Лемма 2.3 [13, 14]. *Пусть L — конечная неабелева простая группа такая, что $t(L) \geq 3$ и $t(2, L) \geq 2$, а G — конечная группа, удовлетворяющая условию $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(а) *Существует неабелева простая группа S такая, что*

$$S \leq \overline{G} = G/K \leq \operatorname{Aut} S,$$

где K — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G.

(б) *Для каждой коклики ρ вершин графа $GK(G)$, порядок которой больше 2, не более чем одно число из ρ делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. В частности, $t(S) \geq t(G) - 1$.*

(в) *Каждое простое число $r \in \pi(G)$, не смежное в $GK(G)$ с числом 2, не делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. В частности, $t(2, S) \geq t(2, G)$.*

Лемма 2.4 [15, лемма 3]. *Пусть G — конечная группа, K — нормальная разрешимая подгруппа в G и $S \leq \overline{G} = G/K \leq \operatorname{Aut} S$ для неабелевой простой группы S. Пусть в $\pi(S) \setminus \pi(K)$ есть числа t и s такие, что их окрестности в $GK(G)$ не пересекаются. Если $r \in \pi(K)$ не смежно ни с t, ни с s в $GK(G)$, а в S есть подгруппа Фробениуса с циклическим дополнением C и ядром F таким, что $(|F|, r) = 1$, то $r|C| \in \omega(G)$.*

Лемма 2.5. *Пусть q четно.*

(1) *Если $L = S_4(q)$, то $h(L) = \infty$* [6].

(2) *Если $L \in \{S_6(2), O_8^+(2)\}$, то $h(L) = 2$, причем $\omega(S_6(2)) = \omega(O_8^+(2))$* [16, 17].

(3) *Если $L \in \{S_6(q), O_8^+(q)\}$, где $q > 2$, то $h(L) = 1$* [7].

(4) *Если $L = S_8(q)$, то $h(L) = \infty$* [8].

(5) *Если $L = O_{2n}^-(2)$, где $n = 2^m + 1 \geq 5$, то $h(L) = 1$* [17, 18].

Неабелева простая группа L называется *квазираспознаваемой* по спектру, если любая конечная группа, изоспектральная L, содержит единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен L.

Лемма 2.6. *Следующие группы квазираспознаваемы по спектру:*

(1) *$S_{2n}(q)$, $O_{2n}^{\pm}(q)$, где $n \geq 20$* [2, 19];

(2) *$O_{2n}^-(q)$, где $n \geq 16$ четно* [13, 20];

(3) *$S_{2n}(q)$, где $n = 2^m \geq 8$, $O_{2n}^-(q)$, где $n = 2^m \geq 4$* [18];

(4) *$S_{2p}(2)$, где $p \geq 5$ — простое число* [21];

(5) *$O_{2p}^+(2)$, где $p \geq 5$ — простое число* [22, 23];

(6) *$O_{2p+2}^+(2)$, где $p \geq 5$ — простое число* [22, 24].

3. Некоторые свойства простых групп лиева типа

Мы используем стандартные обозначения $L_n^{\pm}(q)$ и $E_6^{\pm}(q)$, где $L_n^{+}(q) = L_n(q)$, $L_n^{-}(q) = U_n(q)$, $E_6^{+}(q) = E_6(q)$ и $E_6^{-}(q) = {}^2E_6(q)$. Если $\varepsilon \in \{+,-\}$, то в арифметических выражениях пишем ε вместо $\varepsilon 1$.

Лемма 3.1 [25, следствие 3]. *Пусть $L = S_{2n}(q)$, где q четно и $n \geq 2$. Тогда $\omega(L)$ состоит из всех делителей следующих чисел:*

(1) $[q^{n_1} \pm 1, \dots, q^{n_s} \pm 1]$, *где $s \geq 1$, $n_i > 0$ для $1 \leq i \leq s$ и $n_1 + \dots + n_s = n$;*

(2) $2[q^{n_1} \pm 1, \dots, q^{n_s} \pm 1]$, *где $s \geq 1$, $n_i > 0$ для $1 \leq i \leq s$ и $1 + n_1 + \dots + n_s = n$;*

(3) $2^k[q^{n_1} \pm 1, \dots, q^{n_s} \pm 1]$, *где $k \geq 2$, $s \geq 1$, $n_i > 0$ для $1 \leq i \leq s$ и $2^{k-2} + 1 + n_1 + \dots + n_s = n$;*

(4) 2^k, *если $n = 2^{k-2} + 1$ для $k \geq 2$.*

Лемма 3.2 [25, следствие 4]. *Пусть $L = O_{2n}^{\varepsilon}(q)$, где q четно, $n \geq 4$ и $\varepsilon \in \{+,-\}$. Тогда $\omega(L)$ состоит из всех делителей следующих чисел:*

(1) $[q^{n_1} - \tau_1, \dots, q^{n_s} - \tau_s]$, *где $s \geq 1$, $n_i > 0$ и $\tau_i \in \{+,-\}$ для $1 \leq i \leq s$, $n_1 + \dots + n_s = n$ и $\tau_1 \dots \tau_s = \varepsilon$;*

(2) $2[q^{n_1} \pm 1, \dots, q^{n_s} \pm 1]$, *где $s \geq 1$, $n_i > 0$ для $1 \leq i \leq s$ и $2 + n_1 + \dots + n_s = n$;*

(3) $2^k[q^{n_1} \pm 1, \dots, q^{n_s} \pm 1]$, *где $k \geq 2$, $s \geq 1$, $n_i > 0$ для всех $1 \leq i \leq s$ и $2^{k-2} + 2 + n_1 + \dots + n_s = n$;*

(4) $2[q \pm 1, q^{n_1} - \tau_1, \dots, q^{n_s} - \tau_s]$, *где $s \geq 1$, $n_i > 0$ и $\tau_i \in \{+,-\}$ для $1 \leq i \leq s$, $2 + n_1 + \dots + n_s = n$ и $\tau_1 \dots \tau_s = \varepsilon$;*

(5) $4[q - \tau, q^{n_1} - \tau_1, \dots, q^{n_s} - \tau_s]$, *где $s \geq 1$, $\tau \in \{+,-\}$, $n_i > 0$ и $\tau_i \in \{+,-\}$ для $1 \leq i \leq s$, $3 + n_1 + \dots + n_s = n$ и $\tau\tau_1 \dots \tau_s = \varepsilon$;*

(6) 2^k, *если $n = 2^{k-2} + 2$ для $k \geq 3$.*

Обозначим через $m(n,q)$ наибольшее число вида $[q^{n_1} \pm 1, \dots, q^{n_s} \pm 1]$, где $s \geq 1$, $n_i > 0$ для $1 \leq i \leq s$ и $n_1 + \dots + n_s = n$.

