Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 517.984.66

О ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ПОДМНОГООБРАЗИЯ МАТРИЦ С ФИКСИРОВАННОЙ СТРУКТУРОЙ ЖОРДАНОВЫХ БЛОКОВ

А. А. Бондарь

Аннотация. Построен новый локальный диффеоморфизм, позволяющий исследовать подмногообразия матриц. С его помощью определена параметризация подмногообразия комплексных матриц, у которых фиксирована структура жордановых блоков выделенных собственных значений. Приведена сравнительная характеристика различных параметризаций.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.604

Ключевые слова: подмногообразие матриц, жорданова форма, локальный диффеоморфизм, параметризация.

Введение

Подмногообразие вещественных симметрических матриц с фиксированной кратностью выделенных собственных значений впервые было исследовано В. И. Арнольдом [1]. Им была найдена формула коразмерности этого подмногообразия. Его результаты были обобщены для случая компактных самосопряженных операторов в статье [2], где впервые был предложен специальный локальный диффеоморфизм, распрямляющий подмногообразие Арнольда. Дальнейшее изучение свойств было продолжено Я. М. Дымарским в [3, 4]. В [5] авторами описан новый локальный диффеоморфизм в пространстве комплексных матриц, при помощи которого параметризовано подмногообразие матриц с фиксированной структурой жордановых блоков выделенных собственных значений. В основе построения диффеоморфизма лежит идея разложения параметризующего пространства в прямую сумму двух подпространств: первое подпространство «управляет» выбранной частью спектра, второе — соответствующими инвариантными подпространствами. Оказывается, первое семейство является так называемым «версальным семейством» матриц по Арнольду [6], второе — касательным пространством к орбите выбранной матрицы. Поскольку выбор версального семейства неоднозначен, можно построить бесконечное множество локальных диффеоморфизмов, обладающих указанными свойствами. Среди версальных семейств Арнольдом выделены два семейства с замечательными свойствами: семейство матриц, ортогональных к орбите выбранной (использовано в [5]), и семейство матриц с наименьшим числом ненулевых параметров. Это семейство используется в настоящей статье. В конце статьи анализируются достоинства и недостатки указанных подходов.

Статья построена следующим образом. В разд. 1 введены основные обозначения и приведены необходимые факты из теории орбит и семейств матриц.

© **2015 Бондарь А. А.**

В разд. 2 определен локальный диффеоморфизм и исследованы его свойства. Разд. 3 посвящен описанию подмножества матриц с единственным собственным значением, которому отвечает фиксированная структура жордановых блоков. В разд. 4 доказана основная теорема о подмногообразии комплексных матриц с фиксированной структурой жордановых блоков выделенного собственного значения. В разд. 5 основная теорема обобщена для случая, в котором отлаживаются несколько собственных значений. Наконец, в разд. 6 проведена сравнительная характеристика двух различных параметризаций.

Благодарности. Автор признателен Я. М. Дымарскому за постановку проблемы и постоянную поддержку.

1. Обозначения

Обозначим через $\mathbb{C}^{n\times n}$ пространство комплексных матриц порядка n с эрмитовым скалярным произведением $(A,B) := \mathrm{Tr}(A\cdot B^*)$, где B^*— матрица полученная из B транспонированием и комплексным сопряжением. Пусть J — жорданова матрица, σ — ее спектр, $\lambda\in\sigma$. Тогда $J = J(\lambda)\oplus J(\sigma\setminus\lambda)$, где $J(\lambda)$ является прямой суммой жордановых блоков, отвечающих собственному значению λ, а $J(\sigma\setminus\lambda)$ — прямой суммой жордановых блоков, отвечающих остальным собственным значениям. Пусть алгебраическая кратность λ равняется m, а геометрическая кратность — s, обозначим через $\bar{k} := \{k_1,\dots,k_s\}$ характеристику Сегре собственного значения λ. Пусть $N_\varepsilon(J)\subset\mathbb{C}^{n\times n}$ — ε-окрестность J. Мы изучаем подмножество $N(J,\varepsilon,\lambda,\bar{k})$ матриц $A\in N_\varepsilon(J)$ таких, что A имеет единственное собственное значение λ', близкое λ, которому отвечает такая же характеристика Сегре $\bar{k}$.

Пусть P_λ — проекционный оператор Рисса, порожденный λ, а $P_{\sigma\setminus\lambda}$ — проекционный оператор Рисса, порожденный $\sigma\setminus\lambda$. Пространство $\mathbb{C}^n$ представляется в виде $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^m\oplus\mathbb{C}^{n-m}$, где слагаемые являются инвариантными подпространствами; $\mathbb{C}^m = P_\lambda(\mathbb{C}^n)$ соответствует собственному значению λ, а $\mathbb{C}^{n-m} = P_{\sigma\setminus\lambda}(\mathbb{C}^n)$ — остальной части спектра σ. Данное разложение порождает разложение матричного пространства, произвольная матрица $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ имеет блочное представление

$$B = \begin{bmatrix} B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} & B_{\mathbf{1},\mathbf{2}} \\ B_{\mathbf{2},\mathbf{1}} & B_{\mathbf{2},\mathbf{2}} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где

$$B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}\in M := \mathbb{C}^{m\times m},\ B_{\mathbf{1},\mathbf{2}}\in\mathbb{C}^{m\times(n-m)},\ B_{\mathbf{2},\mathbf{1}}\in\mathbb{C}^{(n-m)\times m},\ B_{\mathbf{2},\mathbf{2}}\in\mathbb{C}^{(n-m)\times(n-m)}.$$

Жорданова структура блока $J(\lambda)$ порождает блочное представление

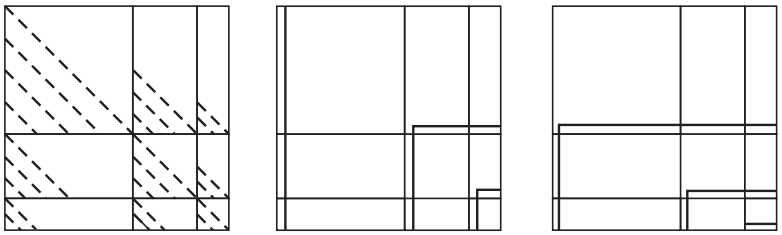
$$B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{ss} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Как известно [6], группа Ли $GL(m,\mathbb{C})$ всех невырожденных матриц порядка m действует на линейное многообразие матриц M матриц по формуле

$$Ad_G : M\to M,\quad Ad_G(J) := GJG^{-1}\quad (G\in GL(m,\mathbb{C})).$$

Обозначим через $\mathscr{O}(A)$ орбиту произвольной фиксированной матрицы $A\in M$ под действием группы $GL(m,\mathbb{C})$. Орбита является гладким подмногообразием, содержащим все матрицы, подобные A.

