Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 519.21

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ПРОХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГРАНИЦЫ ОБОБЩЕННЫМ ПРОЦЕССОМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

А. А. Боровков

Аннотация. Получены интегральные предельные теоремы для времени первого прохождения произвольной удаленной границы обобщенным процессом восстановления как в случае конечной дисперсии процесса, так и в случае бесконечной дисперсии. В последнем случае предполагается принадлежность некоторых распределений области притяжения устойчивого закона.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.501

Ключевые слова: обобщенный процесс восстановления, время первого прохождения произвольной границы, закон повторного логарифма, аналог закона повторного логарифма в случае бесконечной дисперсии.

§ 1. Введение

Пусть заданы случайный вектор (τ_1, ζ_1) и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов (τ, ζ), $(\tau_2, \zeta_2), \dots$, где $\tau_1 \geq 0$, $\tau > 0$. Обозначим

$$T_n := \sum_{j=1}^{n} \tau_j, \quad Z_n := \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \text{ при } n \geq 1, \quad T_0 = Z_0 = 0.$$

Пусть при $t \geq 0$

$$\eta(t) := \min\{k \geq 0 : T_k \geq t\}, \quad \nu(t) := \eta(t) - 1.$$

Ясно, что для всех $t > 0$ выполняется равенство

$$\nu(t) = \max\{k \geq 0 : T_k < t\}.$$

Обобщенным процессом восстановления (о.п.в.) называется процесс

$$Z(t) := Z_{\nu(t)}, \quad t \geq 0.$$

Стандартная общепринятая модель о.п.в. предполагает, что время τ_1 появления первого скачка и величина ζ_1 этого скачка имеют совместное распределение, отличное, вообще говоря, от совместного распределения (τ, ζ) (см., например, [1, 2]). Это реализуется, например, для о.п.в. со стационарными приращениями. Если $(\tau_1, \zeta_1) \underset{d}{=} (\tau, \zeta)$, то процесс $Z(t)$ будем называть *однородным о.п.в.*, в противном случае — *неоднородным.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00220).

Наряду с о.п.в. Z мы будем рассматривать также случайный процесс

$$Y(t) := Z_{\eta(t)} = Z_{\nu(t)} + \zeta_{\eta(t)}, \quad t \geq 0.$$

Его мы также будем называть о.п.в. Будет показано, что предельные законы, которые мы будем изучать, при выполнении соответствующих условий будут одни и те же для о.п.в. $Z(t)$ и $Y(t)$. Так как $\eta(t)$ — марковский момент, то процессы $Y(t) = Z_{\eta(t)}$ устроены несколько проще и в ряде случаев удобнее изучать эти процессы. Будет показано также, что все основные утверждения, полученные для процессов $Z(t)$, $Y(t)$, сохранятся и для процессов $Z(t) + qt$ и $Y(t) + qt$ с линейным сносом qt.

Везде в дальнейшем будет предполагаться, что существуют

$$\mathbf{E}\tau =: a_\tau \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\zeta =: a_\zeta,$$

так что определен «средний снос» о.п.в.

$$a := \frac{a_\zeta}{a_\tau}$$

($Z(t)/t \underset{\text{п.в.}}{\to} a$ при $t \to \infty$).

Пусть далее $g(t) = g_x(t)$, $t > 0$, — произвольная функция (граница), зависящая от параметра $x \to \infty$. Основная цель настоящей работы — отыскание предельных законов для распределения времени η_g первого прохождения траекторией о.п.в. $Y(t)$ границы $g_x(t)$:

$$\eta_g := \inf\{t > 0 : Y(t) \geq g_x(t)\}. \tag{1.1}$$

Границы $g_x(t)$ будут предполагаться «удаленными», т. е. будет предполагаться, что определено значение

$$t_g := \inf\{t > 0 : at \geq g_x(t)\} \tag{1.2}$$

и что

$$t_g \to \infty \quad \text{при } x \to \infty.$$

Будут рассмотрены два класса задач. В первом из них будет предполагаться, что случайная величина

$$\xi := \zeta - a\tau$$

имеет конечный второй момент, т. е.

$$\sigma_\xi^2 := \mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2 = \mathbf{D}\xi < \infty. \tag{1.3}$$

Во втором будет предполагаться, что $\sigma_\xi^2 = \infty$, а случайная величина ξ удовлетворяет условиям притяжения к устойчивому закону (подробнее см. ниже, § 4).

Основные предельные теоремы о распределении η_g сформулированы и доказаны в § 3, 5 соответственно в случаях конечной и бесконечной дисперсии процесса.

Работа имеет следующую структуру. В первой ее части (§ 2, 3) рассмотрен случай конечной дисперсии (1.3), § 2 посвящен систематическому изложению основных предельных законов для о.п.в., представляющих и самостоятельный интерес. Они организованы таким образом, что доказательство предельной теоремы о распределении η_g в § 3 естественным образом вытекает из этих законов.

Во второй части работы (§ 4, 5) изучается случай $\sigma_\xi^2 = \infty$. Она имеет аналогичную структуру.