Лемма 3.3. *Пусть q — степень числа 2.*

(а) *Для любого натурального числа n выполнено $m(n,q) \leq (q^{n+1}-1)/(q-1)$. Если n нечетно и $q > 2$ или $n \in \{9, 2^l - 1, 3 \cdot 2^l - 1\}$ для некоторого l, то $m(n,q) = (q^{n_1}+1)\dots(q^{n_s}+1)$, где $n_1 + \dots + n_s$ — двоичное разложение числа n.*

(б) *Если L — одна из групп $S_{2n}(q)$, где $n \geq 2$, $O_{2n}^{\pm}(q)$, где $n \geq 4$, то порядки элементов группы L не превосходят $2q^n$.*

Доказательство. (а) Первое утверждение доказано в [26, лемма 1.2]. Второе утверждение — в [27, предложения 1 и 3].

(б) Следует из лемм 3.1, 3.2 и п. (а). Также см. [26, лемма 1.3]. □

Рассмотрим коклики графа $GK(G)$, состоящие из нечетных чисел r таких, что $4r \notin \omega(G)$. Обозначим через $t^*(4,G)$ максимальный размер такой коклики.

Лемма 3.4. *Пусть q четно и L — простая симплектическая или ортогональная группа над полем порядка q, отличная от $S_4(q)$, $S_6(2)$, $S_8(2)$, $O_8^{\pm}(2)$. Тогда множества $\rho^*(2,L)$ и $\rho^*(4,L)$, определенные в табл. 1, обладают следующими свойствами:*

(а) *$\rho^*(2,L) \subseteq \rho^*(4,L)$ и $\rho^*(4,L)$ — коклика в $GK(L)$;*

(б) *если $r \in \rho^*(4,L)$, то $r > 3$ и $4r \notin \omega(L)$, и если при этом $r \in \rho^*(2,L)$, то $2r \notin \omega(L)$; более того, $|\rho^*(2,L)| + 1 = t(2,L)$;*

(в) *если $|\rho^*(2,L)| \geq 2$, то в $\rho^*(2,L)$ есть два числа, не имеющие общих соседей в $GK(L)$, и если $\rho^*(2,L) = \{t\}$, то t не имеет общих соседей в $GK(L)$ с любым числом из $\rho^*(4,L) \setminus \{t\}$.*

Таблица 1

L	$\rho^*(2, L)$	$\rho^*(4, L)$
$S_{2n}(q)$, $n \geq 4$ четно	$\{r_{2n}(q)\}$	$\{r_{2n}(q),\, r_{2(n-1)}(q),\, r_{n-1}(q)\}$
$S_{2n}(q)$, n нечетно	$\{r_{2n}(q), r_n(q)\}$	$\{r_{2n}(q),\, r_n(q),\, r_{2(n-1)}(q)\}$
$O^+_{2n}(q)$, n четно	$\{r_{2(n-1)}(q), r_{n-1}(q)\}$	$\{r_{2(n-1)}(q),\, r_{n-1}(q),\, r_{2(n-2)}(q)\}$
$O^+_{2n}(q)$, n нечетно	$\{r_n(q), r_{2(n-1)}(q)\}$	$\{r_n(q), r_{2(n-1)}(q),\, r_{n-2}(q)\}$
$O^-_{2n}(q)$, n четно	$\{r_{2n}(q), r_{2(n-1)}(q), r_{n-1}(q)\}$	$\{r_{2n}(q), r_{2(n-1)}(q), r_{n-1}(q)\}$
$O^-_{2n}(q)$, n нечетно	$\{r_{2n}(q), r_{2(n-1)}(q)\}$	$\{r_{2n}(q), r_{2(n-1)}(q), r_{n-2}(q)\}$

В частности, $t^*(4, L) \geq 3$.

Доказательство. Пп. (а) и (б) следуют из лемм 3.1 и 3.2, а также замечания о том, что в силу малой теоремы Ферма число 3 лежит в $R_1(q) \cup R_2(q)$. Коклики максимального размера, не содержащие 2, также описаны в [20, табл. 4].

(в) Пусть $L = S_{2n}(q)$, где $n \geq 4$ четно. Покажем, что $r_{2n}(q)$ не имеет общих соседей ни с $r_{n-1}(q)$, ни с $r_{2(n-1)}(q) = r_{n-1}(-q)$. Пусть $r \in \pi(L)$. По лемме 3.1 если $rr_{2n}(q) \in \omega(L)$, то r делит $q^n + 1$. Если же $rr_{n-1}(\tau q) \in \omega(L)$, где $\tau \in \{+, -\}$, то r делит $2(q^{n-1} - \tau)(q \pm 1)$. Поскольку $(q^n + 1, q^{n-1} - \tau) = (q^n + 1, q - \tau) = 1$, получаем требуемое.

Пусть $L = S_{2n}(q)$, где n нечетно. Пусть $r \in \pi(L)$. Если $rr_{2n}(q) \in \omega(L)$, то r делит $q^n + 1$, и если $rr_n(q) \in \omega(L)$, то r делит $q^n - 1$. Поскольку $(q^n + 1, q^n - 1) = 1$, у $r_{2n}(q)$ и $r_n(q)$ нет общих соседей.

Пусть $L = O^\varepsilon_{2n}(q)$, где n нечетно. По лемме 3.2 если $rr_n(\varepsilon q) \in \omega(L)$, то r делит $q^n - \varepsilon$. Если $rr_{2(n-1)} \in \omega(L)$, то r делит $(q^{n-1} + 1)(q + \varepsilon)$. Из равенства $(q^n - \varepsilon, q + \varepsilon) = 1$ следует требуемое.

