Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 517.925.51

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ

А. Ю. Александров,
А. П. Жабко, А. А. Косов

Аннотация. Установлены необходимые и достаточные условия разрешимости системы уравнений в частных производных ляпуновского типа в классе однородных функций. С использованием полученного результата предложен подход к исследованию устойчивости положения равновесия существенно нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в критическом случае n нулевых и n чисто мнимых корней, основанный на декомпозиции изучаемой системы на две изолированные подсистемы вдвое меньшей размерности.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.602

Ключевые слова: система Ляпунова, однородные решения, нелинейные системы, декомпозиция, асимптотическая устойчивость, стабилизация.

§ 1. Введение

При исследовании устойчивости и других динамических свойств систем нелинейных дифференциальных уравнений широкое применение находит метод декомпозиции в различных вариантах [1–9]. Идея этого метода заключается в разделении рассматриваемой системы на несколько более простых систем меньшей размерности, изучении их по отдельности как изолированных с получением выводов о наличии требуемых свойств и обоснованном распространении установленных результатов на исходную систему.

Основная цель данной работы — получить необходимые и достаточные условия разрешимости в классе однородных функций для системы линейных уравнений в частных производных, подобной исследовавшейся А. М. Ляпуновым [10], но не удовлетворяющей его предположениям, и применить результаты для анализа методом декомпозиции устойчивости нулевого решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений размерности $2n$, которой соответствует критический случай n нулевых и n чисто мнимых корней. В работе обосновывается возможность декомпозиции изучаемой системы на две изолированные подсистемы вдвое меньшей размерности. Доказываются теоремы об асимптотической устойчивости или неустойчивости нулевого решения, все условия которых проверяются по изолированным подсистемам. Указываются оценки времени переходных процессов и порядков малости возмущений, не

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13–01–00347–а, № 13–01–00376–а) и Санкт-Петербургского гос. университета (НИР № 9.38.674.2013, № 9.37.157.2014).

нарушающих устойчивость. Проводится анализ влияния сил различной структуры на устойчивость равновесия механических систем. Выявляются принципиальные особенности такого влияния для систем с циркулярными силами по сравнению с описанным в классических теоремах Томсона — Тэта — Четаева (см. [11]).

§ 2. Критерий разрешимости одной системы уравнений в частных производных в классе однородных функций

При разработке своего первого метода анализа устойчивости А. М. Ляпунов доказал следующее утверждение [10, § 30].

Теорема 1. *Пусть дана система уравнений в частных производных вида*

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z}(Sz + \Phi(z,u)) = Lu + \Psi(z,u), \tag{1}$$

где $\Phi(z,u)$, $\Psi(z,u)$ суть голоморфные функции векторов $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^k$, обращающиеся в нуле в нуль, притом разложения функции $\Phi(z,u)$ не содержат членов ниже второго порядка, а функция $\Psi(z,u)$ если и содержит члены первого порядка, то только не зависящие от u. Тогда если вещественные части всех корней $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ характеристического уравнения $\det(S-\gamma E) = 0$ отличны от нуля и одного знака и для корней $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ характеристического уравнения $\det(L-\lambda E) = 0$ не существует никаких соотношений вида $m_1\gamma_1+\dots+m_n\gamma_m = \lambda_j$, $j = 1,\dots,k$, где все $m_1,\dots,m_n$ были бы целыми неотрицательными числами, не равными одновременно нулю, то всегда найдется голоморфное решение $u = u(z)$ системы (1), обращающееся в нуле в нуль.

Теорема 1 использовалась А. М. Ляпуновым для получения условий устойчивости решений нелинейных систем в критических случаях [10].

В данной работе будем предполагать, что в уравнениях (1) $L = 0$, $\Phi(z,u) \equiv 0$, а векторная функция $\Psi(z,u)$ не зависит от u ($\Psi = \Psi(z)$) и ее компоненты являются непрерывно дифференцируемыми при $z \in \mathbb{R}^n$ однородными функциями порядка $\nu + 1$, $\nu > 0$. Таким образом, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z}Sz = \Psi(z). \tag{2}$$

Замечание 1. В настоящей статье согласно [12] функцию $f(z)$, заданную при всех $z \in \mathbb{R}^n$, будем называть *однородной порядка* $\varkappa > 0$, если для любых $\lambda > 0$ и $z \in \mathbb{R}^n$ имеет место равенство $f(\lambda z) = \lambda^\varkappa f(z)$. Отметим, что в ряде работ (см., например, [13]) для функций, обладающих указанным свойством, используется термин «положительная однородность».

Основная задача данного параграфа — получить необходимые и достаточные условия существования у системы (2) решения в классе однородных функций порядка $\nu + 1$.

Из теоремы 1 следует (см. [10]), что если вещественные части всех собственных чисел матрицы S отличны от нуля и одного знака, то для любого целого неотрицательного числа ν и любой вектор-функции $\Psi(z)$, компоненты которой представляют собой однородные формы порядка $\nu + 1$, найдется решение системы (2) в виде векторной функции $u(z)$ с компонентами, являющимися однородными формами того же порядка $\nu + 1$.

Далее рассмотрим случай, когда S — неособая матрица с чисто мнимыми собственными числами, причем кратным собственным числам соответствуют простые элементарные делители. Отметим, что в этом случае приведенная выше теорема Ляпунова к системе (2) не применима.

Замечание 2. Из свойств матрицы S следует, что n — четное число, а матрица e^{St} периодическая или почти периодическая.

Пусть

$$J(t,z) = \int_0^t \Psi(e^{S\tau}z)\,d\tau.$$

Векторная функция $J(t,z)$ определена при $t \in (-\infty, +\infty)$, $z \in \mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам. При этом

$$\frac{\partial J(t,z)}{\partial z} = \int_0^t \frac{\partial \Psi(e^{S\tau}z)}{\partial z} e^{S\tau}\,d\tau.$$

Теорема 2. *Для существования непрерывно дифференцируемой при $z \in \mathbb{R}^n$ однородной порядка $\nu + 1$ векторной функции $u(z)$, удовлетворяющей системе* (2), *необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $J(t,z)$ и матрица $\partial J(t,z)/\partial z$ обладали следующими свойствами:*

(а) *$J(t,z)$ и $\partial J(t,z)/\partial z$ непрерывны по переменной z равномерно относительно $t \in (-\infty, +\infty)$;*

(б) *$J(t,z)$ и $\partial J(t,z)/\partial z$ ограничены в области $t \in (-\infty, +\infty)$, $\|z\| \le 1$* (*здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора*).

Доказательство. Необходимость. Пусть непрерывно дифференцируемая при $z \in \mathbb{R}^n$ однородная порядка $\nu + 1$ векторная функция $u(z)$ является решением системы (2). Тогда при любых $t \in (-\infty, +\infty)$, $z \in \mathbb{R}^n$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\,u(e^{St}z) = \Psi(e^{St}z),$$

интегрируя которое, имеем $J(t,z) = u(e^{St}z) - u(z)$. Значит,

$$\frac{\partial J(t,z)}{\partial z} = \frac{\partial u(e^{St}z)}{\partial z} e^{St} - \frac{\partial u(z)}{\partial z}.$$

Учитывая непрерывную дифференцируемость $u(z)$, получаем, что $J(t,z)$ и $\partial J(t,z)/\partial z$ обладают свойствами (а) и (б).