В [6] В. И. Арнольд предложил специальное семейство матриц, у которых в некоторых местах вместо нулей стоят голоморфные функции параметров, обращающиеся в нуль при нулевых значениях параметров. Более точно, матрицы из семейства Арнольда имеют вид $A = J(\lambda) + B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$, где $B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$ имеет вид, изображенный на рис. 1(а)–(в). На рис. 1(а) на каждом косом отрезке стоит ряд одинаковых чисел, остальные элементы являются нулевыми. Матрицы на рис. 1(б), (в) получаются из матриц, изображенных на рис. 1(а), если на каждом из косых отрезков выбрать один параметр, а остальные приравнять нулю.



(а) семейство матриц 1 (б) семейство матриц 2 (в) семейство матриц 3

Рис. 1.

Подпространство матриц, изображенных на рис. 1(а), является ортогональным и трансверсальным касательному пространству $T_{J(\lambda)}\mathscr{O}(J(\lambda)$ к орбите матрицы $J(\lambda)$ в точке $J(\lambda)$. Параметризация с использованием этого пространства была приведена в [5]. В свою очередь, подпространство матриц, изображенных на рис. 1(б),(в), имеет наименьшее число ненулевых параметров, а также трансверсально касательному пространству $T_{J(\lambda)}\mathscr{O}(J(\lambda)$ к орбите матрицы $J(\lambda)$ в точке $J(\lambda)$, но уже не ортогонально ему. Целью настоящей статьи является описание параметризации подмножества $N(J, \varepsilon, \lambda, \bar{k})$ при помощи локального диффеоморфизма, порожденного семейством матриц, которые имеют вид, изображенный на рис. 1(б).

Множество всех матриц на рис. 1(б) образует линейное подпространство $\widetilde{M_{\bar{k}}}$ размерности

$$d = k_1 + 3k_2 + \cdots + (2s-1)k_s. \tag{3}$$

Через

$$\widetilde{\mathrm{Fam}} := \{J(\lambda) + B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} \mid B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} \in \widetilde{M_{\bar{k}}}\}$$

обозначим семейство матриц Арнольда. Рассмотрим отображение

$$\widetilde{F} : M \to \widetilde{M_{\bar{k}}}, \quad B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} \to \widetilde{F}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) := \widetilde{F}_{\mathbf{1},\mathbf{1}} = [\widetilde{F}_{ij}]_{i,j=1}^{s}. \tag{4}$$

Отображение $\widetilde{F}$ ставит в соответствие матрице $B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$ матрицу, у которой элементы на отмеченных местах (см. рис. 1(б)) совпадают с элементами матрицы $B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$, а остальные элементы равны нулю.

Пусть N_{k_i} — матрица сдвига вперед порядка k_i [7]:

$$N_{k_i} := \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение

$$\widetilde{S} : M \to M : B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} \to \widetilde{S}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) := \widetilde{S}_{\mathbf{1},\mathbf{1}} = [\widetilde{S}_{ij}]_{i,j=1}^{s}, \tag{5}$$

где

$$\widetilde{S}_{ij} = \begin{cases} (B_{ii} - \widetilde{F}_{ii})N_{k_i}, & \text{если } i = j; \\ (B_{ij} - \widetilde{F}_{ij})N_{k_{i-1}}, & \text{если } i > j; \\ N_{k_i}(B_{ij} - \widetilde{F}_{ij}), & \text{если } i < j. \end{cases} \tag{6}$$

Иными словами, чтобы получить матрицу $\widetilde{S}_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$, необходимо вначале из $B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$ вычесть $\widetilde{F}_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$, а затем у полученной матрицы все элементы каждого блока, который находится на главной диагонали и ниже ($i = j,\ i > j$), сдвинуть на один столбец влево, а все элементы каждого блока выше главной диагонали ($i < j$) — на одну строку вниз. Например, для матрицы $B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} = (b_{ij})_{i,j=1}^{6}$, у которой характеристика Сегре собственного значения λ есть $\bar{k} = (3, 2, 1)$, матрицы $\widetilde{F}_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$ и $\widetilde{S}_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$ будут иметь вид

$$\widetilde{F}_{\mathbf{1},\mathbf{1}} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ \hline b_{41} & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 \\ b_{51} & 0 & 0 & b_{54} & 0 & b_{56} \\ \hline b_{61} & 0 & 0 & b_{64} & 0 & b_{66} \end{array}\right), \quad \widetilde{S}_{\mathbf{1},\mathbf{1}} = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{22} & b_{23} & 0 & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{32} & b_{33} & 0 & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ \hline b_{42} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & 0 \\ b_{52} & b_{53} & 0 & b_{55} & 0 & b_{46} \\ \hline b_{62} & b_{63} & 0 & b_{65} & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отметим, что отображения $\widetilde{F}$, $\widetilde{S}$ линейны. Матрицы $\widetilde{F}_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$ и $\widetilde{S}_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$ определяются по матрице $B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$ однозначно.

2. Локальный диффеоморфизм

Разложение (1) и отображения (4), (5) определяют линейные отображения

$$\widehat{F}, \widehat{S} : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n},$$

$$\widehat{F}(B) := \begin{bmatrix} \widetilde{F}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) & 0 \\ 0 & B_{\mathbf{2},\mathbf{2}} \end{bmatrix}, \quad \widehat{S}(B) := \begin{bmatrix} \widetilde{S}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) & B_{\mathbf{1},\mathbf{2}} \\ B_{\mathbf{2},\mathbf{1}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим отображение малой окрестности нуля:

$$\widetilde{\Psi} : \mathbb{C}^{n\times n} \supset N(0) \to \mathbb{C}^{n\times n},$$

$$\widetilde{\Psi}(B) := (E + \widehat{S}(B))(J + \widehat{F}(B))(E + \widehat{S}(B))^{-1}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. $\widetilde{\Psi}(0) = J$.
2. *Операторы* $J + \widehat{F}(B)$ *и* $\widetilde{\Psi}(B)$ *подобны.*
3. $\widetilde{\Psi}$ *инвариантно относительно подпространств* M *и* $\mathbb{C}^{(n-m)\times(n-m)}$.
4. $\widetilde{\Psi}$ *аналитично в нуле.*
5. $\widetilde{\Psi}$ *диффеоморфно отображает достаточно малую окрестность* $N(0)$ *нуля пространства* $\mathbb{C}^{n\times n}$ *на окрестность* $N_\varepsilon(J)$ *точки* J.