Пусть $L = O^+_{2n}(q)$, где n четно. Если $rr_{n-1}(\tau q) \in \omega(L)$ для $\tau \in \{+, -\}$, то r делит $[q^{n-1} - \tau, q - \tau] = q^{n-1} - \tau$. Поскольку $q^{n-1} + 1$ и $q^{n-1} - 1$ взаимно просты, $r_{2(n-1)}(q)$ и $r_{n-1}(q)$ не имеют общих соседей.

Пусть, наконец, $L = O^-_{2n}(q)$, где n четно. Так как $\omega(L) \subseteq \omega(S_{2n}(q))$, по доказанному выше $r_{2n}(q)$ не имеет общих соседей ни с $r_{n-1}(q)$, ни с $r_{2(n-1)}(q)$. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть u — степень нечетного простого числа v и S — одна из следующих простых групп лиева типа:*

(1) $G_2(u)$, ${}^3D_4(u)$, $F_4(u)$, $E^\pm_6(u)$;

(2) $L^\pm_n(u)$, где $n \geq 4$; $L^\varepsilon_3(u)$, где $u \equiv \varepsilon \pmod 4$;

(3) $S_{2n}(u)$, $O_{2n+1}(u)$, $O^\pm_{2n}(u)$.

Тогда $4v \in \omega(S)$ и $t^*(4, S) \leq 2$.

Доказательство. Обозначим множество нечетных простых чисел r таких, что $r \in \pi(S)$ и $4r \notin \omega(S)$ через $\tilde{\pi}(S)$.

(1) Поскольку $v(u \pm 1) \in \omega(G_2(u))$ по [28, лемма 1.4] и $G_2(u) < {}^3D_4(u) < F_4(u) < E^\pm_6(u)$ в силу [29], получаем, что $4v \in \omega(S)$. Если r — нечетное простое число такое, что $4r \notin \omega(S)$, то любой период максимального тора группы S, кратный r, не должен делится на 4. При этом если r и s делят один и тот же период, то $rs \in \omega(S)$. Таким образом, $t^*(4, S)$ не превосходит числа максимальных по делимости периодов максимальных торов, не делящихся на 4. Строение максимальных торов рассматриваемых групп хорошо известно (см. [30–32] для $G_2(u)$, ${}^3D_4(u)$, $E^\pm_6(u)$ соответственно и [33, с. 94–96] для $F_4(u)$).

Если $S = G_2(u)$, то максимальные по делимости периоды максимальных торов, не делящиеся на 4, равны $u^2 + u + 1$ и $u^2 - u + 1$.

Если $S = {}^3D_4(u)$ или $S = F_4(u)$, то соответствующие периоды лежат в множестве $\{u^4 - u^2 + 1, u^4 + 1\}$.

Если $S = E_6^{\varepsilon}(q)$, то соответствующие периоды (в универсальной накрывающей группы S) равны $u^6 + \varepsilon u^3 + 1$ и $(u^2 + \varepsilon u + 1)(u^4 - u^2 + 1)$.

В любом случае число требуемых периодов не превосходит 2, тем самым $t^*(4, S) \leq 2$.

(2) Пусть $S = L_n^{\varepsilon}(u)$, где $n \geq 3$. Спектр группы L можно найти в [34]. Обозначим $(n, u - \varepsilon)$ через d.

Если $n \geq 4$, то спектр группы S содержит следующие числа: $v(u - \varepsilon)$, $v(u^2 - 1)/d$ и $[u^k - \varepsilon^k, u - \varepsilon]$, $[u^k - \varepsilon^k, u^2 - 1]/d$ для всех $k \leq n - 2$. Поскольку 4 делит хотя бы одно из чисел $u - \varepsilon$ и $(u^2 - 1)/d$, получаем, что $4v, 4r_k(\varepsilon u) \in \omega(L)$ для всех $k \leq n - 2$. Следовательно, $\tilde{\pi}(S) \subseteq R_n(\varepsilon u) \cup R_{n-1}(\varepsilon u)$.

Если $S = L_3^{\varepsilon}(u)$, то $\omega(S)$ содержит числа $(u^2 - 1)/d$ и $v(u - \varepsilon)/d$. Поэтому $4r_1(u)$ и $4r_2(u)$ лежат в $\omega(S)$, и если $u \equiv \varepsilon \pmod 4$, то $4v \in \omega(S)$. Значит, $\tilde{\pi}(S) \subseteq R_3(\varepsilon u)$.

В любом случае $t^*(4, S) \leq 2$.

(3) Спектры симплектических и ортогональных групп можно найти в [25]. В любом случае $v(u \pm 1) \in \omega(S)$, тем самым $4v \in \omega(S)$.

Если $S = S_{2n}(u)$, где $n \geq 2$, или $S = O_{2n+1}(u)$, где $n \geq 3$, то $[u^k \pm 1, u \pm 1] \in \omega(S)$ для всех $k \leq n - 1$, поэтому $\tilde{\pi}(S) \subseteq R_{2n}(u) \cup R_n(u)$.

Если $S = O_{2n}^{\varepsilon}(u)$, то $[u^k \pm 1, u \pm 1] \in \omega(S)$ для всех $k \leq n - 2$. Следовательно, $\tilde{\pi}(S) \subseteq R_n(\varepsilon u) \cup R_{2(n-1)}(u)$, если n нечетно, и $\tilde{\pi}(S) \subseteq R_{n-1}(u) \cup R_{2(n-1)}(u)$, если n четно и $\varepsilon = +$. Если n четно и $\varepsilon = -$, то $[u^{n-1} \pm 1, u \mp 1] \in \omega(S)$, поэтому $\tilde{\pi}(S) \subseteq R_{2n}(u) \cup R_{n-1}(\tau u)$, где τ определяется из условия $u \equiv \tau 1 \pmod 4$.

В любом случае $t^*(4, S) \leq 2$. □

Лемма 3.6. *Пусть S — одна из простых групп из формулировки леммы* 3.5.