Достаточность. Пусть вектор-функция $J(t,z)$ и матрица $\partial J(t,z)/\partial z$ удовлетворяют условиям теоремы. Положим

$$u(z) = -\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T J(t,z)\,dt.$$

Из ограниченности векторной функции $J(t,z)$ в области $t \in (-\infty, +\infty)$, $\|z\| \le 1$ следует [14], что при любом фиксированном z ее компоненты представляют собой периодические или почти периодические функции переменной t. Значит, рассматриваемый предел существует.

Нетрудно проверить, что $u(z)$ — непрерывно дифференцируемая при $z \in \mathbb{R}^n$ однородная функция порядка $\nu+1$, причем

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z} = -\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{\partial J(t,z)}{\partial z}\,dt.$$

Покажем, что $u(z)$ является решением системы (2). Имеем

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z}Sz = -\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \frac{\partial J(t,z)}{\partial z}Sz\,dt$$

$$= -\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^t \frac{\partial \Psi(e^{S\tau}z)}{\partial z}e^{S\tau}Sz\,d\tau dt = -\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\int\limits_0^t \frac{\partial \Psi(e^{S\tau}z)}{\partial \tau}\,d\tau dt$$

$$= -\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T (\Psi(e^{St}z)-\Psi(z))\,dt = \Psi(z).$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Если выполнены условия (а) и (б) теоремы 2, то система (2) имеет бесконечное множество непрерывно дифференцируемых при $z \in \mathbb{R}^n$ однородных порядка $\nu+1$ решений.

Действительно, пусть $\tilde{u}(z)$ — однородное решение системы (2), построенное при доказательстве теоремы 2. Из предположений, сделанных относительно матрицы S, следует существование постоянных неособых матриц G и W таких, что $S = W^{-1}GW$, причем матрица G кососимметрическая. Тогда система (2) имеет семейство однородных решений вида $u(z,c) = \tilde{u}(z) + c\|W^T z\|^{\nu+1}$, где c — произвольный постоянный вектор.

Пример 1. Пусть S — постоянная неособая кососимметрическая матрица ($S^T = -S$), а $\Psi(z) = \|z\|^\nu \widetilde{B}z$, где $\widetilde{B}$ — постоянная матрица, $\nu > 0$. Тогда

$$\|e^{St}z\| = \|z\|, \quad \Psi(e^{St}z) = \|z\|^\nu \widetilde{B}e^{St}z.$$

Значит, выполнены все условия теоремы 2. Поэтому существует непрерывно дифференцируемая при $z \in \mathbb{R}^n$ однородная вектор-функция $u(z)$, являющаяся решением системы (2). В качестве такого решения можно выбрать функцию $u(z) = \|z\|^\nu \widetilde{B}S^{-1}z$.

Пусть

$$\Psi(z) = \sum_{l_1+\dots+l_n=\nu+1} a_{l_1\dots l_n} z_1^{l_1}\dots z_n^{l_n}, \tag{3}$$

где ν — натуральное число, $a_{l_1\dots l_n}$ — постоянные векторы, $l_1,\dots,l_n$ — целые неотрицательные числа, т. е. компоненты вектора $\Psi(z)$ являются однородными формами порядка $\nu+1$. Тогда

$$\Psi(e^{St}z) = \sum_{l_1+\dots+l_n=\nu+1} b_{l_1\dots l_n}(t) z_1^{l_1}\dots z_n^{l_n}. \tag{4}$$

Здесь компоненты векторов $b_{l_1\dots l_n}(t)$ представляют собой периодические или почти периодические функции переменной t.

Следствие 1. *Если векторная функция $\Psi(z)$ имеет вид (3), то для существования непрерывно дифференцируемой при $z \in \mathbb{R}^n$ однородной векторной функции $u(z)$, удовлетворяющей системе (2), необходимо и достаточно, чтобы интегралы $\int\limits_0^t b_{l_1\dots l_n}(\tau)\,d\tau$ были ограничены при $t \in (-\infty, +\infty)$.*

Замечание 4. При выполнении условий следствия 1 решение $u(z)$ системы (2) можно выбрать так, чтобы его компоненты были однородными формами порядка $\nu + 1$.

Обозначим через $\pm\omega_1 i, \dots, \pm\omega_p i$ различные собственные числа матрицы S, где $\omega_j > 0$, $j = 1, \dots, p$; $p \le n/2$.

Следствие 2. *Пусть числа $\omega_1, \dots, \omega_p$ рационально несоизмеримы, т. е. не существует целых чисел $m_1, \dots, m_p$, не равных одновременно нулю, таких, что $m_1\omega_1 + \dots + m_p\omega_p = 0$. Если компоненты векторной функции $\Psi(z)$ являются однородными формами нечетного порядка $\nu + 1$, то система (2) имеет решение в виде непрерывно дифференцируемой при $z \in \mathbb{R}^n$ однородной порядка $\nu + 1$ векторной функции $u(z)$.*

Доказательство. В данном случае в формуле (4) компоненты векторов $b_{l_1\dots l_n}(t)$ представляют собой линейные комбинации функций вида

$$(\cos\omega_1 t)^{\alpha_1}(\sin\omega_1 t)^{\beta_1}\dots(\cos\omega_p t)^{\alpha_p}(\sin\omega_p t)^{\beta_p}. \tag{5}$$

Здесь α_j и β_j, $j = 1, \dots, p$, — целые неотрицательные числа, причем $\alpha_1 + \beta_1 + \dots + \alpha_p + \beta_p = \nu + 1$.

Поскольку ν — четное число, по крайней мере одна из величин $\alpha_j + \beta_j$, $j = 1, \dots, p$, будет нечетной. Для определенности считаем, что $\alpha_1 + \beta_1$ — нечетное число.

Запишем функцию (5) в комплексной форме. Имеем

$$\tilde{c}(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t})^{\alpha_1}(e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t})^{\beta_1}\dots(e^{i\omega_p t} + e^{-i\omega_p t})^{\alpha_p}(e^{i\omega_p t} - e^{-i\omega_p t})^{\beta_p},$$

где $\tilde{c}$ — постоянный коэффициент.

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, представляем рассматриваемое выражение в виде линейной комбинации функций вида

$$\exp\left(it(k_1\omega_1 + \dots + k_p\omega_p)\right).$$

Здесь $k_1, \dots, k_p$ — целые числа. Поскольку $\alpha_1 + \beta_1$ нечетное, получаем, что $k_1 \ne 0$. Так как числа $\omega_1, \dots, \omega_p$ рационально несоизмеримы, показатели степеней во всех экспонентах отличны от нуля, откуда и следует ограниченность интегралов $\int\limits_0^t b_{l_1\dots l_n}(\tau)\,d\tau$ при $t \in (-\infty, +\infty)$.

Покажем на примере, что если собственные частоты матрицы S рационально соизмеримы, то система (2) может не иметь решений в классе однородных вектор-функций.

Пример 2. Пусть

$$n = 4, \quad k = 1, \quad S = \operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 \\ \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\omega_2 \\ \omega_2 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

$$\omega_2 = 2\omega_1 > 0, \quad \Psi(z) = \varepsilon z_1^2 z_3^3,$$

где ε — постоянный коэффициент. При произвольно малом по модулю и отличном от нуля значении ε у соответствующего уравнения (2) не существует однородных решений.