Настоящую работу можно рассматривать как продолжение (и отчасти обобщение) работы [3], в которой рассматривалась аналогичная задача (включая локальные теоремы), но для более простых процессов — для траекторий случайных блужданий, порожденных суммами случайных величин (т. е. в случае $\tau_1 \equiv \tau \equiv 1$; там же см. библиографию по поводу рассматриваемой задачи в этом случае).

Значительная часть утверждений вспомогательных разделов (§ 2, 4) частично известна. Тем не менее мы приводим их с доказательствами, так как это делает изложение более цельным и самодостаточным и приводимые доказательства не занимают много места и (как нам представляется) проще существующих (см. также ссылки по ходу изложения).

§ 2. Вспомогательные предварительные утверждения в случае конечных дисперсий

Введем в рассмотрение величину $\chi(t)$ первого перескока уровня t случайным блужданием $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$:
$$\chi(t) := T_{\eta(t)} - t.$$

Лемма 2.1. *Всегда существуют собственные предельные распределения:*
$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\chi(t) \ge u, \zeta_{\eta(t)} \ge v) = \frac{1}{\mathbf{E}\tau} \int\limits_u^{\infty} \mathbf{P}(\tau \ge y, \zeta \ge v)\, dy, \tag{2.1}$$
$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(\zeta_{\eta(t)} < v) = \frac{\mathbf{E}(\tau;\, \zeta < v)}{\mathbf{E}\tau}. \tag{2.2}$$
Если $\mathbf{E}\tau_1 < \infty$, $\mathbf{E}|\zeta_1| < \infty$, *то*
$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\zeta_{\eta(t)} = \frac{\mathbf{E}\tau\zeta}{\mathbf{E}\tau}. \tag{2.3}$$

Если $\mathbf{E}\tau^k < \infty$, $\mathbf{E}|\zeta|^k < \infty$, $\mathbf{E}\tau_1^k < \infty$, $\mathbf{E}|\zeta_1|^k < \infty$, *то*
$$\mathbf{E}\chi^k(t) = o(t), \quad \mathbf{E}\zeta_{\eta(t)}^k = o(t) \quad \text{при } t \to \infty$$
и существует
$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\chi^{k-1}(t) = \mathbf{E}\chi^{k-1} < \infty, \tag{2.4}$$
где χ — случайная величина с распределением
$$\mathbf{P}(\chi \ge u) = \frac{1}{\mathbf{E}\tau} \int\limits_u^{\infty} \mathbf{P}(\tau \ge y)\, dy.$$

В частности,
$$\mathbf{E}\chi = \frac{\mathbf{E}\tau^2}{2\mathbf{E}\tau}, \quad \text{если } \mathbf{E}\tau^2 < \infty. \tag{2.5}$$

Моменты случайных величин $\chi^{k-1}(t)$, $\bigl|\zeta_{\eta(t)}^{k-1}\bigr|$ равномерно по t мажорируются (с точностью до постоянного множителя) моментами величин χ^{k-1} и $|\zeta^{\lim}|^{k-1}$

соответственно, где совместное распределение $\mathbf{P}(\chi \ge u, \zeta^{\lim} \ge v)$ *величин* χ *и* $\zeta^{\lim}$ *определяется правой частью в* (2.1).

Доказательство. Для однородных о.п.в. в силу основной теоремы восстановления имеем

$$\mathbf{P}\big(\chi(t) \ge u, \zeta_{\eta(t)} \ge v\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \mathbf{P}(T_k \in dy)\mathbf{P}(\tau \ge t - y + u, \zeta \ge v)$$

$$= \int_0^t dH(y)\mathbf{P}(\tau \ge t - y + u, \zeta \ge v) \to \frac{1}{\mathbf{E}\tau} \int_0^\infty \mathbf{P}(\tau \ge y + u, \zeta \ge v)\, dy, \quad (2.6)$$

где $H(y)$ — функция восстановления, соответствующая величине τ.

Если распределение (τ_1, ζ_1) отлично от общего распределения (τ, ζ), то

$$\mathbf{P}(\chi(t) \ge u, \zeta_{\eta(t)} \ge v) = \mathbf{P}(\tau_1 \ge t + u, \zeta_1 \ge v)$$

$$+ \int_0^t \mathbf{P}(\tau_1 \in ds)\mathbf{P}(\chi(t - s) \ge u, \zeta_{\eta(t-s)} \ge v), \quad (2.7)$$

где при каждом фиксированном s имеет место сходимость вида (2.6) для второго множителя под интегралом в (2.7). Это означает, что и для неоднородных о.п.в. левая часть в (2.7) сходится к правой части в (2.6). Остальные утверждения леммы без труда получаются из (2.6), (2.7). Для доказательства последнего утверждения леммы надо воспользоваться тем, что при некоторых постоянных c_1, c_2 и всех t справедливо неравенство $H(t) \le c_1 + c_2 t$ (см., например, [4, § 10.4]). Лемма 2.1 доказана.