(а) *Если $S \leq G \leq \operatorname{Aut} S$ и $|G/S|$ делится на нечетное простое число r, большее* 3, *то $4r \in \omega(G)$.*

(б) *В S есть подгруппа Фробениуса, ядро которой является v-группой и дополнение — циклической группой порядка* 4.

Доказательство. (а) Предположим, что r не делит $(n, u - \varepsilon)$, если $S = L_n^{\varepsilon}(u)$. Тогда G содержит полевой автоморфизм порядка r. Централизатор этого полевого автоморфизма является группой того же типа, что и S, над некоторым подполем поля $GF(u)$, поэтому содержит элемент порядка 4.

Пусть $S = L_n^{\varepsilon}(u)$ и r делит $(n, u - \varepsilon)$. Тогда $n \geq r \geq 5$ и, значит, число $u^2 - 1$, кратное $4r$, лежит в $\omega(S)$.

(б) По [35, лемма 2.1] в $G_2(u)$ есть подгруппа Фробениуса с ядром порядка u^2 и циклическим дополнением порядка $u^2 - 1$. В силу вложений $G_2(u) < {}^3D_4(u) < F_4(u)$ такая подгруппа есть и в ${}^3D_4(u)$ и $F_4(u)$. По [36, лемма 3.5] в $S_4(u)$ есть подгруппа Фробениуса с ядром порядка u^2 и циклическим дополнением порядка $(u^2 - 1)/2$. В оставшихся случаях в S есть подгруппа, изоморфная $L_3(q)$ или $SL_3(q)$, значит, есть подгруппа Фробениуса с ядром порядка u^2 и циклическим дополнением порядка $(u^2 - 1)_{3'}$ [37, лемма 5]. □

4. Доказательство теоремы

Пусть $q = 2^k$ и L — одна из простых групп $S_{2n}(q)$, где $n \geq 2$, или $O_{2n}^{\pm}(q)$, где $n \geq 4$. Если L — одна из групп $S_4(q)$, $S_6(q)$, $S_8(q)$, $O_8^+(q)$, то утверждение теоремы следует из леммы 2.5, поэтому до конца раздела считаем, что L отлична от этих групп.

Пусть G — конечная группа такая, что $\omega(G) = \omega(L)$. Поскольку $t(L) \geq 3$ и $t(2, L) \geq 2$ (здесь и далее мы используем информацию о кокликах графов простых чисел из [20, 38]), по лемме 2.3 найдется неабелева простая группа S такая, что

$$S \leq \overline{G} = G/K \leq \operatorname{Aut} S,$$

где K — разрешимый радикал группы G.

Покажем, что $S \simeq L$. В силу леммы 2.6 можно считать, что $n \geq 5$. Согласно [39, теоремы 1, 2] группа S не является ни спорадической, ни знакопеременной. По [2, теорема 2] если S — группа лиева типа над полем характеристики 2, то $S \simeq L$. Таким образом, осталось установить, что S не может быть группой лиева типа над полем нечетной характеристики.

Предложение 1. *Если $n \geq 5$, то S не является группой, указанной в формулировке леммы* 3.5.

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим коклику $\rho = \rho^*(4, L)$, определенную в лемме 3.4. Напомним, что для любого $r \in \rho$ выполнены условия $r > 3$ и $4r \notin \omega(L)$. Если $\rho \subseteq \pi(S)$, то $t^*(4, S) \geq 3$, но это противоречит лемме 3.5. Значит, найдется $r \in \rho$ такой, что $r \in \pi(K)$ или $r \in \pi(\overline{G}/S)$. В последнем случае $4r \in \omega(G) \setminus \omega(L)$ по лемме 3.6(а), что невозможно.

Пусть $r \in \pi(K)$. Тогда два числа из $\rho \setminus \{r\}$ лежат в $\pi(S) \setminus \pi(K)$ по лемме 2.3 и их окрестности в $GK(G)$ не пересекаются по лемме 3.4(в). Если $r = v$, то $4r \in \omega(S)$ по лемме 3.5. Значит, можно считать, что $r \neq v$. По лемме 3.6(б) в S есть подгруппа Фробениуса, ядро которой является v-группой и дополнение — циклическая группа порядка 4. Применяя лемму 2.4, получаем, что $4r \in \pi(G)$; противоречие. $\square$

Отметим, что заключение предложения 1 доказано в [19, предложение 6] при $n \geq 20$. Однако для нашего доказательства достаточно условия $n \geq 5$, поэтому мы не используем результат из [19, предложение 6], хотя и пользуемся идеями его доказательства.

Лемма 4.1. *Пусть m — наибольшее $\pi(m)$-число в $\omega(G)$, $(m, |K|\cdot|\overline{G}/S|) = 1$ и в S есть циклическая $\pi(m)$-холлова подгруппа. Если $r \in \pi(\overline{G}/S)$, то либо r делит $m-1$, либо $rs \in \omega(\overline{G})$ для некоторого $s \in \pi(m)$.*

Доказательство. Пусть H — циклическая $\pi(m)$-холлова подгруппа группы S. Тогда $|H|$ — наибольшее $\pi(m)$-число в $\omega(G)$ и, значит, $|H| = m$. Пусть $s \in \pi(m)$ и P — силовская s-подгруппа группы S. В силу аргумента Фраттини $\overline{G} = SN_{\overline{G}}(P)$, поэтому в $N_{\overline{G}}(P)$ есть элемент порядка r. Если $rs \notin \omega(\overline{G})$, то этот элемент действует на P без нетривиальных неподвижных точек, следовательно, $|P| \equiv 1 \pmod r$. Таким образом, если $rs \notin \omega(\overline{G})$ для любого $s \in \pi(m)$, то $|H| \equiv 1 \pmod r$. $\square$

Предложение 2. *Если $n \geq 5$, то S не является ни одной из групп $L_2(u)$, $L_3^{\pm}(u)$, ${}^2G_2(u)$, $E_7(u)$, $E_8(u)$, где u нечетно.*

Доказательство. Предположим противное. По лемме 2.3 выполнены неравенства $t(L) \leq t(S) + 1$ и $t(2, L) \leq t(2, S)$.