Действительно, в данном случае функция $\Psi(e^{St}z)$ будет однородной формой пятого порядка, содержащей слагаемое $\varepsilon\cos^2(\omega_1 t)\cos^3(\omega_2 t)z_1^2 z_3^3$, для которого интеграл от коэффициента $\varepsilon\cos^2(\omega_1 t)\cos^3(\omega_2 t)$ не ограничен. Поэтому применимо следствие 1 в части необходимости.

§ 3. Условия декомпозиции существенно нелинейных систем

Далее используем полученные в § 2 результаты для анализа устойчивости положений равновесия систем нелинейных дифференциальных уравнений размерности $2n$ в критическом случае n нулевых и n чисто мнимых корней.

Пусть движение механической системы описывается уравнениями

$$A\ddot{q} + (B(\dot{q}) + G)\dot{q} + Q(q) = 0. \tag{6}$$

Здесь q и $\dot{q}$ — n-мерные векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей соответственно; A — постоянная симметрическая положительно определенная матрица; G — постоянная кососимметрическая матрица; элементы матрицы $B(\dot{q})$ непрерывны при всех $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ и являются однородными порядка $\nu > 0$ функциями; компоненты вектора $Q(q)$ непрерывно дифференцируемы при $q \in \mathbb{R}^n$ и являются однородными функциями порядка $\mu > 1$. Будем считать, что G — неособая матрица. Значит, n — четное число.

У системы (6) существует положение равновесия $q = \dot{q} = 0$. Исследуем условия устойчивости этого положения равновесия.

Отметим, что здесь мы имеем дело с критическим случаем, так как у характеристического уравнения для линейного приближения системы (6) имеется n нулевых и n чисто мнимых корней.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом декомпозиции [3, 4]. Построим две изолированные подсистемы

$$G\dot{y} = -Q(y), \tag{7}$$

$$A\dot{z} = -(B(z) + G)z \tag{8}$$

и рассмотрим систему (2), в которой векторная функция $\Psi(z)$ и матрица S определяются по формулам $\Psi(z) = B(z)z$, $S = A^{-1}G$. Тогда компоненты вектора $\Psi(z)$ являются непрерывными при $z \in \mathbb{R}^n$ однородными функциями порядка $\nu + 1$, а S — неособая матрица с чисто мнимыми собственными числами, причем если у нее есть кратные собственные числа, то им соответствуют простые элементарные делители.

Теорема 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

(а) $\mu > \nu + 1$;

(б) *у системы* (2) *существует решение в виде непрерывно дифференцируемой при всех* $z \in \mathbb{R}^n$ *однородной порядка* $\nu + 1$ *векторной функции* $u(z)$;

(в) *функция* $\dot{q}^T B(\dot{q})\dot{q}$ *положительно определена, а нулевое решение подсистемы* (7) *асимптотически устойчиво.*

Тогда положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ *системы* (6) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Произведем в (6) замену переменных

$$\dot{q} = z, \quad A\dot{q} + Gq - u(\dot{q}) = Gy. \tag{9}$$

Получим систему

$$
\begin{aligned}
G\dot{y} = &-Q(y) + (Q(y) - Q(y - G^{-1}Az + G^{-1}u(z))) \\
&+ \frac{\partial u(z)}{\partial z} A^{-1}(B(z)z + Q(y - G^{-1}Az + G^{-1}u(z))), \\
A\dot{z} = &-(B(z) + G)z - Q(y - G^{-1}Az + G^{-1}u(z)).
\end{aligned} \tag{10}
$$

В силу сделанных предположений нулевые решения изолированных подсистем (7) и (8) асимптотически устойчивы, причем подсистема (7) представляет собой систему с однородными правыми частями. Следовательно [13], существуют непрерывно дифференцируемые однородные порядка $\gamma_1 - \mu + 1$ и $\gamma_2 - \nu$ соответственно функции Ляпунова $V_1(y)$ и $V_2(z)$, для которых при всех $y, z \in \mathbb{R}^n$ справедливы оценки

$$
a_{11}\|y\|^{\gamma_1-\mu+1} \le V_1(y) \le a_{12}\|y\|^{\gamma_1-\mu+1},
$$
$$
\left\|\frac{\partial V_1}{\partial y}\right\| \le a_{13}\|y\|^{\gamma_1-\mu}, \quad \dot{V}_1|_{(7)} \le -a_{14}\|y\|^{\gamma_1},
$$
$$
a_{21}\|z\|^{\gamma_2-\nu} \le V_2(z) \le a_{22}\|z\|^{\gamma_2-\nu},
$$
$$
\left\|\frac{\partial V_2}{\partial z}\right\| \le a_{23}\|z\|^{\gamma_2-\nu-1}, \quad \dot{V}_2|_{(8)} \le -a_{24}\|z\|^{\gamma_2}.
$$

Здесь a_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, — положительные постоянные. При этом в качестве γ_1 и γ_2 можно выбирать любые числа такие, что $\gamma_1 > \mu$, $\gamma_2 > \nu + 1$, а функцию $V_2(z)$ можно определить по формуле $V_2(z) = (z^T Az)^{(\gamma_2-\nu)/2}$.

Рассмотрим функцию

$$
V(y, z) = V_1(y) + \eta V_2(z), \quad \eta = \mathrm{const} > 0. \tag{11}
$$

Для ее производной в силу системы (10) в достаточно малой окрестности точки $(y^T, z^T)^T = (0^T, 0^T)^T$ выполняется неравенство

$$
\begin{aligned}
\dot{V}|_{(10)} \le &-a_{14}\|y\|^{\gamma_1} - \eta a_{24}\|z\|^{\gamma_2} \\
&+ \tilde{a}(\eta\|y\|^{\mu}\|z\|^{\gamma_2-\nu-1} + \|y\|^{\gamma_1-1}\|z\| + \|y\|^{\gamma_1-\mu}(\|z\|^{\mu} + \|z\|^{2\nu+1})),
\end{aligned}
$$

где $\tilde{a} = \mathrm{const} > 0$.

Используя свойства однородных функций [13], нетрудно показать, что если

$$
\max\left\{1; \frac{\mu}{2\nu+1}\right\} < \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \le \frac{\mu}{\nu+1}, \tag{12}
$$

а постоянная η достаточно мала, то число $\delta > 0$ можно выбрать так, чтобы при $\|y\| < \delta$, $\|z\| < \delta$ имело место соотношение

$$
\dot{V}|_{(10)} \le -\frac{1}{2}(a_{14}\|y\|^{\gamma_1} + \eta a_{24}\|z\|^{\gamma_2}).
$$

Таким образом, функция (11) удовлетворяет всем требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [10]. Значит, нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво. Но тогда асимптотически устойчиво и положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (6). Теорема доказана.

Замечание 5. Если вектор-функция $\Psi(z) = B(z)z$ непрерывно дифференцируема при $z \in \mathbb{R}^n$, то для проверки выполнения условия (б) теоремы 3 можно воспользоваться результатами, полученными в § 2.

Замечание 6. В формулировке теоремы 3 условие положительной определенности функции $\dot{q}^T B(\dot{q})\dot{q}$ означает, что $-B(\dot{q})\dot{q}$ — диссипативные силы с полной диссипацией [11].

Замечание 7. По сравнению с известными результатами о декомпозиции линейных механических систем (см. [1, 2]) принципиальная особенность теоремы 3 заключается в том, что в случае нелинейных позиционных сил ($\mu > 1$) для обоснования возможности декомпозиции не требуется наличия в системе большого параметра. Доминирование сил определенной категории обеспечивается за счет порядков однородности рассматриваемых функций.