Доказательство. Утверждения 1–3 следуют непосредственно из формулы (7). Аналитичность $\widetilde{\Psi}$ вытекает из линейности отображений $\widehat{S}$ и $\widehat{F}$ и формулы (7).

Чтобы доказать утверждение 5, найдем производную $D\widetilde{\Psi}(0)$ в точке $0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и докажем, что она является линейным изоморфизмом. С этой целью разложим $(E+\widehat{S}(B))^{-1}$ в ряд и выделим линейную часть:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}(B) &= (E+\widehat{S}(B))(J+\widehat{F}(B))(E+\widehat{S}(B))^{-1}\\ &= (E+\widehat{S}(B))(J+\widehat{F}(B))(E-\widehat{S}(B)+(\widehat{S}(B))^2-\dots)\\ &= J+\widehat{F}(B)+\widehat{S}(B)\cdot J - J\cdot\widehat{S}(B)+o(B),\end{aligned}$$

где $o(B)$ — бесконечно малая второго порядка. Поэтому

$$\begin{aligned}D\widetilde{\Psi}(0)B &= \widehat{F}(B)+[\widehat{S}(B),J]\\ &= \begin{pmatrix}\widetilde{F}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}})+[\widetilde{S}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}),J(\lambda)] & B_{\mathbf{1},\mathbf{2}}\cdot J(\sigma\setminus\lambda)-J(\lambda)\cdot B_{\mathbf{1},\mathbf{2}}\\ J(\sigma\setminus\lambda)\cdot B_{\mathbf{2},\mathbf{1}}-B_{\mathbf{2},\mathbf{1}}\cdot J(\lambda) & B_{\mathbf{2},\mathbf{2}}\end{pmatrix}. \qquad (8)\end{aligned}$$

Покажем, что $D\widetilde{\Psi}(0)$ является биекцией. Для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$D\widetilde{\Psi}(0)B = 0 \qquad (9)$$

имело единственное тривиальное решение $B=0$. Уравнение (9) равносильно системе операторных уравнений:

$$\begin{cases}\widetilde{F}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}})+[\widetilde{S}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}),J(\lambda)]=0, & \in M,\\ B_{\mathbf{2},\mathbf{2}}=0, & \in \mathbb{C}^{(n-m)\times(n-m)},\\ B_{\mathbf{1},\mathbf{2}}\cdot J(\sigma\setminus\lambda)-J(\lambda)\cdot B_{\mathbf{1},\mathbf{2}}=0, & \in \mathbb{C}^{(n-m)\times m},\\ J(\sigma\setminus\lambda)\cdot B_{\mathbf{2},\mathbf{1}}-B_{\mathbf{2},\mathbf{1}}\cdot J(\lambda)=0. & \in \mathbb{C}^{m\times(n-m)}.\end{cases}$$

Заметим, что уравнения независимы и каждое содержит в качестве неизвестного один из блоков разложения (1). Последние два уравнения являются уравнениями типа Сильвестра. Поскольку λ не является собственным значением матрицы $J(\sigma\setminus\lambda)$, указанные уравнения имеют только тривиальные решения [8]. Остается показать, что первое уравнение системы

$$\widetilde{F}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}})+[\widetilde{S}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}),J(\lambda)]=0 \qquad (10)$$

имеет тривиальное решение. Для доказательства этого утверждения разобьем уравнение (10) (учитывая разложение (2)) на s^2 независимых уравнений:

$$\widetilde{F}_{ij}+\widetilde{S}_{ij}\cdot J_j(\lambda)-J_i(\lambda)\cdot\widetilde{S}_{ij}=0, \qquad (11)$$

где $J_i(\lambda)$, $J_j(\lambda)$ — жордановы блоки под номерами i и j в форме $J(\lambda)$ $(i,j=1,\dots,s)$. Покажем, что каждое из этих уравнений имеет тривиальное решение.

Согласно (6) в зависимости от i и j уравнения (11) имеют один из трех видов.

1. Если $i=j$, т. е. если блоки находятся на главной диагонали матрицы $B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$, то уравнения из (11) имеют вид

$$\widetilde{F}_{ij}+\widetilde{S}_{ii}\cdot J_i(\lambda)-J_i(\lambda)\cdot\widetilde{S}_{ii}=0, \quad i=1,\dots,s,$$

или с учетом (6)

$$\widetilde{F}_{ij}+(B_{ii}-\widetilde{F}_{ii})N_{k_i}\cdot J_i(\lambda)-J_i(\lambda)\cdot(B_{ii}-\widetilde{F}_{ii})N_{k_i}=0, \quad i=1,\dots,s.$$

Поскольку (см. рис. 1(б))

$$B_{ii} - \widetilde{F}_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{p-1,2} & \dots & b_{p-1,p} \\ 0 & b_{p2} & \dots & b_{pp} \end{pmatrix}, \quad p = k_1, \dots, k_s,$$