При изучении предельных распределений величин $\chi(t)$, $\zeta_{\eta(t)}$ при $t \to \infty$ можно рассматривать также «частичную схему серий», когда распределение «неоднородного» вектора (τ_1, ζ_1) зависит от t. Потребность в таких рассмотрениях возникает, например, при изучении процессов

$$Z^*(t) = Z(u + t) - Z(u),$$

где $u = u(t)$ неограниченно возрастает вместе с t. Роль начальных скачков для $Z^*(t)$ будут играть величины $\chi(u)$ и $\zeta_{\eta(u)}$, распределение которых зависит от u и, стало быть, от t. При этом процесс $Z(v)$ на отрезке $v \in [0, u]$ может соответствовать, вообще говоря, другой управляющей последовательности $\{\tau_k, \zeta_k\}$, отличной от исходной, но удовлетворяющей тем же моментным условиям.

Следствие 2.1. *Если в частичной схеме серий* $\tau_1 = o_p(t)$ *при* $t \to \infty$, *то утверждения* (2.1), (2.2) *леммы* 2.1 *остаются в силе. Если, кроме того,* $\mathbf{E}(\tau_1 : \tau_1 \ge t) \to 0$, $\mathbf{E}(\zeta_1; \tau_1 \ge t) \to 0$ *при* $t \to \infty$, *то остаются в силе также утверждения* (2.3), (2.4) *при* $k = 2$.

Первое утверждение следствия вытекает из (2.7). Второе получается из аналогичных формул для $\mathbf{E}\chi(t)$ и $\mathbf{E}\zeta_{\eta(t)}$.

Утверждения, близкие к лемме 2.1, содержатся, например в [4, § 10.4, 10.6].

В качестве следствия леммы 2.1 нетрудно найти асимптотику первых двух моментов о.п.в. в однородном случае. Так как $T_{\eta(t)} = t + \chi(t)$, то в однородном случае в силу тождества Вальда и леммы 2.1

$$\mathbf{E}\eta(t) = \frac{t + \mathbf{E}\chi(t)}{a_\tau}, \quad \mathbf{E}Y(t) = \mathbf{E}Z_{\eta(t)} = a_\zeta \mathbf{E}\eta(t) = a(t + \mathbf{E}\chi(t)),$$

$$\mathbf{E}Z(t) = \mathbf{E}Z_{\nu(t)} = a(t + \mathbf{E}\chi(t)) - \mathbf{E}\zeta_{\eta(t)},$$

где

$$\mathbf{E}\chi(t) = o(t), \quad \mathbf{E}\zeta_{\eta(t)} = o(t)$$

при $t \to \infty$. Значения $\mathbf{E}\chi(t)$, $\mathbf{E}\zeta_{\eta(t)}$ в случаях $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, $\mathbf{E}\tau\zeta < \infty$ соответственно определяются формулами (2.5), (2.3).

Далее, имеем

$$\mathbf{D}Y(t) = \mathbf{E}[Y(t) - a(t + \mathbf{E}\chi(t))]^2 = \mathbf{E}[Y(t) - aT_{\eta(t)} + a(\chi(t) - \mathbf{E}\chi(t))]^2.$$

Обозначим

$$\xi_i = \zeta_i - a\tau_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \tag{2.8}$$

так что ξ_i суть независимые копии случайной величины $\xi = \zeta - a\tau$. Так как $\mathbf{E}\xi_i = 0$, то $S_n = Z_n - aT_n$ образует мартингал, а случайная величина $\eta(t)$ — марковский момент. Поэтому если

$$\sigma_\xi^2 := \mathbf{D}\xi < \infty,$$

то в силу тождества Вальда (см., например, [4, теорема 15.2.5])

$$\mathbf{E}S_{\eta(t)}^2 = \sigma_\xi^2 \mathbf{E}\eta(t),$$

$$\mathbf{D}Y(t) = \frac{\sigma_\xi^2 (t + \mathbf{E}\chi(t))}{a_\tau} + a^2 \mathbf{D}\chi(t) + 2a\mathbf{E}S_{\eta(t)}(\chi(t) - \mathbf{E}\chi(t)). \tag{2.9}$$

Поскольку $\mathbf{D}\chi(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, $\mathbf{E}\tau^2 < \infty$, то ввиду неравенства Коши — Буняковского для $|\mathbf{E}S_{\eta(t)}(\chi(t) - \mathbf{E}\chi(t))|$ получаем

$$\mathbf{D}Y(t) = \frac{\sigma_\xi^2 t}{a_\tau} + o(t) \quad \text{при } t \to \infty. \tag{2.10}$$

Параметр

$$\sigma^2 := \frac{\sigma_\xi^2}{a_\tau}$$

можно интерпретировать как «удельную» (на единицу времени) асимптотическую дисперсию процесса $Y(t)$. Отметим, что в случае $\mathbf{E}\tau^2 = \infty$ выполняется $\mathbf{D}\chi(t) = \infty$ и при $a \neq 0$ согласно (2.9) будем иметь $\mathbf{D}Y(t) = \infty$. В то же время, как будет показано ниже (см. теорему 2.2), распределение $Y(t)$ при $\sigma_\xi < \infty$ будет асимптотически нормальным.