1. Предположим, что $S = E_8(u)$. Тогда $t(S) = 12$ и, значит, $t(L) \leq 13$. Кроме того, $u^8 - 1 \in \omega(S)$ в силу [32]. Поскольку 32 делит $u^8 - 1$ и $32 \neq u^8 - 1$, получаем, что $32 \in \omega(S) \setminus \mu(S)$. Следовательно, $32 \in \omega(L) \setminus \mu(L)$. Используя формулы для $t(L)$ и леммы 3.1, 3.2, находим, что L — одна из групп $S_{2n}(q)$, где $10 \leq n \leq 16$, $O_{2n}^{+}(q)$, где $11 \leq n \leq 18$, и $O_{2n}^{-}(q)$, где $11 \leq n \leq 17$. Кроме того, в силу леммы 2.6 можно считать, что $L \neq S_{32}(q), O_{32}^{-}(q)$.

По леммам 3.1, 3.2 числа из $\omega(L)$, кратные 32, не превосходят $32 \cdot m(n-9, q)$. Последнее число по лемме 3.3 не превосходит $(q^{n-8} - 1)/(q-1)$. Значит,

$$u^8 - 1 \leq 32(q^{n-8} - 1)/(q-1). \tag{4.1}$$

Предположим сначала, что $q \geq 4$. Тогда $(q^k - 1)/(q-1) < 4q^{k-1}/3$ для любого натурального числа k. Значит, $u^8 - 1 \leq 32(q^{n-8} - 1)/(q-1) < 32 \cdot 4q^{n-9}/3$, откуда

$$u^8 \leq 43q^{n-9}.$$

Пусть i — наибольшее простое число, меньшее или равное n, если L — симплектическая группа, и наибольшее простое число, меньшее n, если L — ортогональная группа. Тогда $7 \leq i \leq 17$ и $i \geq n - 4$. В частности, $i > n/2$, поэтому $r_i(q)$ и $r_i(-q)$ лежат в коклике размера 3 графа $GK(L)$. Значит, по лемме 2.3 для какого-то $\epsilon \in \{+, -\}$ число $k_i(\epsilon q)$ лежит в $\omega(S)$. Порядки элементов группы S не превосходят $2u^8$ (см., например, [40]). Таким образом,

$$\frac{q^{i-1}}{2(i, q-\epsilon)} \leq \frac{q^i - \epsilon}{(q-\epsilon)(i, q-\epsilon)} = k_i(\epsilon q) \leq 2u^8 \leq 86q^{n-9},$$

откуда с учетом того, что $i \geq n - 4$, следует, что

$$q^4 \leq q^{i+8-n} \leq 172(i, q-\epsilon) \leq 172 \cdot 17.$$

Из неравенства $q^4 \leq 172 \cdot 17$ вытекает, что $q = 4$. Но тогда $(i, q \pm 1) = 1$, поэтому $256 = q^4 \leq 172$; противоречие.

Пусть теперь $q = 2$. Из неравенства (4.1) получаем, что $u = 3$ и $n = 17, 18$. Но тогда $r_7(3) = 1093 \in \pi(S) \setminus \pi(L)$; противоречие.

2. Предположим, что $S = E_7(u)$. Тогда $t(S) = 8$ и $t(2, S) = 3$, значит, $t(L) \leq 9$ и $t(2, L) \leq 3$. Следовательно, $n \leq 11$, если L — симплектическая группа, и $n \geq 13$, если L — ортогональная группа, причем $L \neq O_{2n}^{-}(q)$, где n четно. Отметим, что в $GK(S)$ любая коклика размера 3, содержащая число 2, имеет вид $\{2, r_7(\epsilon u), r_9(\epsilon u)\}$, где $\epsilon \in \{+, -\}$ определяется из условия $u + \epsilon 1 \equiv 0 \pmod 4$.

Рассмотрим сначала случай, когда $t(2, L) = 2$, т. е. когда L — одна из групп $S_{12}(q)$, $S_{16}(q)$ и $S_{20}(q)$. По лемме 2.6 можно считать, что $L \neq S_{16}(q)$.

Пусть $L = S_{12}(q)$. Как следует из [32], в $\omega(S)$ есть число $(u^4+1)(u^2-1)$. Это число делится на 16. По лемме 3.1 в $\omega(L)$ числа, кратные 16, — это делители $16(q \pm 1)$. Значит,

$$(u^4 + 1)(u^2 - 1) \leq 16(q + 1). \tag{4.2}$$

Числа из $R_{12}(q)$ не смежны с 2 в $GK(L)$, поэтому $k_{12}(q)$ делит одно из чисел $k_7(\epsilon u)$ и $k_9(\epsilon u)$. Следовательно,

$$k_{12}(q) \leq \frac{u^7 - 1}{u - 1} < \frac{3}{2}u^6.$$

Таким образом,

$$q^4 - q^2 \leq q^4 - q^2 + 1 = k_{12}(q) < \frac{3}{2}u^6 \leq 3(u^4+1)(u^2-1) \leq 48(q+1),$$

откуда $q^2(q-1) < 48$ и, значит, $q = 2$. Но тогда $(u^4+1)(u^2-1) \geq (3^4+1)(3^2-1) > 48 = 16(q+1)$, что противоречит (4.2).

Если $L = S_{20}(q)$, то аналогичным образом из леммы 3.1 и леммы 3.3(a) получаем, что

$$(u^4+1)(u^2-1) \leq 16(q^4+1)(q+1) \tag{4.3}$$

и

$$k_{20}(q) < \frac{3}{2}u^6.$$

Следовательно,

$$\frac{q^{10}+1}{(5, q^2+1)(q^2+1)} = k_{20}(q) < \frac{3}{2}u^6 \leq 3(u^4+1)(u^2-1) \leq 48(q^4+1)(q+1),$$

откуда $q^{10} < 48 \cdot (5, q^2+1)(q^8-1)/(q-1)$ и, значит, $q \leq 4$. Если $q = 4$, то $(5, q^2+1) = 1$, поэтому должно быть выполнено $4^{10} < 16(4^8-1)$, что неверно. Если $q = 2$, то из (4.3) следует, что $u = 3$. В этом случае $r_7(3) = 1093 \in \pi(S) \setminus \pi(L)$; противоречие.