то

$$\widetilde{S}_{ii} = (B_{ii} - \widetilde{F}_{ii})N_{k_i} = \begin{pmatrix} b_{12} & \dots & b_{1p} & 0 \\ b_{22} & \dots & b_{2p} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p-1,2} & \dots & b_{p-1,p} & 0 \\ b_{p2} & \dots & b_{pp} & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} &\widetilde{S}_{ii} \cdot J_i(\lambda) - J_i(\lambda) \cdot \widetilde{S}_{ii} \\ &\quad = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{p-1,2} & \dots & b_{p-1,p} \\ 0 & b_{p2} & \dots & b_{pp} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2p} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p-1,2} & \dots & b_{p-1,p} & 0 \\ b_{p2} & \dots & b_{pp} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} -b_{22} & b_{12} - b_{23} & \dots & b_{1,p-1} - b_{2,p} & b_{1,p} \\ -b_{32} & b_{22} - b_{33} & \dots & b_{2,p-1} - b_{3,p} & b_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{p2} & b_{p-1,2} - b_{p,3} & \dots & b_{p-1,p-1} - b_{p,p} & b_{p-1,p} \\ 0 & b_{p,2} & \dots & b_{p,p-1} & b_{p,p} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из рис. 1(б) вытекает, что

$$\widetilde{F}_{ii} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p-1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{p1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} B_{ii} &:= \widetilde{F}_{ij} + \widetilde{S}_{ii} \cdot J_i(\lambda) - J_i(\lambda) \cdot \widetilde{S}_{ii} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} b_{11} - b_{22} & b_{12} - b_{23} & \dots & b_{1,p-1} - b_{2,p} & b_{1,p} \\ b_{21} - b_{32} & b_{22} - b_{33} & \dots & b_{2,p-1} - b_{3,p} & b_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p-1,1} - b_{p,2} & b_{p-1,2} - b_{p,3} & \dots & b_{p-1,p-1} - b_{p,p} & b_{p-1,p} \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \dots & b_{p,p-1} & b_{p,p} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из уравнения $B_{ii} = 0$ получаем, что элементы последней строки и последнего столбца матрицы B_{ii} нулевые; вслед за ними нулевыми являются элементы предпоследней строки и предпоследнего столбца, и т. д. Таким образом, при $i = j$ уравнения из (11) имеют лишь тривиальное решение.

2. Если $i > j$, т. е. если блоки находятся ниже главной диагонали матрицы $B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$, то уравнения из (11) имеют вид

$$\widetilde{F}_{ij} + \widetilde{S}_{ij} \cdot J_j(\lambda) - J_i(\lambda) \cdot \widetilde{S}_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, s,$$

или с учетом (6)

$$\widetilde{F}_{ij} + (B_{ij} - \widetilde{F}_{ij})N_{k_{i-1}} \cdot J_j(\lambda) - J_i(\lambda) \cdot (B_{ij} - \widetilde{F}_{ij})N_{k_{i-1}} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, s.$$

Поскольку (см. рис. 1(б))

$$B_{ij} - \widetilde{F}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b_{l-1,2} & \ldots & b_{l-1,k} \\ 0 & b_{l2} & \ldots & b_{lk} \end{pmatrix}, \quad l, k = k_1, \ldots, k_s \text{ и } l \geq k,$$

то

$$\widetilde{S}_{ij} = (B_{ij} - \widetilde{F}_{ij})N_{k_{i-1}} = \begin{pmatrix} b_{12} & \ldots & b_{1k} & 0 \\ b_{22} & \ldots & b_{2k} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{l-1,2} & \ldots & b_{l-1,k} & 0 \\ b_{l2} & \ldots & b_{lk} & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} &\widetilde{S}_{ii} \cdot J_i(\lambda) - J_i(\lambda) \cdot \widetilde{S}_{ii} \\ &\quad = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b_{l-1,2} & \ldots & b_{l-1,k} \\ 0 & b_{l2} & \ldots & b_{lk} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{22} & \ldots & b_{2k} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{l-1,2} & \ldots & b_{l-1,k} & 0 \\ b_{l2} & \ldots & b_{lk} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad = \begin{pmatrix} -b_{22} & b_{12} - b_{23} & \ldots & b_{1,k-1} - b_{2,k} & b_{1,k} \\ -b_{32} & b_{22} - b_{33} & \ldots & b_{2,k-1} - b_{3,k} & b_{2,k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b_{l2} & b_{l-1,2} - b_{l,3} & \ldots & b_{l-1,k-1} - b_{l,k} & b_{l-1,k} \\ 0 & b_{l,2} & \ldots & b_{l,k-1} & b_{l,k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из рис. 1(б) вытекает, что

$$\widetilde{F}_{ij} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{l-1,1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{l1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &B_{ij} := \widetilde{F}_{ij} + \widetilde{S}_{ij} \cdot J_j(\lambda) - J_i(\lambda) \cdot \widetilde{S}_{ij} \\ &\quad = \begin{pmatrix} b_{11} - b_{22} & b_{12} - b_{23} & \ldots & b_{1,k-1} - b_{2,k} & b_{1,k} \\ b_{21} - b_{32} & b_{22} - b_{33} & \ldots & b_{2,k-1} - b_{3,k} & b_{2,k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{l-1,1} - b_{l,2} & b_{l-1,2} - b_{l,3} & \ldots & b_{l-1,k-1} - b_{l,k} & b_{l-1,k} \\ b_{l,1} & b_{l,2} & \ldots & b_{l,k-1} & b_{l,k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Из уравнения B_{ij} получаем, что элементы последней строки и последнего столбца матрицы B_{ij} нулевые; вслед за ними нулевыми являются элементы предпоследней строки и предпоследнего столбца, и т. д. Таким образом, при $i > j$ уравнения из (11) имеют лишь тривиальное решение.

3. Наконец, если $i < j$, т. е. если блоки находятся выше главной диагонали матрицы $B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$, то уравнения из (11) с учетом (6) имеют вид

$$\widetilde{F}_{ij} + N_{k_i}(B_{ij} - \widetilde{F}_{ij}) \cdot J_j(\lambda) - J_i(\lambda) \cdot N_{k_i}(B_{ij} - \widetilde{F}_{ij}) = 0, \quad i, j = 1, \ldots, s.$$

Поскольку (см. рис. 1(б))

$$B_{ij} - \widetilde{F}_{ij} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rp} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad r, p = k_1, \ldots, k_s \ (r \geq p),$$

то

$$\widetilde{S}_{ij} = N_{k_i}(B_{ij} - \widetilde{F}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rp} \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\widetilde{S}_{ij} \cdot J_j(\lambda) - J_i(\lambda) \cdot \widetilde{S}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1,p-1} \\ 0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2,p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{r,p-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rp} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ -b_{21} & b_{11} - b_{22} & \ldots & b_{1,p-1} - b_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b_{r1} & b_{r-1,1} - b_{r,2} & \ldots & b_{r-1,p-1} - b_{r,p} \\ 0 & b_{r1} & \ldots & b_{r,p-1} \end{pmatrix}.$$