Если $a = 0$, то для нерешетчатых τ

$$\mathbf{E}Y(t) = 0, \quad \mathbf{D}Y(t) = \sigma^2 \left(t + \frac{\mathbf{E}\tau^2}{2a_\tau} + o(1) \right) \quad \text{при } t \to \infty.$$

Замечание 2.1. Нетрудно проверить, что представление (2.10) справедливо и для $\mathbf{D}Z(t)$ и что все полученные соотношения сохранятся и в неоднородном случае, если $\mathbf{E}\tau_1^2 < \infty$, $\mathbf{E}\zeta_1^2 < \infty$.

Можно показать также, что соотношение (2.10) верно и в тех случаях, когда распределения τ_1, ζ_1 зависят от t и $\tau_1 = o_p(t)$, $\mathbf{E}\zeta_1^2 = o(t)$. Останавливаться на этом подробнее мы не будем, так как в дальнейшем это не потребуется.

Обозначим

$$\sigma_\tau^2 = \mathbf{D}\tau, \quad \sigma_\zeta^2 = \mathbf{D}\zeta, \quad \bar{\zeta}_n = \max_{k \le n} |\zeta_k|, \quad \bar{\tau}_n = \max_{k \le n} \tau_k.$$

Лемма 2.2. *Если $\sigma_\tau < \infty$, $\sigma_\zeta < \infty$, а τ_1, ζ_1 — произвольные фиксированные случайные величины, то*

$$\frac{\bar{\zeta}_n}{\sqrt{n}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0, \quad \frac{\bar{\zeta}_{\eta(t)}}{\sqrt{t}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0, \quad \frac{\bar{\zeta}_{\eta(t)}}{\sqrt{\eta(t)}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \tag{2.11}$$

при $n \to \infty$, $t \to \infty$. Такие же соотношения справедливы для величин $\bar{\tau}_n$, $\bar{\tau}_{\eta(t)}$. Кроме того,

$$\frac{\chi(t)}{\sqrt{t}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0, \quad \frac{\chi(t)}{\sqrt{\eta(t)}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \quad \textit{при } t \to \infty. \tag{2.12}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала однородный случай. Докажем, что

$$\frac{|\zeta_n|}{\sqrt{n}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{2.13}$$

При любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\zeta_n| \geq \varepsilon\sqrt{n}) \leq \int_0^\infty \mathbf{P}(|\zeta| \geq \varepsilon\sqrt{t})\,dt = \frac{2}{\varepsilon^2}\int_0^\infty u\mathbf{P}(|\zeta| \geq u)\,du = \varepsilon^{-2}\mathbf{E}\zeta^2 < \infty.$$

Поэтому (2.13) вытекает из леммы Бореля — Кантелли, так как с вероятностью 1 наступает лишь конечное число событий $\{|\zeta_n| > \varepsilon\sqrt{n}\}$.

Докажем теперь первое соотношение в (2.11). Из (2.13) следует, что найдется случайный номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что

$$|\zeta_n| < \varepsilon\sqrt{n} \quad \text{при всех } n \geq n_0. \tag{2.14}$$

Кроме того, всегда найдется номер $m_0 \geq n_0$ такой, что $\bar{\zeta}_{n_0} < \varepsilon\sqrt{m_0}$ и в силу (2.14) мы будем иметь

$$\bar{\zeta}_{n_0+1} < \varepsilon\sqrt{m_0}, \dots, \bar{\zeta}_{m_0} < \varepsilon\sqrt{m_0}.$$

Используя опять (2.14), получаем, что $\bar{\zeta}_n < \varepsilon\sqrt{n}$ при всех $n \geq m_0$. Это и означает, что

$$\frac{\bar{\zeta}_n}{\sqrt{n}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{2.15}$$

Так как $\eta(t) \underset{\text{п.н.}}{\to} \infty$ при $t \to \infty$, то из (2.15) вытекает последнее соотношение в (2.11). Кроме того,

$$\frac{\eta(t)}{t} \underset{\text{п.н.}}{\to} \frac{1}{a_\tau}$$

(см., например, [4, § 10.4]). Это доказывает второе соотношение в (2.11).

Утверждения для $\bar{\tau}_n$, $\bar{\tau}_{\eta(t)}$, аналогичные (2.11), доказываются точно так же. Поскольку $\chi(t) \leq \tau_{\eta(t)}$, то это доказывает и соотношения (2.12).

Нетрудно видеть, что в приведенных рассуждениях ничего не изменится, если в качестве τ_1, ξ_1 рассмотреть произвольные фиксированные случайные величины. Лемма 2.2 доказана.

Как и в следствии 2.1, здесь можно рассматривать «частичную схему серий», когда распределения величин τ_1, ζ_1 зависят от t.