Пример 3. Пусть задана система, состоящая из двух уравнений

$$\ddot{q}_1 + \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right)^\alpha \dot{q}_1 - \dot{q}_2 - \left(q_1^2 + q_2^2\right) q_2 = 0,$$

$$\ddot{q}_2 + \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right)^\alpha \dot{q}_2 + \dot{q}_1 + \left(q_1^2 + q_2^2\right) q_1 = 0,$$

где α — положительный параметр. В этом примере имеем $\mu = 3$, $\nu = 2\alpha$ и все условия теоремы 3 выполнены при $0 < \alpha < 1$, поэтому положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ асимптотически устойчиво. Если $\alpha = 1$, то справедливо равенство $\nu + 1 = \mu$, и условие (a) теоремы 3 не выполняется. В данном случае у рассматриваемой системы существует семейство решений $q_1 = c\sin t$, $q_2 = c\cos t$, $c \in R$, поэтому положение равновесия не является асимптотически устойчивым.

Таким образом, этот пример показывает, что условие (a) в теореме 3, связывающее порядки однородности диссипативных и позиционных сил, не просто требуется для проведения оценок в доказательстве, а является существенным и его нельзя отбросить.

§ 4. Оценки решений

Будем предполагать, что для системы (6) выполнены условия теоремы 3. Значит, положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ асимптотически устойчиво. Оценим время переходных процессов в изучаемой системе.

Снова рассмотрим функцию Ляпунова (11). Пусть параметры γ_1 и γ_2 этой функции удовлетворяют неравенству (12). Из доказательства теоремы 3 следует, что при достаточно малом значении η число $\delta > 0$ можно выбрать так, чтобы для решений $(y^T(t), z^T(t))^T$ системы (10), начинающихся при $t = t_0 \geq 0$ в δ-окрестности точки $(y^T, z^T)^T = (0^T, 0^T)^T$, при всех $t \geq t_0$ имели место соотношения

$$c_1(\|y(t)\|^{\gamma_1-\mu+1} + \|z(t)\|^{\gamma_2-\nu}) \leq V(y(t), z(t)) \leq c_2(\|y(t)\|^{\gamma_1-\mu+1} + \|z(t)\|^{\gamma_2-\nu}),$$

$$\dot{V}(y(t), z(t)) \leq -c_3(\|y(t)\|^{\gamma_1} + \|z(t)\|^{\gamma_2}) \leq -c_4 V^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1-\mu+1}}(y(t), z(t)).$$

Здесь c_1, c_2, c_3, c_4 — положительные постоянные.

Используя полученные неравенства, нетрудно доказать существование числа $\Delta > 0$ такого, что

$$\|y(t)\| \leq \Delta(t - t_0 + 1)^{-\frac{1}{\mu-1}}, \quad \|z(t)\| \leq \Delta(t - t_0 + 1)^{-\frac{\gamma_1-\mu+1}{(\gamma_2-\nu)(\mu-1)}}$$

для всех $t \geq t_0$.

Замечание 8. Величины δ и Δ, вообще говоря, зависят от выбора параметров γ_1, γ_2 и η функции Ляпунова.

Рассмотрим задачу нахождения допустимых значений γ_1 и γ_2, при которых оценка для $\|z(t)\|$ будет наиболее точной (в смысле наименьшего значения показателя степени).

Из ограничений (12) следует, что должно иметь место равенство $\gamma_1 = \gamma_2\mu/(\nu+1)$. При этом показатель степени в изучаемой оценке будет тем меньше, чем больше выбрано значение γ_2.

Учитывая соотношения (9), связывающие между собой переменные $q, \dot{q}$ и переменные y, z, получаем, что справедлива

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда для любого* $p \in (0,1)$ *существуют постоянные* $\tilde{\delta}$ *и* $\widetilde{\Delta}$ *такие, что для решений системы* (6) *с начальными данными, удовлетворяющими условиям* $t_0 \geq 0$, $\|q(t_0)\| < \tilde{\delta}$, $\|\dot{q}(t_0)\| < \tilde{\delta}$, *при всех* $t \geq t_0$ *имеют место неравенства*

$$\|q(t)\| \leq \widetilde{\Delta}(t - t_0 + 1)^{-\frac{1}{\mu-1}}, \quad \|\dot{q}(t)\| \leq \widetilde{\Delta}(t - t_0 + 1)^{-\frac{p\mu}{(\nu+1)(\mu-1)}}.$$

Замечание 9. Оценка для $\|\dot{q}(t)\|$ будет тем точнее, чем ближе значение p к единице.

§ 5. Исследование устойчивости возмущенных систем

Снова предполагаем, что для системы (6) выполнены условия теоремы 3. Наряду с изучаемыми уравнениями рассмотрим возмущенную систему

$$A\ddot{q} + (B(\dot{q}) + G)\dot{q} + Q(q) = \Phi(t, q, \dot{q}). \tag{13}$$

Будем считать, что векторная функция $\Phi(t, q, \dot{q})$ задана и непрерывна в области $t \geq 0$, $\|q\| < H$, $\|\dot{q}\| < H$ ($H = \text{const} > 0$) и удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi(t, q, \dot{q})\| \leq c(\|q\|^\alpha + \|\dot{q}\|^\beta),$$

где c, α, β — положительные постоянные. Значит, система (13) также имеет положение равновесия $q = \dot{q} = 0$. Определим условия, гарантирующие сохранение асимптотической устойчивости данного положения равновесия для возмущенной системы.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда если*

$$\alpha > \mu, \quad \beta > \nu + 1, \tag{14}$$

то положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ *системы* (13) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Произведем в возмущенных уравнениях замену переменных по формулам (9), а затем для полученной системы в качестве функции Ляпунова выберем функцию (11).

Как и при доказательстве теоремы 3, можно показать, что если параметры γ_1 и γ_2 удовлетворяют условию (12), справедливы неравенства (14), а положительная постоянная η достаточно мала, то для функции $V(y, z)$ будут выполнены все требования теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Замечание 10. Теорема 5 представляет собой теорему об устойчивости по нелинейному приближению. Она утверждает, что возмущения не нарушают асимптотической устойчивости, если их порядок больше порядка однородности функций, входящих в исходные уравнения.

Далее покажем, что для некоторых классов нестационарных возмущений асимптотическая устойчивость сохраняется и в случае, когда их порядок совпадает с порядком однородности позиционных сил. Для этого воспользуемся предложенным в [15, 16] способом построения функций Ляпунова для существенно нелинейных неавтономных систем.

Пусть возмущенные уравнения представимы в виде

$$A\ddot{q} + (B(\dot{q}) + G)\dot{q} + Q(q) + C(t)D(q) = 0. \tag{15}$$

Здесь компоненты вектора $D(q)$ непрерывно дифференцируемы при всех $q \in \mathbb{R}^n$ и являются однородными функциями порядка $\mu > 1$, а матрица $C(t)$ непрерывна и ограничена при $t \geq 0$. Таким образом, возмущения имеют тот же порядок, что и позиционные силы.