Пусть теперь $t(2, L) = 3$ и $\{2, r, s\}$ — коклика в $GK(L)$. По лемме 3.4 числа r и s не имеют общих соседей в $GK(L)$, а по лемме 2.3 оба этих числа лежат в $\pi(S)$. Значит, одно из них делит $k_7(\epsilon u)$, а другое делит $k_9(\epsilon u)$. Однако при $u > 3$ числа $r_7(\epsilon u)$ и $r_9(\epsilon u)$ имеют общего соседа $r_1(\epsilon u)$ в $GK(S)$ (см. [38, рис. 4]). Значит, $u = 3$. Единственные числа, не смежные с 2 в $GK(S)$, — это $1093 = k_7(3)$ и $757 = k_9(3)$. Заметим, что $e(1093, 2) = 364$ и $e(757, 2) = 756$. Если $L = O^+_{2n}(q)$, где n нечетно и $q = 2^k$, то $r_{nk}(2)$ и $r_{2(n-1)k}(2)$ не смежны с 2 в $GK(L)$, поэтому $\{r_{nk}(2), r_{2(n-1)k}(2)\} = \{1093, 757\}$ и, значит, $2(n-1)/n = 756/364$. Поскольку $756/364 = 27/13$, последнее уравнение не имеет решений в натуральных числах. Для остальных групп получаются аналогичные уравнения с $2n/n$, $n/(n-1)$ и $2(n-1)/(n-1)$ вместо $2(n-1)/n$ в левой части, и эти уравнения также не имеют решений.

3. Пусть $S = L^{\pm}_3(u)$. Тогда $t(GK(S) \setminus \{3\}) \leq 3$ и $t(2, S) = 2$. Если $t(L) > 4$, то в $GK(L)$ есть коклика размера 5, состоящая из чисел, больших 3, значит, $t(L) \leq 4$. Следовательно, L — одна из групп $S_{10}(2)$, $O^+_{10}(q)$, $O^+_{12}(q)$ и $O^-_{10}(q)$. Но тогда $t(2, L) = 3$; противоречие.

4. Предположим, что $S = L_2(u)$, где $u = v^m \geq 5$, v — простое число. Тогда $\mu(S) = \{v, (u-1)/2, (u+1)/2\}$. Поскольку $t(S) = 3$, получаем, что L — одна из групп $S_{10}(2)$, $O^+_{10}(q)$, $O^+_{12}(q)$ и $O^-_{10}(q)$. В силу лемм 2.5, 2.6 можно считать, что $L \neq S_{10}(2)$, $O^{\pm}_{10}(2)$.

Если $L = O^{\varepsilon}_{10}(q)$, где $q > 2$, то положим $\rho = \{r_5(\varepsilon q), r_8(q), r_6(q), r_3(q)\}$, и если $L = O^+_{12}(q)$, то положим $\rho = \{r_{10}(q), r_5(q), r_8(q), r_3(q)\}$. Тогда ρ — колика в $GK(L)$ и содержит числа t и s, которые не смежны с 2 в $GK(L)$. Предположим, что одно число из ρ, скажем r, делит $|K|$. Одно из оставшихся трех чисел, скажем w, делит $(u-1)/2$. Оставшиеся два делят u и $(u+1)/2$, в частности, $r \neq v$. В S есть подгруппа Фробениуса с ядром порядка u и циклическим дополнением порядка $(u-1)/2$. Числа t и s лежат в $\pi(S) \setminus \pi(K)$ по лемме 2.3 и имеют непересекающиеся окрестности в $GK(L)$ в силу леммы 3.4. Применяя лемму 2.4, получаем, что $rw \in \omega(G)$; противоречие. Таким образом, ни одно из чисел, лежащих в ρ, не делит $|K|$. Значит, одно из чисел в $\rho \setminus \{t, s\}$ делит $|\overline{G}/S|$, откуда следует, что $m \geq 7$.

Пусть $L = O^{\varepsilon}_{10}(q)$, где $q > 2$. Тогда $r_5(\varepsilon q)$ и $r_8(q)$ не смежны с 2, поэтому взаимно просты с $|K||\overline{G}/S|$. Значит, $k_5(\varepsilon q)$ и $k_8(q)$ лежат в $\omega(S)$, и одно из них равно v. Поскольку

$$k_5(\varepsilon q) = \frac{q^5 - \varepsilon}{(5, q - \varepsilon)(q - \varepsilon)} \text{ и } k_8(q) = q^4 + 1,$$

получаем, что $v > q^4/10$. Значит, $u \geq v^7 > q^{28}/10^7$. С другой стороны, из леммы 3.3 следует, что $(u + 1)/2 \leq 2q^5$. В итоге $q^{28}/10^7 < u < 4q^5$, но это противоречит условию $q > 2$.

Если $L = O^{+}_{12}(q)$, то аналогичным образом получаем, что $k_5(q)$ и $k_{10}(q)$ лежат в $\omega(S)$, и одно из них равно v, поэтому $v > q^4/10$. Тогда $q^{28}/10^7 < u < 4q^6$ и, значит, $q = 2$. Отметим, что $k_5(2) = 31$ и $k_{10}(2) = 11$. Следовательно, $31 \in \pi(S) \subseteq \pi(O^{+}_{10}(2)) \subseteq \{2, \dots, 31\}$. Из [41, табл. 1] следует, что $S = L_2(31)$ или $S = L_2(5^3)$, но тогда $11 \notin \pi(S)$; противоречие.

5. Предположим, что $S = {}^2G_2(u)$, где $u = 3^m$ и m нечетно. Тогда $t(GK(S) \setminus \{3\}) = 4$ и $t(2, S) = 3$. Значит, L — одна из групп $S_{10}(q)$, $S_{12}(q)$, $O^{+}_{10}(q)$, $O^{+}_{12}(q)$, $O^{-}_{10}(q)$, $O^{-}_{14}(2)$. Можно считать, что $L \neq S_{10}(2)$, $O^{\pm}_{10}(2)$.