Следствие 2.2. *Если $\tau_1 = o_p(t)$ и $b(t) > 0$ — любая неограниченно возрастающая функция, то*

$$\frac{\chi(t)}{b(t)} \underset{p}{\to} 0, \quad \frac{\zeta_{\eta(t)}}{b(t)} \underset{p}{\to} 0 \quad \textit{при } t \to \infty. \tag{2.16}$$

Утверждение (2.16) вытекает из следствия 2.1.

В дальнейшем важную роль будет играть теорема Анскомбе [5] о возможности замены в предельных теоремах детерминированного растущего временно́го параметра на случайный растущий параметр. Пусть $G(v)$ есть некоторая функция распределения, а знак $\Rightarrow$ означает слабую сходимость распределений.

Теорема 2.1 (Анскомбе). *Пусть $\gamma(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, есть последовательность случайных величин такая, что*

1) *имеет место сходимость*

$$\mathbf{P}(\gamma(n) < v) \Rightarrow G(v) \quad \textit{при } n \to \infty, \tag{2.17}$$

2) *имеет место сходимость*

$$\max_{|k|<\delta n} |\gamma(n+k) - \gamma(n)| \underset{p}{\to} 0 \textit{ при } n \to \infty, \quad \delta = \delta(n) \to 0. \tag{2.18}$$

Пусть далее определена последовательность $\theta(x)$ целочисленных случайных величин, зависящая от растущего параметра x, для которой

3) *существует функция $h(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ такая, что*

$$\frac{\theta(x)}{h(x)} \underset{p}{\to} 1. \tag{2.19}$$

При выполнении этих условий

$$\mathbf{P}(\gamma(\theta(x)) < v) \Rightarrow G(v) \quad \textit{при } x \to \infty.$$

Более простую версию доказательства теоремы 2.1, чем в [5], можно найти в [3]. Растущий параметр n в теореме 2.1 (как и функция $h(x)$) не обязательно должен быть целочисленным.

Установим теперь центральную предельную теорему для о.п.в. $Y(t) = Z_{\eta(t)}$. Ее можно получить либо непосредственно (см., например, [4, гл. 10]), либо с помощью теоремы Анскомбе, как это сделано ниже, при несколько более общих условиях.

Рассмотрим процесс

$$y(t) := \frac{Y(t) - at}{\sigma\sqrt{t}}, \tag{2.20}$$

где, как и прежде, $a = a_\xi / a_\tau$, $\sigma^2 = \mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2 a_\tau^{-1}$. Ниже, как и в следствиях 2.1, 2.2, мы будем допускать частичную схему серий, когда распределение (τ_1, ζ_1) зависит от t.

Теорема 2.2. *Если $\sigma_\xi < \infty$, $\tau_1 = o_p(\sqrt{t})$, $\zeta_1 = o_p(\sqrt{t})$ при $t \to \infty$, то*

$$y(t) \Leftrightarrow \Phi, \tag{2.21}$$

где Φ — стандартное нормальное распределение.

Символ $\Leftrightarrow$ в (2.21) означает слабую сходимость при $t \to \infty$ распределений последовательности случайных величин $y(t)$ к распределению Φ.

Отметим, что в утверждении теоремы не предполагается конечности σ_τ; достаточна лишь конечность σ_ξ, так что если, например, $a = a_\zeta = 0$, то $\xi = \zeta$ и для выполнения (2.21) достаточно лишь существования $a_\tau = \mathbf{E}\tau$ и σ_ζ.

Доказательство. Используя обозначения (2.8), в однородном случае можно записать

$$Y(t) - at = Z_{\eta(t)} - aT_{\eta(t)} + a\chi(t) = S_{\eta(t)} + a\chi(t). \tag{2.22}$$

Здесь при $h(t) = t/a_\tau$ в силу теоремы 2.1 и следствия 2.2 имеем

$$s(n) := \frac{S_n}{\sigma_\xi \sqrt{n}} \Subset \Phi, \quad \frac{\chi(t)}{\sqrt{t}} \underset{p}{\to} 0, \quad \frac{\eta(t)}{h(t)} \underset{\text{п.н.}}{\to} 1 \quad \text{при } n \to \infty,\ t \to \infty. \tag{2.23}$$

Таким образом, последовательность $\gamma(n) = s(n)$ удовлетворяет условию 1 теоремы 2.1. Далее, по лемме 4.1 в [3] (см. также [5]) последовательность $s(n)$ удовлетворяет условию 2 теоремы 2.1. Наконец, случайная последовательность $\eta(t)$ в силу (2.23) удовлетворяет условию 3 теоремы 2.1. Поэтому по теореме 2.1, лемме 2.2 и следствию 2.2

$$s(\eta(t)) \Subset \Phi, \quad \frac{\sigma_\xi \sqrt{\eta(t)}}{\sigma \sqrt{t}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 1,$$

$$\frac{Y(t) - at}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{s(\eta(t))\sigma_\xi \sqrt{\eta(t)}}{\sigma\sqrt{t}} + o_p(1) \Subset \Phi \quad \text{при } t \to \infty.$$

Это доказывает (2.21).