Теорема 6. *Если выполнены условия теоремы* 3, *а матрица*

$$I(t) = \int\limits_0^t C(\tau)\, d\tau$$

ограничена на промежутке $[0, +\infty)$, *то положение равновесия* $q = \dot{q} = 0$ *системы* (15) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. С помощью замены переменных (9) переходим от рассматриваемых уравнений к системе

$$\begin{aligned} G\dot{y} = &- Q(y) - C(t)D(y) + (Q(y) - Q(y - G^{-1}Az + G^{-1}u(z))) \\ &+ C(t)(D(y) - D(y - G^{-1}Az + G^{-1}u(z))) + \frac{\partial u(z)}{\partial z} A^{-1}(B(z)z \\ &+ Q(y - G^{-1}Az + G^{-1}u(z)) + C(t)D(y - G^{-1}Az + G^{-1}u(z))), \\ A\dot{z} = &- (B(z) + G)z - Q(y - G^{-1}Az + G^{-1}u(z)) \\ &- C(t)D(y - G^{-1}Az + G^{-1}u(z)). \end{aligned} \tag{16}$$

Пусть $V_1(y)$ и $V_2(z)$ — однородные порядка $\gamma_1 - \mu + 1$ и $\gamma_2 - \nu$ соответственно функции Ляпунова, найденные для изолированных подсистем (7) и (8). Будем считать, что параметры γ_1 и γ_2 удовлетворяют условию (12). Известно (см. [13, 17]), что функцию $V_1(y)$ можно выбрать так, чтобы она была дважды непрерывно дифференцируемой при всех $y \in \mathbb{R}^n$.

Для системы (16) функцию Ляпунова строим в виде

$$\widetilde{V}(t, y, z) = V_1(y) + \eta V_2(z) + \left(\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)^T G^{-1} I(t) D(y).$$

Нетрудно показать, что если положительная постоянная η достаточно мала, то существует число $\delta > 0$ такое, что в области $t \geq 0$, $\|q\| < \delta$, $\|\dot{q}\| < \delta$ имеют место оценки

$$\tilde{c}_1(\|y\|^{\gamma_1-\mu+1} + \|z\|^{\gamma_2-\nu}) \leq \widetilde{V}(t, y, z) \leq \tilde{c}_2(\|y\|^{\gamma_1-\mu+1} + \|z\|^{\gamma_2-\nu}),$$

$$\dot{\widetilde{V}}\Big|_{(16)} \leq -\tilde{c}_3(\|y\|^{\gamma_1} + \|z\|^{\gamma_2}).$$

Здесь $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3 > 0$. Теорема доказана.

Замечание 11. В частности, условие на матрицу $C(t)$, указанное в теореме 6, будет выполнено, если элементы данной матрицы описывают периодические колебания с нулевыми средними значениями, причем на амплитуды этих колебаний никаких ограничений не накладывается.

Замечание 12. Устойчивость положений равновесия механических систем, находящихся под воздействием возмущений рассматриваемого в теореме 6 вида, исследовалась в [18, 19]. Однако результаты, полученные в указанных работах, гарантируют сохранение асимптотической устойчивости только при условии, что все действующие на систему силы существенно нелинейны. Предложенный в настоящей статье подход, основанный на методе декомпозиции, позволяет доказать асимптотическую устойчивость положения равновесия и в случае, когда на изучаемую систему наряду с существенно нелинейными силами действуют линейные силы $-G\dot{q}$.

§ 6. Достаточные условия неустойчивости

Покажем далее, что метод декомпозиции можно использовать и для получения условий неустойчивости положения равновесия системы (6).

Теорема 7. *Пусть*

(а) $\mu > \nu + 1$;

(б) *система* (2) *имеет решение в виде непрерывно дифференцируемой при всех* $z \in \mathbb{R}^n$ *однородной порядка* $\nu + 1$ *векторной функции* $u(z)$.

Пусть выполнено одно из следующих предположений:

(в1) *функция* $\dot{q}^T B(\dot{q})\dot{q}$ *отрицательно определена, а нулевое решение подсистемы* (7) *асимптотически устойчиво;*

(в2) *функция* $\dot{q}^T B(\dot{q})\dot{q}$ *положительно определена, а нулевое решение подсистемы* (7) *неустойчиво, причем для этой подсистемы существует непрерывно дифференцируемая при всех* $y \in \mathbb{R}^n$ *однородная функция Ляпунова, удовлетворяющая требованиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости;*

(в3) *функция* $\dot{q}^T B(\dot{q})\dot{q}$ *отрицательно определена, а нулевое решение подсистемы* (7) *неустойчиво, причем для этой подсистемы существует непрерывно дифференцируемая при всех* $y \in \mathbb{R}^n$ *однородная функция Ляпунова, удовлетворяющая требованиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости,*

Тогда положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ *уравнений* (6) *неустойчиво.*

Доказательство. Снова с помощью замены переменных (9) переходим от исследуемых уравнений к системе (10).

Пусть $V_1(y)$ — непрерывно дифференцируемая однородная функция Ляпунова, соответствующая изолированной подсистеме (7). Обозначим через $\gamma_1 - \mu + 1$ порядок однородности $V_1(y)$. Тогда $\gamma_1 \geq \mu$. Не умаляя общности, можно считать, что функция $(\partial V_1/\partial y)^T G^{-1} Q(y)$ положительно определена, причем если нулевое решение подсистемы (7) асимптотически устойчиво, то $V_1(y)$ — положительно определенная функция, а если нулевое решение подсистемы (7) неустойчиво, то $V_1(y)$ не является знакопостоянной положительной.

Далее выбираем функцию Ляпунова $V_2(z)$ для изолированной подсистемы (8). В случае, когда функция $\dot{q}^T B(\dot{q})\dot{q}$ положительно определена, $V_2(z)$ строим в виде $V_2(z) = (z^T Az)^{(\gamma_2 - \nu)/2}$, а в случае, когда функция $\dot{q}^T B(\dot{q})\dot{q}$ отрицательно определена, — в виде $V_2(z) = -(z^T Az)^{(\gamma_2 - \nu)/2}$. Здесь $\gamma_2 = \gamma_1(\nu + 1)/\mu$.

Для системы (10) в качестве функции Ляпунова $V(y, z)$ выбираем функцию (11), где $V_1(y)$ и $V_2(z)$ — функции, найденные для изолированных подсистем.

Нетрудно показать, что если положительная постоянная η достаточно мала, то функция $V(y,z)$ удовлетворяет всем требованиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Замечание 13. Аналогичным образом могут быть доказаны теоремы об условиях неустойчивости положений равновесия для возмущенных систем (13) и (15).

Замечание 14. Условия, при выполнении которых для системы дифференциальных уравнений с однородными правыми частями существует непрерывно дифференцируемая положительно однородная функция Ляпунова, удовлетворяющая требованиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, были установлены в [20].

§ 7. Некоторое обобщение полученных результатов

Далее рассмотрим задачу обобщения полученных результатов на случай, когда условия разрешимости системы (2) в классе однородных функций «почти выполняются».

Заметим, что теорема 3 остается справедливой, если в ее формулировке условие (б) заменить следующим условием:

(б$'$) существует непрерывно дифференцируемая при всех $z \in \mathbb{R}^n$ однородная порядка $\nu+1$ векторная функция $u(z)$ такая, что

$$\left\| \frac{\partial u(z)}{\partial z} Sz - \Psi(z) \right\| < \varepsilon \quad \text{при } \|z\| \le 1. \tag{17}$$

Здесь ε — положительная постоянная, зависящая от конкретного вида матриц A, G, $B(\dot q)$ и векторной функции $Q(q)$, входящих в рассматриваемые уравнения.