Вз рис. 1(б) вытекает, что

$$\widetilde{F}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{r+1,1} & b_{r+1,2} & \ldots & b_{r+1,p} \end{pmatrix},$$

тогда

$$B_{ij} = \widetilde{F}_{ij} + \widetilde{S}_{ij} \cdot J_j(\lambda) - J_i(\lambda) \cdot \widetilde{S}_{ij} = \begin{pmatrix} -b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ -b_{21} & b_{11} - b_{22} & \ldots & b_{1,p-1} - b_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -b_{r1} & b_{r-1,1} - b_{r,2} & \ldots & b_{r-1,p-1} - b_{r,p} \\ b_{r+1,1} & b_{r+1,2} + b_{r1} & \ldots & b_{r+1,p} + b_{r,p-1} \end{pmatrix}.$$

Из уравнения B_{ij} следует, что элементы первой строки и первого столбца матрицы B_{ij} нулевые; вслед за ними нулевыми являются элементы второй строки и второго столбца, и т. д. Таким образом, при $i < j$ уравнения из (11) имеют лишь тривиальное решение.

Мы показали, что в каждом из блоков матрицы B_{ij} уравнения из (11) имеют только тривиальное решение, это завершает доказательство теоремы. $\square$

3. Случай единственного собственного значения

Рассмотрим случай, когда $m = n$. Обозначим через $N^m(\mathrm{Jor}, \bar{k}) \subset M$ подмножество m-мерных жордановых матриц $J(\lambda')$ с той же характеристикой Сегре, что и у матрицы $J(\lambda')$. Очевидно, что подмножество $N^m(\mathrm{Jor}, \bar{k})$ является одномерным аффинным подпространством матриц $J(\lambda') = J(\lambda) + (\lambda' - \lambda)E$, $\lambda' \in \mathbb{C}$. Исследуем подмножество $N^m(\bar{k}) \subset M$ всех матриц, жордановы формы которых принадлежат пространству $N^m(\mathrm{Jor}, \bar{k})$. Иными словами, $N^m(\bar{k})$ есть «пачка матриц» в терминологии В. И. Арнольда [6]. Обозначим через $N^m(\bar{k}, \varepsilon) = N^m(\bar{k}) \cap N_\varepsilon(J(\lambda))$ окрестность $J(\lambda)$ в пачке $N^m(\bar{k})$. В [6, § 5] доказано, что

$$\mathrm{codim}(N^m(\bar{k}, \varepsilon)) = \mathrm{codim}(N^m(\bar{k})) = (k_1 + 3k_2 + 5k_3 + \cdots + (2s-1)k_s) - 1. \quad (12)$$

Поскольку $m = n$, то $N(J, \varepsilon, \lambda, \bar{k}) = N^m(\bar{k}, \varepsilon)$, $J = J(\lambda)$, $B = B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$ и

$$\widetilde{\Psi}(B) = (E + \widetilde{S}(B))(J(\lambda) + \widetilde{F}(B))(E + \widetilde{S}(B))^{-1}. \quad (13)$$

Опишем вначале вид матриц, из которых состоит пересечения пачки $N^m(\bar{k})$ с семейством матриц Арнольда $\widetilde{\mathrm{Fam}}$.

Лемма. *Подмногообразие $N^m(\bar{k})$ пересекается с подпространством $\widetilde{\mathrm{Fam}}$ по одномерному аналитическому подмногообразию L блочно-диагональных матриц, у которых диагональные блоки B_{ii} имеют вид*

$$B_{ii} = \begin{pmatrix} b_1(i) + \lambda & 1 & & & 0 \\ b_2(i) & \lambda & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ b_{k_i-1}(i) & & & \ddots & 1 \\ b_{k_i}(i) & 0 & & & \lambda \end{pmatrix},$$

причем элементы b_j $(j = 1, \ldots, k_i)$ из первого столбца вычисляются по формуле

$$b_j = (-1)^{j-1} C_{k_i}^j \left(\frac{b}{k_s}\right)^j,$$

где b — произвольный малый параметр, C_n^k — число сочетаний из n по k.

Доказательство. Подмногообразие $N^m(\bar{k})$ по определению содержит орбиту матрицы $J(\lambda)$ и является трансверсальным подпространству $\widetilde{\mathrm{Fam}}$ в точке $J(\lambda)$. Следовательно, пересечение $N^m(\bar{k}) \cap \widetilde{\mathrm{Fam}}$ будет одномерным аналитическим подмногообразием.

Покажем, что это подмногообразие состоит из описанных в условии леммы матриц. Очевидно, что матрицы из подмножества L принадлежат нормальному семейству $\widetilde{\mathrm{Fam}}$ (см. рис. 1(б)). Покажем, что они принадлежат подмногообразию $N^m(\bar{k})$, т. е. что структура их жордановой формы совпадает со структурой $J(\lambda)$. Пусть $B \in L$, найдем собственные значения B:

$$\det(B - \chi E_m) = \prod_{i=1}^{s} \det \begin{pmatrix} b_1(i) + \lambda - \chi & 1 & & & 0 \\ b_2(i) & \lambda - \chi & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ b_{k_i-1}(i) & & & \ddots & 1 \\ b_{k_i}(i) & 0 & & & \lambda - \chi \end{pmatrix} = 0.$$

Полученное уравнение равносильно следующему:

$$\prod_{i=1}^{s}((\lambda-\chi)^{k_i}+b_1(i)(\lambda-\chi)^{k_i-1}+b_2(i)(\lambda-\chi)^{k_i-2}+\cdots+b_{k_i}(i))=0.$$

Учитывая, что $b_j=(-1)^{j-1}C_{k_i}^{j}\left(\frac{b}{k_s}\right)^j$, получаем цепочку равносильных уравнений:

$$\prod_{i=1}^{s}\left(\lambda-\chi-\frac{b}{k_s}\right)^{k_i}=0 \iff \left(\lambda-\chi-\frac{b}{k_s}\right)^{k_1+\cdots+k_s}=0$$
$$\iff \left(\lambda-\chi-\frac{b}{k_s}\right)^{m}=0.$$