В неоднородном случае обозначим о.п.в. через $Y_1(t)$, так что

$$Y_1(t) = \zeta_1 + Y(t - \tau_1), \tag{2.24}$$

где $Y(t)$ — однородный о.п.в. Если τ_1 и ζ_1 не случайны, $\tau_1 = o(\sqrt{t})$, $\zeta = o(\sqrt{t})$, то утверждение (2.21), очевидно, сохраняется и для неоднородного о.п.в. Нетрудно видеть, что это будет справедливо и в случае $\tau_1 = o_p(\sqrt{t})$, $\zeta_1 = o_p(\sqrt{t})$. Теорема 2.2 доказана.

Итак, мы установили, что «рандомизация» процесса $s(n)$ путем замены детерминированного времени n на случайное $\eta(t)$ сохраняет предельное распределение изучаемого процесса. Покажем теперь, что процесс $y(t)$, полученный после такой рандомизации, снова можно рандомизировать (с сохранением предельного распределения) путем замены детерминированного времени t на случайное время $\theta(x)$, удовлетворяющее условию 3 теоремы 2.1.

Из теоремы 2.2 следует, что процесс $y(t)$ удовлетворяет условию 1 теоремы 2.1. Докажем теперь следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Если $\sigma_\tau < \infty$, $\sigma_\zeta < \infty$, $\tau_1 = o_p(\sqrt{t})$, $\zeta_1 = o_p(\sqrt{t})$, то процесс $y(t)$ удовлетворяет условию 2 теоремы 2.1, т. е.*

$$\sup_{|u|<\delta t} |y(t+u) - y(t)| \underset{p}{\to} 0 \tag{2.25}$$

при $t \to \infty$, $\delta = \delta(t) \to 0$.

Если $a = 0$, то условие $\sigma_\tau < \infty$ излишне.

Доказательство. Рассмотрим сначала однородный случай. Имеем

$$y(t+u) - y(t) = \frac{Y(t+u) - Y(t) - au}{\sigma\sqrt{t+u}} - \big(Y(t) - at\big)\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{\sigma\sqrt{t+u}}\right),$$

$$\sup_{|u|<\delta t}|y(t+u)-y(t)| \le \sup_{|u|<\delta t}\left|\frac{Y(t+u)-Y(t)-au}{\sigma\sqrt{t+u}}\right| + \left|\frac{Y(t)-at}{\sigma\sqrt{t}}\right|\sup_{|u|<\delta t}\left|\sqrt{\frac{t}{t+u}}-1\right|, \quad (2.26)$$

где второе слагаемое в правой части (2.26), равное $\bigl|y(t)\bigr|O(\delta)$, есть, очевидно, $o_p(1)$. Так как $Y(t)-at = S_{\eta(t)}+a\chi(t)$ (см. (2.22)), то первое слагаемое в правой части (2.26) можно записать в виде

$$\sup_{|u|<\delta t}\left|\frac{S_{\eta(t+u)}-S_{\eta(t)}+a\chi(t+u)-a\chi(t)}{\sigma\sqrt{t+u}}\right| \le \sup_{|u|<\delta t}\left|\frac{S_{\eta(t+u)}-S_{\eta(t)}}{\sigma\sqrt{t+u}}\right| + \frac{|a|\chi(t)}{\sigma\sqrt{t(1-\delta)}}+\frac{|a|}{\delta}\sup_{|u|<\delta t}\frac{\chi(t+u)}{\sqrt{t+u}}. \quad (2.27)$$

Последние два слагаемых при $a=0$ исчезают, а при $a\ne 0$, $\sigma_\tau<\infty$ в силу леммы 2.2 (см. (2.12)) сходятся к 0 при $t\to\infty$ с вероятностью 1. Остается рассмотреть первое слагаемое в правой части (2.27). Траектория процесса $\eta(t)$ получается из траектории $\{T_k\}$, если оси абсцисс и ординат поменять местами (процесс $\eta(t)$ есть «обратный» процесс к $\{T_k\}$). Поэтому для траектории $\eta(t)$, как и для траектории $\{T_k\}$, справедлив усиленный закон больших чисел и при всех достаточно больших t значение $\eta(t)$ при любом $\delta>0$ будет располагаться в пределах $a_\tau^{-1}t(1\mp\delta)$. Это означает, что при $|u|<\delta t$ и достаточно малом δ все значения $\eta(t+u)$ будут располагаться в пределах границ $a_\tau^{-1}t(1\mp 5\delta)$. Поэтому первое слагаемое в правой части (2.27) при

$$n=\bigl[ta_\tau^{-1}\bigr] \quad (2.28)$$

и достаточно больших t не будет превосходить значения

$$\frac{2}{\sigma\sqrt{t(1-\delta)}}\max_{|k|<5\delta t}|S_{n+k}-S_n|. \quad (2.29)$$

(Мы воспользовались здесь тем, что

$$|S_{\eta(t+u)}-S_{\eta(t)}| \le |S_{\eta(t+u)}-S_n|+|S_{\eta(t)}-S_n|.) \quad (2.30)$$