Порядок группы S равен $u^3(u^3 + 1)(u - 1)$. Периоды максимальных торов группы S равны $u - 1$, $(u + 1)/2$ и $u \pm \sqrt{3u} + 1$ [42]. В частности, если π — подмножество в $\pi(u \pm 1)$ или в $\pi(u \pm \sqrt{3u} + 1)$ и $2, 3 \notin \pi$, то в S есть циклическая π-холлова подгруппа. Следовательно, если $(k_8(q), |K||\overline{G}/S|) = 1$, то по лемме 4.1 выполнено $rr_8(q) \in \omega(G)$ для любого $r \in \pi(\overline{G}/S)$.

Пусть $t(L) = 5$. Тогда $L = S_{10}(q)$, где $q > 2$, или $L = S_{12}(q)$, и в качестве коклики ρ наибольшего размера графа $GK(L)$ можно взять $\{r_{10}(q), r_5(q), r_8(q), r_6(q), r_3(q)\}$ и $\{r_{12}(q), r_{10}(q), r_5(q), r_8(q), r_3(q)\}$ соответственно. Поскольку $t(GK(S) \setminus \{3\}) = 4$, одно число из ρ, скажем r, делит $|K|$ или $|\overline{G}/S|$, а все остальные числа взаимно просты с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Предположим, что r делит $|K|$. Одно из оставшихся четырех чисел, скажем w, делит $(u - 1)/2$. При этом по лемме 3.4 два из оставшихся четырех чисел имеют непересекающиеся окрестности в $GK(L)$: это $r_{10}(q)$ и $r_5(q)$ при $n = 5$; $r_{12}(q)$ и $r_{10}(q)$ при $n = 6$, $r \neq r_{10}(q)$; и $r_{12}(q)$ и $r_5(q)$ при $n = 6$, $r = r_{10}(q)$. В S есть подгруппа, изоморфная $L_2(u)$, а значит, есть подгруппа Фробениуса с ядром порядка u и циклическим дополнением порядка $(u - 1)/2$. Применяя лемму 2.4, получаем, что $rw \in \omega(G)$; противоречие. Значит, $r \in \pi(\overline{G}/S)$. Предположим, что $r \notin R_8(q)$. Тогда по замечанию, сделанному выше, $rr_8(q) \in \omega(G)$; противоречие. Следовательно, $k_8(q) \in \omega(\overline{G}/S)$, откуда $m \geq q^4 + 1$. При этом $u + \sqrt{3u} + 1 \leq 2q^6$ по лемме 3.3. Таким образом, $2q^6 \geq u + \sqrt{3u} + 1 > u \geq 3^{q^4+1}$. Однако $2q^6 < 3^{q^4+1}$ для любого $q \geq 2$.

Пусть $L = O^{+}_{12}(q)$. Рассмотрим коклику $\rho = \{r_5(q), r_{10}(q), r_8(q), r_3(q)\}$ графа $GK(L)$. Предположим, что любая такая коклика не пересекается с $\pi(K) \cup \pi(\overline{G}/S)$. Тогда $k_8(q)$ лежит в $\omega(S)$ и делит $u - 1$ или $(u + 1)/2$. Значит, $u - 1$ или $(u + 1)/2$ делится на $2(q^4 + 1)$. С другой стороны, из леммы 3.2 вытекает, что $2(q^4 + 1) \in \mu(L)$. Таким образом, $u - 1 = 2(q^4 + 1)$ или $(u + 1)/2 = 2(q^4 + 1)$, откуда $u = 2q^4 + 3$ или $u = 4q^4 + 3$, что невозможно, так как $u = 3^m$. Следовательно, одно из чисел $r_8(q)$ и $r_3(q)$, скажем r, делит $|K|$ или $|\overline{G}/S|$. Пусть $r \in \pi(K)$. Отметим, что $8r \notin \omega(L)$. С другой стороны, $16 \in \omega(L)$, и, значит, $8 \in \omega(K)$. Пусть

H — $\{2,r\}$-холлова подгруппа группы K. Тогда $G = KN_G(H)$, и в $N_G(H)$ есть элемент порядка $r_5(q)$. Этот элемент действует на H без неподвижных точек, значит, H нильпотентна и $8r \in \omega(K)$; противоречие. Следовательно, $r \in \pi(\overline{G}/S)$, и приходим к противоречию так же, как в предыдущем абзаце.

Пусть $L = O^{\varepsilon}_{10}(q)$, где $q > 2$. Коклика наибольшего размера в $GK(L)$ — это объединение множества $\{r_5(\varepsilon q), r_8(q), r_3(\varepsilon q)\}$ с $\{r_4(q)\}$ или $\{r_6(\varepsilon q)\}$. При этом $k_8(q)$ и $k_5(\varepsilon q)$ взаимно просты с $|K||\overline{G}/S|$. Применяя лемму 4.1 к $k_8(q)$, получаем, что любое число $r \in \pi(\overline{G}/S)$ смежно с $r_8(q)$ в $GK(L)$, следовательно, $\pi(\overline{G}/S) \subseteq R_1(-\varepsilon q)$. Предположим, что $k_4(q)k_6(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|K|$. Тогда $r_4(q)r_6(\varepsilon q)$ делит либо $u-1$, либо $(u+1)/2$ и, значит, $2r_4(q)r_6(\varepsilon q) \in \omega(S) \setminus \omega(L)$; противоречие. Таким образом, одно из чисел $r_4(q)$ и $r_6(\varepsilon q)$, скажем r, делит $|K|$. Тогда $k_3(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|K|$, поэтому $r_3(\varepsilon q)$ делит либо $u-1$, либо $(u+1)/2$, при этом $r_5(\varepsilon q)$ делит $u+\sqrt{3u}+1$ или $u-\sqrt{3u}+1$. В любом случае у $r_3(\varepsilon q)$ и $r_5(\varepsilon q)$ нет общих соседей в $GK(S)$. С другой стороны, $r_1(\varepsilon q)r_3(\varepsilon q)$ и $r_1(\varepsilon q)r_5(\varepsilon q)$ лежат в $\omega(G)$. Значит, $r_1(\varepsilon q) \in \pi(K)$. Наконец, $4 \in \omega(K)$, так как $8 \in \omega(L)$. Рассматривая $\{2, r, r_1(\varepsilon q)\}$-холлову подгруппу группы K и действуя на ней элементом порядка $r_8(q)$, получаем, что $4rr_1(\varepsilon q) \in \omega(G) \setminus \omega(L)$.