Действительно, пусть выполнены условия (а), (в) теоремы 3 и условие (б$'$). Докажем, что если значение постоянной ε достаточно мало, то положение равновесия $q = \dot q = 0$ системы (6) асимптотически устойчиво.

Произведем в изучаемых уравнениях замену переменных по формулам (9), а затем выберем для полученной системы функцию Ляпунова в виде (11). При этом будем считать, что для параметров γ_1 и γ_2 имеет место равенство $\gamma_2 = \gamma_1(\nu+1)/\mu$. Нетрудно показать существование чисел $\varepsilon_0 > 0$ и $\eta_0 > 0$ таких, что при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $\eta \in (0,\eta_0)$ функция (11) удовлетворяет требованиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Аналогичным образом доказывается, что и утверждения теорем 4–7 остаются справедливыми при замене условия (б) условием (б$'$).

Далее исследуем вопрос о существовании непрерывно дифференцируемой при $z \in \mathbb{R}^n$ однородной векторной функции $u(z)$, удовлетворяющей неравенству (17). При этом снова будем предполагать, что компоненты вектора $\Psi(z)$ являются непрерывно дифференцируемыми при $z \in \mathbb{R}^n$ однородными функциями порядка $\nu+1$, $\nu > 0$, а S — неособая матрица с чисто мнимыми собственными числами, причем если у нее имеются кратные собственные числа, то им соответствуют простые элементарные делители.

Пусть ε — заданное положительное число, а

$$\overline{\Psi}(z) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \Psi(e^{St}z)\,dt.$$

Таким образом, для любого фиксированного z вектор $\overline{\Psi}(z)$ представляет собой среднее значение периодической или почти периодической вектор-функции $\Psi(e^{St}z)$. Функция $\overline{\Psi}(z)$ непрерывна при всех $z \in \mathbb{R}^n$ и является однородной порядка $\nu + 1$.

Теорема 8. *Если* $\|\overline{\Psi}(z)\| < \varepsilon$ *при* $\|z\| \leq 1$, *то существует непрерывно дифференцируемая при* $z \in \mathbb{R}^n$ *однородная порядка* $\nu + 1$ *вектор-функция* $u(z)$, *для которой справедливо неравенство* (17).

Доказательство. Выберем вещественное положительное число α и рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u(z)}{\partial z}(S - \alpha E)z = \Psi(z). \tag{18}$$

Здесь E — единичная матрица.

Вещественные части всех собственных чисел матрицы $S - \alpha E$ отрицательны. Поэтому система (18) имеет решение в виде непрерывно дифференцируемой при $z \in \mathbb{R}^n$ однородной порядка $\nu + 1$ векторной функции $u_\alpha(z)$, которая может быть найдена по формуле

$$u_\alpha(z) = -\int\limits_0^{+\infty} \Psi(e^{(S-\alpha E)t}z)\,dt.$$

Покажем, что при достаточно малых значениях α функция $u_\alpha(z)$ удовлетворяет неравенству (17).

Пусть при $T > 0$

$$\Theta(T, z) = \frac{1}{T}\int\limits_0^{T} \Psi(e^{St}z)\,dt - \overline{\Psi}(z)$$

и $\Theta(0, z) = \Psi(z) - \overline{\Psi}(z)$. Векторная функция $\Theta(T, z)$ непрерывна в области $T \geq 0$, $z \in \mathbb{R}^n$, является однородной по z порядка $\nu + 1$, и $\Theta(T, z) \to 0$ при $T \to +\infty$ равномерно относительно $\|z\| \leq 1$.

Справедливы соотношения

$$\frac{\partial u_\alpha(z)}{\partial z}Sz - \Psi(z) = \frac{\partial u_\alpha(z)}{\partial z}(S - \alpha E)z - \Psi(z) + \alpha\frac{\partial u_\alpha(z)}{\partial z}z = \alpha(\nu + 1)u_\alpha(z).$$

Следовательно, при $\|z\| \leq 1$ имеем

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial u_\alpha(z)}{\partial z}Sz - \Psi(z)\right\| &= \beta\left\|\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta t}\Psi(e^{St}z)\,dt\right\| = \beta^2\left\|\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta t}\int\limits_0^{t}\Psi(e^{S\tau}z)\,d\tau dt\right\| \\
&\leq \beta^2\left(\|\overline{\Psi}(z)\|\int\limits_0^{+\infty} t\,e^{-\beta t}\,dt + \int\limits_0^{+\infty} t\,e^{-\beta t}\|\Theta(t, z)\|\,dt\right) \\
&= \|\overline{\Psi}(z)\| + \int\limits_0^{+\infty} \tau e^{-\tau}\left\|\Theta\left(\frac{\tau}{\beta}, z\right)\right\|\,d\tau \\
&= \|\overline{\Psi}(z)\| + \int\limits_0^{\sqrt{\beta}} \tau e^{-\tau}\left\|\Theta\left(\frac{\tau}{\beta}, z\right)\right\|\,d\tau + \int\limits_{\sqrt{\beta}}^{+\infty} \tau\,e^{-\tau}\left\|\Theta\left(\frac{\tau}{\beta}, z\right)\right\|\,d\tau
\end{aligned}$$

$$\leq \|\overline{\Psi}(z)\| + \sqrt{\beta}N + \int\limits_{\sqrt{\beta}}^{+\infty} \tau\, e^{-\tau} \left\| \Theta\left(\frac{\tau}{\beta}, z\right)\right\| d\tau.$$

Здесь $\beta = \alpha(\nu+1)$, $N = \max\limits_{T\geq 0,\, \|z\|\leq 1} \|\Theta(T,z)\|$.

Первое слагаемое в полученной оценке меньше ε при всех $\|z\| \leq 1$, второе слагаемое не зависит от z и стремится к нулю при $\alpha \to 0$, а для третьего слагаемого выполнены соотношения

$$\int\limits_{\sqrt{\beta}}^{+\infty} \tau e^{-\tau} \left\| \Theta\left(\frac{\tau}{\beta}, z\right)\right\| d\tau \leq \max_{T\geq \frac{1}{\sqrt{\beta}},\|z\|\leq 1} \|\Theta(T,z)\| \to 0 \quad \text{при } \alpha \to 0.$$

Теорема доказана.

Покажем, что справедливо утверждение, в определенном смысле обратное к утверждению теоремы 8.

Теорема 9. *Если существует непрерывно дифференцируемая при $z \in \mathbb{R}^n$ однородная порядка $\nu+1$ вектор-функция $u(z)$, удовлетворяющая условию (17), то при $\|z\| \leq 1$ имеет место оценка*

$$\|\overline{\Psi}(z)\| < \varepsilon\lambda^{\nu+1}, \tag{19}$$

где $\lambda = \sup\limits_{t\in(-\infty,+\infty)} \|e^{St}\|$.