Значит, матрица B имеет единственное собственное значение $\chi=\lambda-\frac{b}{k_s}$ алгебраической кратности m. Далее, матрица B имеет блочно-диагональный вид, в котором размеры клеток совпадают с размерами соответствующих жордановых клеток матрицы $J(\lambda)$. Следовательно, инвариантные подпространства матрицы B совпадают с соответствующими инвариантными подпространствами матрицы $J(\lambda)$, а значит, структура жордановой формы матрицы B совпадает со структурой $J(\lambda)$. Таким образом, утверждение леммы доказано. □

Введем линейное подпространство матриц специального вида

$$\widetilde{T}^m:=\{B\mid \widetilde{F}(B)\in L\}\subset M.$$

По определению подпространства $\widetilde{T}^m$ получаем, что

$$\operatorname{codim}(\widetilde{T}^m)=(k_1+3k_2+5k_3+\cdots+(2s-1)k_s)-1. \tag{14}$$

Локальную параметризацию пачки $N^m(\bar{k})$ описывает

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Подмножество $N^m(\bar{k},\varepsilon)$ является аналитическим подмногообразием и определяется следующим образом:*

$$N^m(\bar{k},\varepsilon)=\widetilde{\Psi}(\widetilde{T}^m\cap N(0)).$$

2. *Касательное пространство $T_{J(\lambda)}N^m(\bar{k},\varepsilon)$ состоит из блочных матриц $\Xi=(\Xi_{ij})$ с блоками размеров $k_i\times k_j$ $(i,j=1,\ldots,s)$.*

Если $i\neq j$, то в зависимости от разности k_i-k_j блоки имеют один из трех видов:

$$\Xi_{ij}=\begin{bmatrix}\gamma_1 & * & * & * & \ldots & *\\ \beta_1 & \gamma_2 & * & * & \ldots & *\\ 0 & \beta_2 & \gamma_3 & * & \ldots & *\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}* & * & *\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ * & * & *\\ \gamma_1 & * & *\\ \beta_1 & \gamma_2 & *\\ 0 & \beta_2 & \gamma_3\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\gamma_1 & * & *\\ \beta_1 & \gamma_2 & *\\ 0 & \beta_2 & \gamma_3\end{bmatrix},$$

$$k_i-k_j<0, \qquad k_i-k_j>0, \qquad k_i-k_j=0.$$

Если $i = j$, то блоки имеют вид

$$\Xi_{ii} = \begin{bmatrix} \omega_1 & * & * & * & * \\ \gamma_1 & \dots & \ddots & * & * \\ \beta_1 & \gamma_2 & \dots & \ddots & * \\ 0 & \beta_2 & \gamma_3 & \dots & \omega_{k_i} \end{bmatrix},$$

где во всех случаях $\beta_1 + \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \dots = 0$, элементы $*$ произвольные, а суммы элементов на главной диагонали каждого диагонального блока удовлетворяют условиям

$$\sum_{l=1}^{k_i} \omega_l = k_i(\lambda - \lambda'), \quad i = 1, \dots, s,$$

λ' — произвольный параметр.

Доказательство. Во-первых, отображение (13) отображает малую матрицу $B \in \widetilde{T}^m \cap N(0)$ в матрицу

$$\widetilde{\Psi}(B) = (E + \widetilde{S}(B))(J(\lambda) + \widetilde{F}(B))(E + \widetilde{S}(B))^{-1} = (E + \widetilde{S}(B))(J(\lambda'))(E + \widetilde{S}(B))^{-1}.$$

Из утверждения 2 теоремы 1 следует, что $\widetilde{\Psi}(\widetilde{T}^m \cap N(0)) \subset N^m(\bar{k}, \varepsilon)$. Для завершения доказательства утверждения 1 остается отметить, что $\widetilde{\Psi}$ является локальным диффеоморфизмом (утверждение 5 теоремы 1) и $\operatorname{codim}(\widetilde{T}^m) = \operatorname{codim}(N^m(\bar{k}, \varepsilon))$ (см. (12), (14)).

Доказательство п. 2 описано в [5, теорема 2] и не зависит от выбранной параметризации. □

4. Подмногообразие $N(J, \varepsilon, \lambda, \bar{k})$

Рассмотрим случай, когда $n > m$. Обозначим через $\widetilde{T}$ линейное подпространство блочных (1) матриц, у которых блок $B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} \in \widetilde{T}^m$, т. е.

$$\widetilde{T} := \{B \mid B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} \in \widetilde{T}^m\} \subset \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Основным результатом работы является

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Подмножество $N_c(A, \varepsilon, \lambda, \bar{k}) \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ определяется следующим образом:*

$$N(J, \varepsilon, \lambda, \bar{k}) = \widetilde{\Psi}(\widetilde{T} \cap N(0)).$$

2. *Подмножество $N(J, \varepsilon, \lambda, \bar{k})$ является аналитическим подмногообразием комплексной коразмерности*

$$\operatorname{codim} N(J, \varepsilon, \lambda, \bar{k}) = (k_1 + 3k_2 + 5k_3 + \dots + (2s-1)k_s) - 1.$$

3. *Касательное пространство $T_A N_c(A, \varepsilon, \lambda, \bar{k})$ состоит из операторов $\begin{bmatrix} \Xi_{\mathbf{1},\mathbf{1}} & \Xi_{\mathbf{1},\mathbf{2}} \\ \Xi_{\mathbf{2},\mathbf{1}} & \Xi_{\mathbf{2},\mathbf{2}} \end{bmatrix}$, у которых блоки $\Xi_{\mathbf{1},\mathbf{2}}$, $\Xi_{\mathbf{2},\mathbf{1}}$, $\Xi_{\mathbf{2},\mathbf{2}}$ произвольные, а блок $\Xi_{\mathbf{1},\mathbf{1}}$ имеет вид, описанный в утверждении 2 теоремы 2.*

Доказательство. Применим к малой матрице $B \in \widetilde{T} \cap N(0)$ отображение $\widetilde{\Psi}$:

$$\widetilde{\Psi}(B) = (E + \widehat{S}(B))(J + \widehat{F}(B))(E + \widehat{S}(B))^{-1}$$
$$= \left(E + \begin{bmatrix} \widetilde{S}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) & B_{\mathbf{2},\mathbf{1}} \\ B_{\mathbf{1},\mathbf{2}} & 0 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} J(\lambda) + \widetilde{F}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) & 0 \\ 0 & J(\sigma \setminus \lambda) + B_{\mathbf{2},\mathbf{2}} \end{bmatrix}$$
$$\times \left(E + \begin{bmatrix} \widetilde{S}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) & B_{\mathbf{2},\mathbf{1}} \\ B_{\mathbf{1},\mathbf{2}} & 0 \end{bmatrix}\right)^{-1},$$

где $\widetilde{F}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) \in L$.