Пусть, наконец, $L = O^-_{14}(2)$. Тогда $43 \in \pi(S) \subseteq \{2, \dots, 43\}$. Согласно [41, табл. 1] ни одна из групп ${}^2G_2(u)$ этому условию не удовлетворяет. $\square$

По предложениям 1 и 2 группа S не может быть группой лиева типа над полем нечетной характеристики, следовательно, $S \simeq L$. Тогда $K = 1$ по [43, теорема 1.1] и, значит, с точностью до изоморфизма $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$. Из [9] заключаем, что $G \simeq L$. Таким образом, группа L распознаваема по спектру, и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666.
2. *Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V.* On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups // J. Group Theory. 2015. V. 18, N 5. P. 741–759.
3. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
4. *Гречкосеева М. А.* Распознавание по спектру конечных простых линейных групп над полями характеристики 2 // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 4. С. 405–427.
5. *Grechkoseeva M. A., Shi W. J.* On finite groups isospectral to finite simple unitary groups over fields of characteristic 2 // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 31–37.
6. *Мазуров В. Д., Су М.Ч., Чао Х.П.* Распознавание конечных простых групп $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 567–585.
7. *Старолетов А. М.* О распознаваемости по спектру простых групп $B_3(q)$, $C_3(q)$ и $D_4(q)$ // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 663–671.
8. *Grechkoseeva M. A., Staroletov A. M.* Unrecognizability by spectrum of finite simple orthogonal groups of dimension nine // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 921–928.
9. *Zvezdina M. A.* Spectra of automorphic extensions of finite simple symplectic and orthogonal groups over fields of characteristic 2 // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 823–832.
10. *Zsigmondy K.* Zür Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.
11. *Roitman M.* On Zsigmondy primes // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125, N 7. P. 1913–1919.
12. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. II. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982. (Grundlehren Math. Wiss.; V. 242).
13. *Васильев А. В.* О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.
14. *Васильев А. В., Горшков И. Б.* О распознавании конечных простых групп со связным графом простых чисел // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 292–299.

15. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* Распознавание по спектру конечных простых линейных групп малых размерностей над полями характеристики 2 // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 5. С. 558–570.

16. *Мазуров В. Д.* Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.

17. *Shi W. J., Tang C. Y.* A characterization of some orthogonal groups // Progr. Natur. Sci. 1997. V. 7, N 2. P. 155–162.

18. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* О распознаваемости конечных простых ортогональных групп размерности 2^m, 2^{m+1} и 2^{m+2} над полем характеристики 2 // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 510–526.

19. *Vasil'ev A. V.* On finite groups isospectral to simple classical groups // J. Algebra. 2015. V. 423. P. 318–374.

20. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.

21. *Зиновьева М. Р.* Распознавание по спектру простых групп $C_p(2)$ // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 102–113.

22. *He H., Shi W. J.* Recognition of some finite simple groups of type $D_n(q)$ by spectrum // Int. J. Algebra Comput. 2009. V. 19, N 5. P. 681–698.

23. *Алексеева О. А., Кондратьев А. С.* О распознаваемости по спектру некоторых конечных простых ортогональных групп // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, № 1. С. 30–43.

24. *Кондратьев А. С.* О распознаваемости по спектру конечных простых ортогональных групп. II // Владикавк. мат. журн. 2009. Т. 11, № 4. С. 32–43.

25. *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных симплектических и ортогональных групп // Мат. тр. 2010. Т. 13, № 2. С. 33–83.

26. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д.* Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 685–728.

27. *Лыткин Д. В.* Наибольшие порядки элементов и характеристика конечных простых симплектических групп // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 105–126.

28. *Васильев А. В., Старолетов А. М.* Распознаваемость групп $G_2(q)$ по спектру // Алгебра и логика. 2013. Т. 52, № 1. С. 3–21.

29. *Stensholt E.* Certain emdeddings among finite groups of Lie type // J. Algebra. 1978. V. 53. P. 136–187.

30. *Aschbacher M.* Chevalley groups of type G_2 as the group of a trilinear form // J. Algebra. 1987. V. 109, N 1. P. 193–259.

31. *Deriziotis D. I., Michler G. O.* Character table and blocks of finite simple triality groups ${}^3D_4(q)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 303, N 1. P. 39–70.

32. *Deriziotis D. I., Fakiolas A. P.* The maximal tori in the finite Chevalley groups of type E_6, E_7 and E_8 // Commun. Algebra. 1991. V. 19, N 3. P. 889–903.

33. *Lawther R.* The action of $F_4(q)$ on cosets of $B_4(q)$ // J. Algebra. 1999. V. 212, N 1. P. 79–118.

34. *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных линейных и унитарных групп // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 157–173.

35. *Васильев А. В.* Распознаваемость групп $G_2(3^n)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 130–142.

36. *He H., Shi W.* A note on the adjacency criterion for the prime graph and characterization of $C_p(3)$ // Algebra Colloq. 2012. V. 19, N 3. P. 553–562.

37. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* О распознавании по спектру конечных простых линейных групп над полями характеристики 2 // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 749–758.

38. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.

39. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д.* О конечных группах, изоспектральных простым симплектическим и ортогональным группам // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 6. С. 1225–1247.

40. *Kantor W. M., Seress Á.* Large element orders and the characteristic of Lie-type simple groups // J. Algebra. 2009. V. 322, N 3. P. 802–832.

41. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. Т. 6. С. 1–12.

42. *Ward H. N.* On Ree's series of simple groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 121. P. 62–89.

43. *Grechkoseeva M. A.* On element orders in covers of finite simple groups of Lie type // J. Algebra Appl. 2015. V. 14. 1550056. 16 p.

Статья поступила 18 июня 2015 г.

Васильев Андрей Викторович, Гречкосеева Мария Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vasand@math.nsc.ru, grechkoseeva@gmail.com