Доказательство. Пусть

$$F(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial z} Sz - \Psi(z).$$

Функция $F(z)$ непрерывна при $z \in \mathbb{R}^n$, однородна порядка $\nu+1$ и

$$\|F(z)\| < \varepsilon \quad \text{при } \|z\| \leq 1. \tag{20}$$

Как и при доказательстве необходимости условий теоремы 2, получаем, что

$$u(e^{St}z) - u(z) = \int\limits_0^t (F(e^{S\tau}z) + \Psi(e^{S\tau}z))\, d\tau$$

для любых $t \in (-\infty,+\infty)$, $z \in \mathbb{R}^n$. Значит,

$$\overline{\Psi}(z) = -\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T F(e^{St}z)\, dt.$$

Используя данное равенство и соотношение (20), приходим к оценке (19). Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть S — кососимметрическая матрица. Тогда для существования непрерывно дифференцируемой при всех $z \in \mathbb{R}^n$ однородной порядка $\nu+1$ векторной функции $u(z)$, удовлетворяющей условию (17), необходимо и достаточно, чтобы при $\|z\| \leq 1$ выполнялось неравенство $\|\overline{\Psi}(z)\| < \varepsilon$.*

Действительно, если $S^T = -S$, то $\lambda = \sup\limits_{t\in(-\infty,+\infty)} \|e^{St}\| = 1$.

Пример 4. Рассмотрим систему (6), состоящую из четырех уравнений ($n = 4$), в которой

$$A = E, \quad G = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 \\ \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\omega_2 \\ \omega_2 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad \omega_2 = 2\omega_1 > 0,$$

$$Q(q) = \|q\|^6 Gq, \quad B(\dot q) = \|\dot q\|^4 E + \widetilde{B}(\dot q),$$

причем в матрице $\widetilde{B}(\dot q)$ отличен от нуля только один элемент $\tilde b_{13}(\dot q) = \varepsilon \dot q_1^2 \dot q_3^2$, ε — постоянный коэффициент.

Как и в примере 2, с использованием следствия 1 нетрудно показать, что соответствующая система (2) при любом $\varepsilon \neq 0$ не имеет однородных решений. Поэтому теорема 3 к рассматриваемым уравнениям не применима.

В то же время результаты, полученные в настоящем параграфе, позволяют гарантировать существование числа $\varepsilon_0 > 0$ такого, что при всех $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ положение равновесия $q = \dot q = 0$ изучаемой системы асимптотически устойчиво.

§ 8. Стабилизация неустойчивого положения равновесия малыми силами радиальной коррекции

Рассмотрим управляемую механическую систему, описываемую нелинейными дифференциальными уравнениями

$$A\ddot q + (B(\dot q) + G)\dot q + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = U. \tag{21}$$

Здесь $q, \dot q \in \mathbb{R}^n$ — соответственно обобщенные координаты и скорости, n — четное число, постоянная матрица A симметрическая положительно определенная, постоянная матрица G кососимметрическая невырожденная, матрица $B(\dot q)$ симметрическая, ее элементы являются формами степени $\nu \geq 2$ и выполнено условие положительной определенности $\dot q^T B(\dot q)\dot q \geq a_1 \|\dot q\|^{\nu+2}$ при $\dot q \in \mathbb{R}^n$, $a_1 > 0$. Потенциальная энергия $\Pi(q)$ является дважды непрерывно дифференцируемой однородной функцией порядка $\mu + 1$, $\mu > \nu + 1$, которую будем считать отрицательно определенной, т. е. $\Pi(q) \leq -a_2 \|q\|^{\mu+1}$ при $q \in \mathbb{R}^n$, $a_2 > 0$. Входящая в правую часть уравнений (21) функция U рассматривается как управление, которое можно выбирать.

Таким образом, на изучаемую систему действуют линейные гироскопические силы $-G\dot q$, нелинейные диссипативные силы $-B(\dot q)\dot q$, нелинейные потенциальные силы $-\partial \Pi/\partial q$, а также управляющие силы U.

Если управление в системе (21) отсутствует, т. е. $U \equiv 0$, то положение равновесия $q = \dot q = 0$ будет в соответствии с четвертой теоремой Томсона — Тэта — Четаева [11] неустойчиво. Наша задача — указать закон управления $U = U(q)$, гарантирующий асимптотическую устойчивость положения равновесия в замкнутой системе.

Обозначим через $\pm\omega_j\, i$, $j = 1, \dots, \bar n$, собственные числа матрицы $S = A^{-1}G$, где $\omega_j > 0$, $j = 1, \dots, \bar n$, $\bar n = n/2$. Будем решать задачу стабилизации при дополнительном предположении, состоящем в том, что числа $\omega_1, \dots, \omega_{\bar n}$ рационально несоизмеримы, т. е. $m_1\omega_1 + \dots + m_{\bar n}\omega_{\bar n} \neq 0$ для любых целых чисел $m_1, \dots, m_{\bar n}$, не равных одновременно нулю. Отметим, что данное предположение проверяется по матрице $S = A^{-1}G$ и не является слишком обременительным. В частности, при $n = 2$ оно выполняется автоматически.

Выберем закон управления в виде

$$U = -\eta\varphi(q)Gq, \quad \eta = \mathrm{const} > 0, \tag{22}$$

где $\varphi(q)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая при $q \in \mathbb{R}^n$ однородная порядка $\mu - 1$ положительно определенная функция. Значит, существует число $a_3 > 0$ такое, что $\varphi(q) \geq a_3 \|q\|^{\mu-1}$ для всех $q \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 10. *При предположениях этого параграфа положение равновесия* $q = \dot{q} = 0$ *системы* (21), *замкнутой управлением* (22), *асимптотически устойчиво при любом* $\eta > 0$.

Доказательство сводится к проверке условий теоремы 3. При этом необходимо лишь удостовериться в выполнении условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы

$$G\dot{y} + \frac{\partial \Pi(y)}{\partial y} = -\eta\varphi(y)Gy, \tag{23}$$

поскольку все остальные условия теоремы 3 либо прямо указаны выше в начале настоящего параграфа, либо вытекают из этих указанных.

Перепишем систему (23) в виде

$$\dot{y} = -G^{-1}\frac{\partial \Pi(y)}{\partial y} - \eta\varphi(y)y \tag{24}$$

и рассмотрим для нее положительно определенную функцию Ляпунова $V(y) = -\Pi(y) \geq a_2\|y\|^{\mu+1}$. Дифференцируя $V(y)$ в силу системы (24), получаем

$$\dot{V}(y) = \eta\varphi(y)\left(\frac{\partial \Pi(y)}{\partial y}\right)^T y = \eta(\mu+1)\varphi(y)\Pi(y) \leq -a_2 a_3 \eta(\mu+1)\|y\|^{2\mu}.$$

Значит, функция $\dot{V}(y)$ отрицательно определенная. Поэтому нулевое решение системы (24) асимптотически устойчиво, т. е. все условия теоремы 3 выполнены, откуда и вытекает справедливость утверждения доказываемой теоремы.

Отметим, что нелинейные управляющие силы (22) удовлетворяют тождеству $q^T U(q) \equiv 0$, т. е. они действуют ортогонально к радиусу-вектору. Такие силы в теории гироскопических систем называют *силами радиальной коррекции* [2]. Отметим также, что управляющие силы (22) имеют тот же самый порядок однородности $\mu > 1$, что и вызывающие неустойчивость равновесия системы без управления потенциальные силы $-\partial\Pi/\partial q$, причем стабилизация гарантируется теоремой 10 при сколь угодно малом $\eta > 0$.

Таким образом, теорема 10 обеспечивает стабилизацию равновесия за счет сил радиальной коррекции, малых по сравнению с дестабилизирующими потенциальными силами. Малость управляющих сил может оказаться полезной в приложениях, поскольку затраты на реализацию управления обычно пропорциональны величине управляющего сигнала.