Матрица $J + \widehat{F}(B)$ имеет блочно-диагональный вид, и спектр диагональных блоков $J(\lambda) + \widetilde{F}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}})$ и $J(\sigma \setminus \lambda) + B_{\mathbf{2},\mathbf{2}}$ не пересекается. Учитывая утверждение 2 теоремы 1 и утверждение 1 теоремы 2, получим

$$\widetilde{\Psi}(B) \in N(J, \varepsilon, \lambda, \bar{k}) \iff \widetilde{F}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) + \widetilde{S}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) \in \widetilde{T}^{\mathbf{11}} \cap N(0).$$

Из определения множества $\widetilde{T}$ следует, что

$$\widetilde{F}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) + \widetilde{S}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}}) \in \widetilde{T}^{\mathbf{11}} \cap N(0) \iff B \in \widetilde{T} \cap N(0). \tag{15}$$

Утверждение 2 теоремы 2 следует из (15) и формулы (14). Доказательство утверждения 3 повторяет доказательство, приведенное для подмногообразия $N(J, \varepsilon, \lambda, \bar{k})$ в [5]. $\square$

5. Случай нескольких собственных значений

Обозначим через $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\} \subset \sigma$ подмножество фиксированных собственных значений. Тогда $J = J(\Lambda) \oplus J(\sigma \setminus \Lambda) = J(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_p) \oplus J(\sigma \setminus \Lambda)$, где $J(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, p)$ — прямая сумма жордановых блоков, отвечающих собственному значению λ_i, а $J(\sigma \setminus \Lambda)$ — прямая сумма жордановых блоков, отвечающих остальной части спектра. Пусть m_i — алгебраическая, а s_i — геометрическая кратности λ_i. Обозначим через $\bar{k}(i) := (k_1(i), k_2(i), \ldots k_{s_i}(i))$ характеристику Сегре λ_i. Через $K = (\bar{k}(1), \bar{k}(2), \ldots, \bar{k}(p))$ обозначим упорядоченный набор этих векторов. Изучим подмножество $N(J, \varepsilon, \Lambda, K) \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ матриц $A \in N_\varepsilon(J)$ таких, что A имеет единственное собственное значение λ_i', близкое λ_i, и соответствующий жорданов блок $J(A, \lambda_i')$ имеет ту же структуру, что и $J(\lambda_i)$, для всех $i = 1, \ldots, p$.

Будем использовать обозначения, аналогичные введенным в разд. 1 и 3. Инвариантные пространства, соответствующие выбранным собственным значениям, и дополняющее их подпространство порождают блочное представление произвольной матрицы:

$$B = \left[\begin{array}{|ccccc|} \hline B_{\mathbf{1},\mathbf{1}} & & & & \\ & B_{\mathbf{2},\mathbf{2}} & & \overline{B} & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{B_{p,p}} & \\ & \underline{B} & & & B_{\mathbf{p+1},\mathbf{p+1}} \\ \hline \end{array}\right], \tag{16}$$

где

$$B_{\mathbf{i},\mathbf{i}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_{\mathbf{i},11} & B_{\mathbf{i},12} & \dots & B_{\mathbf{i},1s_i} \\ \hline B_{\mathbf{i},21} & B_{\mathbf{i},22} & \dots & B_{\mathbf{i},2s_i} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{\mathbf{i},s_i1} & B_{\mathbf{i},s_i2} & \dots & B_{\mathbf{i},s_i,s_i} \end{array}\right],$$

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & B_{\mathbf{1},\mathbf{2}} & \dots & & B_{\mathbf{1},\mathbf{p}} \\ & \boxed{0} & B_{\mathbf{2},\mathbf{3}} & \dots & \\ & & \boxed{\ddots} & \ddots & \vdots \\ & & & \boxed{0} & B_{\mathbf{p},\mathbf{p}+\mathbf{1}} \\ & 0 & & & \boxed{0} \end{bmatrix},$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & & & & \\ B_{\mathbf{2},\mathbf{1}} & \boxed{0} & & & 0 \\ \vdots & B_{\mathbf{2},\mathbf{3}} & \boxed{\ddots} & & \\ & \vdots & \ddots & \boxed{0} & \\ B_{\mathbf{p},\mathbf{1}} & \dots & & B_{\mathbf{p}+\mathbf{1},\mathbf{p}} & \boxed{0} \end{bmatrix}.$$

Аналогично $\widehat{F}(B)$ и $\widehat{S}(B)$ определим отображения

$$\widehat{F}_{\mathbf{p}}(B) := \begin{bmatrix} \boxed{\widetilde{F}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}})} & & & & \\ & \boxed{\widetilde{F}(B_{\mathbf{2},\mathbf{2}})} & & & 0 \\ & & \boxed{\ddots} & & \\ & & & \boxed{\widetilde{F}(B_{\mathbf{p},\mathbf{p}})} & \\ & 0 & & & \boxed{B_{\mathbf{p}+\mathbf{1},\mathbf{p}+\mathbf{1}}} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{S}_{\mathbf{p}}(B) := \begin{bmatrix} \boxed{\widetilde{S}(B_{\mathbf{1},\mathbf{1}})} & & & & \\ & \boxed{\widetilde{S}(B_{\mathbf{2},\mathbf{2}})} & & & \overline{B} \\ & & \boxed{\ddots} & & \\ & & & \boxed{\widetilde{S}(B_{\mathbf{p},\mathbf{p}})} & \\ & \underline{B} & & & \boxed{0} \end{bmatrix}.$$

Так же, как в (7), определим отображение

$$\widetilde{\Psi}_{\mathbf{p}}(B) := (E + \widehat{S}_{\mathbf{p}}(B))(J + \widehat{F}_{\mathbf{p}}(B))(E + \widehat{S}_{\mathbf{p}}(B))^{-1}.$$

Легко убедиться в том, что утверждения теоремы 1 справедливы для отображения $\widetilde{\Psi}_{\mathbf{p}}$.