Другими словами, при $t\to\infty$, $\delta\to 0$ для первого слагаемого в правой части (2.27), которое мы обозначим через M_t, будем иметь

$$\mathbf{P}(M_t>\varepsilon)\le o(1)+\mathbf{P}\biggl(\max_{|k|\le 5\delta t}|S_{n+k}-S_n|>\frac{\varepsilon\sigma\sqrt{t}}{3}\biggr). \quad (2.31)$$

Если под знаком вероятности в правой части (2.28) заменить t на na_τ (см. (2.28)), то мы получим вероятность того же вида, что оценивалась в лемме 4.1 в [3] (см. также [5]). В соответствии с этой леммой вероятности в (2.31) сходятся к 0 при $t\to\infty$. Вместе с (2.27), (2.26) это заканчивает доказательство (2.25).

В неоднородном случае следует воспользоваться представлением (2.24), условиями $\tau_1=o_p(\sqrt{t})$, $\zeta_1=o_p(\sqrt{t})$ и повторить рассуждения, которые использовались в доказательстве теоремы 2.2 в неоднородном случае. Лемма 2.3 доказана.

Установим теперь закон повторного логарифма для о.п.в.

Теорема 2.3. *Пусть $\sigma_\tau < \infty$, $\sigma < \infty$, τ_1, ζ_1 — произвольные фиксированные случайные величины,*

$$l(t) := \sigma\sqrt{2t\ln\ln t} \quad \text{при } t \geq 3. \tag{2.32}$$

Тогда с вероятностью 1

$$\overline{Y} := \varlimsup_{t\to\infty} \frac{Y(t) - at}{l(t)} = 1, \tag{2.33}$$

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{Y(t) - at}{l(t)} = -1.$$

Если $a = 0$, то условие $\sigma_\tau < \infty$ излишне.

Утверждение теоремы 2.3, возможно, известно, но найти необходимую ссылку нам не удалось.

Доказательство. Достаточно доказать соотношение (2.33). Так как $t = T_{\eta(t)} - \chi(t)$, то

$$\overline{Y} = \varlimsup_{t\to\infty} \left(\frac{S_{\eta(t)}}{l(t)} + \frac{a\chi(t)}{l(t)}\right).$$

В силу леммы 2.2 при $\sigma_\tau < \infty$ с вероятностью 1

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{a\chi(t)}{l(t)} = 0.$$

Если $a = 0$, то это соотношение выполнено всегда. Кроме того, с вероятностью 1

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a_\tau \eta(t)}{t} = 1, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{l(t)}{l(a_\tau \eta(t))} = 1,$$

так что

$$\overline{Y} = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{S_{\eta(t)}}{l(t)} = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{S_{\eta(t)}}{l(a_\tau \eta(t))}.$$

С ростом t функция $\eta(t)$ пробегает все значения $1, 2, \ldots$. Поэтому в силу равенства $\sigma\sqrt{a_\tau} = \sigma_\xi$ и закона повторного логарифма для $\{S_n\}$ имеем

$$\overline{Y} = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{S_n}{l(a_\tau n)} = \varlimsup_{t\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{a_\tau}\, l(n)} = 1.$$

Теорема 2.3 доказана.

§ 3. Интегральные предельные теоремы для времени первого прохождения в случае конечной дисперсии

Вернемся к основной задаче о времени η_g (см. (1.1)) первого прохождения границы $g_x(t)$ траекторией о.п.в.

$$Y(t) = Z_{\eta(t)}.$$

Перенос полученных результатов на процесс $Z(t) = Z_{\nu(t)}$ и на процессы с линейным сносом будет произведен в теореме 3.2.

Мы будем использовать здесь те же условия на границу $g_x(t)$, которые использовались в аналогичной задаче в [3] для траекторий более простых процессов — случайных блужданий, порожденных суммами случайных величин.

Будем предполагать, что определено время t_g первого пересечения кривых $g_x(t)$ и at (см. (1.2)), $t_g \to \infty$ при $x \to \infty$ и что граница $g_x(t)$ удовлетворяет следующим двум условиям (напомним, что $a = a_\zeta/a_\tau$, $\sigma^2 = \frac{\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2}{a_\tau}$, функция $l(t)$ определена в (2.32)).

$[\mathscr{A}]_1$. *При некотором $\varepsilon > 0$ существует последовательность $b_x \to b < a$ при $x \to \infty$ такая, что при $|t - t_g| < 2\frac{(1+\varepsilon)l(t_g)}{a-b}$ выполнены соотношения*

$$g_x(t) = at_g + (t - t_g)b_x + o(\sqrt{t_g}) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{3.1}$$

Введем в рассмотрение ближайшую к t_g точку $t_g^- < t_g$ пересечения функций $g_x(t)$ и $at + (1+\varepsilon)l(t)$:

$$t_g^- := \sup\{t < t_g : g_x(t) > at + (1+\varepsilon)l(t)\}. \tag{3.2}$$

Второе условие на $g_x(t)$ имеет следующий вид.