Проведем более подробное сопоставление свойств устойчивости замкнутой

$$A\ddot{q} + (B(\dot{q}) + G)\dot{q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = -\eta\varphi(q)Gq \tag{25}$$

и разомкнутой

$$A\ddot{q} + (B(\dot{q}) + G)\dot{q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \tag{26}$$

систем, а также их зависимости от параметров.

При $\eta < 0$ по теореме 7 равновесие $q = \dot{q} = 0$ системы (25) неустойчиво. При $\eta = 0$ система (25) совпадает с системой (26), для которой равновесие $q = \dot{q} = 0$

по четвертой теореме Томсона — Тэта — Четаева [11] также неустойчиво. При сколь угодно малом $\eta > 0$ это же равновесие системы (25) в соответствии с теоремой 10 уже асимптотически устойчиво. Переход от неустойчивости происходит сразу к асимптотической устойчивости, минуя свойство неасимптотической устойчивости, характерное для линейных систем.

Таким образом, при переходе от (26) к (25) имеем наглядную демонстрацию негрубости свойства неустойчивости решений для нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующих движение механической системы при действии диссипативных, гироскопических, потенциальных сил и малых управляющих сил радиальной коррекции. Отметим, что впервые такого рода негрубость неустойчивости была установлена Н. Н. Красовским [21, § 19], построившим демонстрационный пример. Равновесие в разомкнутой системе (26) единственно и, значит, изолированное, однако в силу установленной негрубости неустойчивости этого равновесия в сколь угодно малой его окрестности обязательно имеются целые траектории (см. [21, § 19]).

Если в системе (26) поменять знак у матрицы диссипативных сил на противоположный, т. е. заменить $B(\dot{q})$ на $-B(\dot{q})$ (физически это означает, что вместо сил сопротивления теперь действуют ускоряющие силы), то равновесие будет неустойчивым. Из теоремы 7 следует, что такая же смена знака диссипативных сил в системе (25) с $\eta > 0$ и асимптотически устойчивым равновесием точно так же приведет к неустойчивости равновесия. Таким образом, по отношению к смене знака диссипативных сил системы (25) и (26) ведут себя одинаково. Совершенно иначе обстоит дело при смене знаков гироскопических и потенциальных сил.

Если в системе (26) поменять знак у матрицы гироскопических сил на противоположный, т. е. заменить G на $-G$, то это никак не влияет на устойчивость равновесия, равновесие будет по-прежнему неустойчивым.

Если в системе (26) поменять знак у потенциальной энергии на противоположный, т. е. заменить $\partial\Pi/\partial q$ на $-\partial\Pi/\partial q$, это поменяет характер устойчивости равновесия, равновесие станет асимптотически устойчивым [11].

Если в системе (25) поменять знак у матрицы гироскопических сил на противоположный, т. е. заменить G на $-G$ (но только в левой части (25), не меняя правой), то это поменяет характер устойчивости равновесия, равновесие будет теперь в соответствии с теоремой 7 неустойчивым.

Если же в системе (25) поменять знак у потенциальной энергии на противоположный, т. е. заменить $\partial\Pi/\partial q$ на $-\partial\Pi/\partial q$, то это никак не поменяет характер устойчивости равновесия, равновесие останется асимптотически устойчивым.

Таким образом, система (25) с малыми силами радиальной коррекции в правых частях кардинальным образом отличается от системы (26): по характеру влияния на устойчивость гироскопические и потенциальные силы в этих системах меняются местами.

Сопоставим нелинейную систему (25) при $\eta < 0$ с линейной системой, в которой также присутствуют силы радиальной коррекции. Рассмотрим линейную систему

$$A\ddot{q} + (B + G)\dot{q} + (hC + P)q = 0. \tag{27}$$

Здесь A, B, C — постоянные симметрические положительно определенные матрицы, G, P — постоянные кососимметрические матрицы, h — положительный параметр. Как было установлено [22], существует такое $h_0 > 0$, что при всех $h > h_0$ положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (27) асимптотически устойчиво. Иначе говоря, доминирование потенциальных сил при положительно определенном потенциале влечет асимптотическую устойчивость равновесия линейной системы.

Рассмотрим нелинейную систему

$$A\ddot{q} + (B(\dot{q}) + G)\dot{q} - h\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -\eta\varphi(q)Gq, \quad \eta < 0. \tag{28}$$

Здесь h — положительный параметр, а свойства всех входящих в уравнения функций были описаны в начале данного параграфа. Как следует из теоремы 7, равновесие системы (28) будет оставаться неустойчивым, каким бы большим ни было значение параметра h. Таким образом, в нелинейной системе (28) доминирование потенциальных сил с положительно определенным потенциалом не влечет асимптотическую устойчивость равновесия в отличие от случая линейной системы (27).

Примечание при корректуре. Обобщения теоремы Ляпунова (теорема 1), данные В. И. Зубовым в [13, теорема 55] и Г. В. Каменковым [23, § 19], к системе (2) также не применимы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зубов В. И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970.

2. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974.

3. *Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.

4. *Шильяк Д.* Децентрализованное управление сложными системами. М.: Мир, 1994.

5. *Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А.* Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006.

6. *Пятницкий Е. С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 2. С. 300–303.

7. *Александров А. Ю., Косов А. А.* Об устойчивости и стабилизации положений равновесия нелинейных неавтономных механических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 13–23.

8. *Александров А. Ю., Косов А. А.* Об устойчивости и стабилизации нелинейных нестационарных механических систем // Прикл. математика и механика. 2010. Т. 74, № 5. С. 774–788.

9. *Тхай В. Н.* Модель, содержащая связанные подсистемы // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 26–41.

10. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ОНТИ, 1935.

11. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987.

12. Математическая энциклопедия / Под ред. И. М. Виноградова. М.: Советская энциклопедия, 1982. Т. 3.

13. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М.: Высшая школа, 1973.

14. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

15. *Александров А. Ю.* Об асимптотической устойчивости решений систем нестационарных дифференциальных уравнений с однородными правыми частями // Докл. РАН. 1996. Т. 349, № 3. С. 295–296.

16. *Александров А. Ю.* К вопросу об устойчивости по нелинейному приближению // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1203–1210.

17. *Rosier L.* Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field // Syst. Control Lett. 1992. V. 19. P. 467–473.

18. *Александров А. Ю.* Об устойчивости равновесия нестационарных систем // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 2. С. 205–209.

19. *Александров А. Ю.* Об управлении вращательным движением твердого тела при нестационарных возмущениях // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 27–33.

20. *Каневский А. Я., Рейзинь Л. Э.* Построение однородных функций Ляпунова — Красовского // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 2. С. 251–259.

21. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматлит, 1959.
22. *Косов А. А.* Об устойчивости и стабилизации неконсервативных систем // Оптимизация, управление, интеллект. 2004. № 2. С. 114–121.
23. *Каменков Г. В.* Избранные труды. В 2-х т. Т. II. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1972.

Статья поступила 1 марта 2015 г.

Александров Александр Юрьевич, Жабко Алексей Петрович
Санкт-Петербургский гос. университет,
Университетский пр., 35, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504
`alex43102006@yandex.ru`, `zhabko@apmath.spbu.ru`

Косов Александр Аркадьевич
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
`aakosov@yandex.ru`