Нам понадобится подпространство

$$\widetilde{T}^{\mathbf{p}} := \{B \mid B_{\mathbf{i},\mathbf{i}} \in \widetilde{T}^{m_i},\ i = 1, \dots, p\} \subset \mathbb{C}^{n\times n},$$

где $\widetilde{T}^{m_i} := \{\widetilde{F}(B_{\mathbf{i},\mathbf{i}}) \in L_i\}$.

Теорема 4. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Подмножество $N(J,\varepsilon,\Lambda,K)$ определяется следующим образом:*

$$N(J,\varepsilon,\Lambda,K) = \Psi_{\mathbf{p}}(T^{\mathbf{p}} \cap N(0)).$$

2. *Подмножество $N(J,\varepsilon,\Lambda,K) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ является аналитическим подмногообразием комплексной коразмерности*

$$\operatorname{codim} N(J,\varepsilon,\Lambda,K) = \sum_{i=1}^{p}(k_1(i) + 3k_2(i) + 5k_3(i) + \dots + (2s_i - 1)k_{s_i}(i)) - p,$$

3. *Касательное пространство $T_J N(J,\varepsilon,\Lambda,K)$ состоит из блочных матриц $[\Xi_{\mathbf{i},\mathbf{j}}]_{i,j=1}^{p} + 1$, у которых блоки $\Xi_{\mathbf{i},\mathbf{i}}$ при $i = 1,\dots,p$ имеют вид, описанный в утверждении* 2 *теоремы* 2, *а остальные блоки произвольные.*

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теоремы 3.

6. Заключение

Как отмечено в [5], В. И. Арнольд предложил [6] бесконечное множество специальных семейств матриц (нормальных форм) вида $J(\lambda) + \widetilde{M}_{\bar{k}}$, и каждое из них генерирует диффеоморфизм наподобие $\widetilde{\Psi}$. Нами были подробно исследованы две параметризации, каждая из которых схематично изображена на рис. 2.

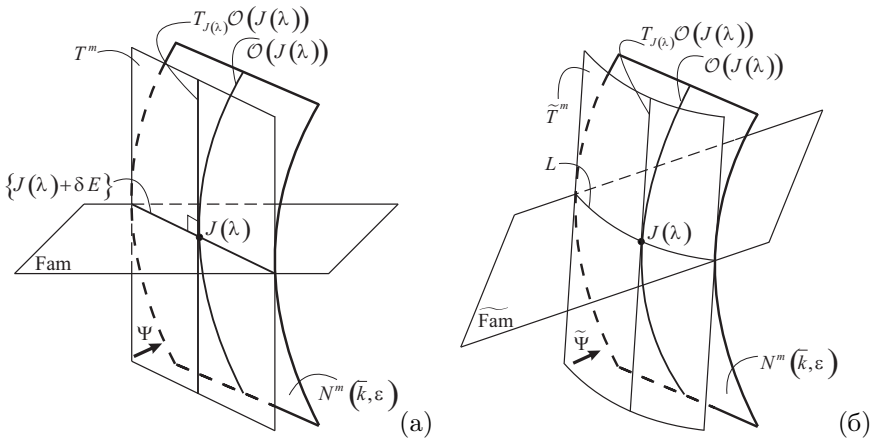


Рис. 2. Схемы параметризации подмногообразия.

Для удобства касательное пространство к подмногообразию изображено проходящим через «точку касания» $J(\lambda)$. В первой параметризации, описанной в статье [5], применяется нормальное семейство матриц $M_{\bar{k}}$, ортогональное к орбите $\mathscr{O}(J(\lambda))$. При помощи отображения Ψ подпространство T^m «превращается» в подмногообразие $N_m(\bar{k},\varepsilon)$. Пространство T^m является прямой суммой касательного пространства $T_{J(\lambda)}\mathscr{O}(J(\lambda))$ к орбите матрицы $J(\lambda)$ и одномерного пространства скалярных матриц, параметризованных спектральным параметром λ'. При этом подпространство T^m является касательным пространством к исследуемому подмногообразию: $T^m = T_{J(\lambda)}N_m(\bar{k},\varepsilon)$.

В параметризации, исследованной в данной статье, выбранное нормальное семейство матриц $\widetilde{M}_{\bar{k}}$ уже не ортогонально касательному пространству $T_{J(\lambda)}\mathscr{O}(J(\lambda))$. Подмногообразие $N_m(\bar{k},\varepsilon)$ является образом $\widetilde{\Psi}$ при действии на подмногообразие $\widetilde{T}^m$. Последнее диффеоморфно прямому произведению касательного пространства $T_{J(\lambda)}\mathscr{O}(J(\lambda))$ и подмногообразия L. (Подмногообразие L есть пересечение исследуемого подмногообразия с семейством $\widetilde{M}_{\bar{k}}$.)

Таким образом, можно отметить, что первый вид параметризации, несмотря на большее количество ненулевых параметров, является более естественным с точки зрения геометрии подпространства, что позволяет сохранить свойство [2, 3] отображения Ψ локально «распрямлять» подмногообразие в свое касательное пространство.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Моды и квазимоды // Функцион. анализ и его прил. 1972. Т. 6, № 2. С. 94–101.
2. *Fujiwara D., Tanikawa M., Yukita Sh.* The spectrum of Laplacian. I // Proc. Jap. Acad. Ser. A. 1978. V. 54, N 4. P. 87–91.
3. *Dymarskii Ya. M.* Manifold method in the eigenvector theory of nonlinear operators // J. Math. Sci. 2008. V. 154, N 5. P. 655–815.
4. *Dymarskii Ya. M., Ivanova O., Masyuta E.* Local research of manifolds generated by families of self-adjoint operators // Topology. 2009. V. 48. P. 213–223.
5. *Bondar A.* On the local diffeomorphism and submanifolds of matrices with fixed Jordan block structure // Oper. Matrices. 2014. V. 8, N 2. P. 411–423.
6. *Арнольд В. И.* О матрицах, зависящих от параметров // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 2. С. 101–114.
7. *Хорн Р.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
8. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

Статья поступила 6 ноября 2014 г.

Бондарь Александр Александрович
Уральский гос. педагогический университет,
Институт математики, информатики и информационных технологий,
кафедра высшей математики,
ул. Карла Либкнехта, 9, Екатеринбург 620075
a.-bondar@mail.ru