$[\mathscr{A}]_2$. $g_x(t) \to \infty$ *при любом фиксированном t и $x \to \infty$,*

$$g_x(t) \ge at + (1+\varepsilon)l(t) \quad \text{при } t \le t_g^-. \tag{3.3}$$

Ясно, что

$$t_g^- \ge t_g - \frac{2l(t_g)}{a-b} \tag{3.4}$$

при достаточно больших x.

Существо условий $[\mathscr{A}]_1$, $[\mathscr{A}]_2$ очевидно — граница $g_x(t)$ должна быть отделена от луча at до момента t_g и его окрестности. В окрестности точки t_g пересечения луча at и границы $g_x(t)$ эта граница должна быть в известном смысле близка к линейной с угловым коэффициентом $b < a$.

В [3] в качестве иллюстрации приведены следующие два примера, в которых условия $[\mathscr{A}]_1$, $[\mathscr{A}]_2$ выполнены.

1. Пусть $f(x)$ — фиксированная (не зависящая от x) функция, а $g_x(t)$ получается из $f(t)$ путем растяжения в x раз по обеим осям координат:

$$g_x(t) = xf\left(\frac{t}{x}\right). \tag{3.5}$$

Если

$$u_f := \inf\{u : au \ge f(u)\},$$

то, очевидно, $t_g = xu_f$. Для выполнения условий $[\mathscr{A}]_1$, $[\mathscr{A}]_2$ здесь достаточно, чтобы

1) $f(u)/u \to \infty$ при $u \downarrow 0$,
2) $f(u) > au + c\delta$ при $u \in [\delta, u_f - \delta]$, достаточно малом δ и некотором $c > 0$,
3) $f(u_f + u) = au_f + bu + O(|u|^{1+r})$ при $b = f'(u_f) < a$, $r > 0$, $|u| < \delta \to 0$.

Нетрудно видеть, что функции

$$g_x(t) = xt^\alpha, \quad \alpha \in [0, 1),$$

принадлежат семейству (3.5). Надо положить $f(t) = t^\alpha$, а в качестве нормирующего множителя взять не x, а $x^{1/(1-\alpha)}$. В этом случае

$$t_g = \left(\frac{x}{a}\right)^{1/(1-\alpha)}, \quad b = \alpha a < a.$$

2. Во втором примере функция f опять фиксирована,

$$g_x(t) = x + f(t).$$

Здесь значение t_g определено, если

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,(at - f(t)) = \infty.$$

Если, например, $f(t) = bt + o(\sqrt{t})$ при $t \to \infty$, $b < a$, то $t_g = \frac{x+o(\sqrt{x})}{a-b}$ и условия $[\mathscr{A}]_1$, $[\mathscr{A}]_2$ будут выполнены. Они будут выполнены и в случае $f(t) = ct^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Кроме того, если наряду с функциями $g_x(t)$ в названных выше примерах рассмотреть функции

$$g_x(t) + \sqrt{t}\delta_x(t),$$

где $\sup\limits_t \delta_x(t) \to 0$ при $x \to \infty$, то они вновь будут удовлетворять условиям $[\mathscr{A}]_1$, $[\mathscr{A}]_2$, хотя могут иметь любые колебания и разрывы порядка $o(\sqrt{t_g})$ в окрестности точки t_g.

Теорема 3.1. *Пусть $\sigma_\tau < \infty$, $\sigma < \infty$, функции $g_x(t)$ таковы, что $t_g \to \infty$ при $x \to \infty$* (см. (1.2)), *$\tau_1 = o_p(\sqrt{t_g})$, $\zeta_1 = o_p(\sqrt{t_g})$ и выполнены условия $[\mathscr{A}]_1$, $[\mathscr{A}]_2$. Тогда при $x \to \infty$*

$$\mathbf{P}\biggl(\frac{\eta_g - t_g}{\sigma\sqrt{t_g}} < v\biggr) \to \Phi((a-b)v),$$

где Φ — функция распределения нормального закона Φ.

Если $a = 0$, то условие $\sigma_\tau < \infty$ излишне.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2.1 и проверим выполнение ее условий применительно к процессу $y(t)$ (см. (2.20)) и случайному времени η_g.

Выполнение условий 1, 2 теоремы 2.1 для процесса $y(t)$ вытекает из теоремы 2.2 и леммы 2.3. Проверим выполнение условия 3. Наряду со значением t_g^- (см. (3.2)) введем в рассмотрение точку t_g^+ пересечения функций $g_x(t)$ и $at - (1+\varepsilon)l(t)$:

$$t_g^+ = \min\{t > t_g : at - (1+\varepsilon)l(t) \ge g_x(t)\},$$

где $l(t)$ определено в (2.32).

В силу условия $[\mathscr{A}]_2$ и закона повторного логарифма для процесса $Y(t)$ имеем

$$\mathbf{P}\bigl(\eta_g \in (t_g^-, t_g^+)\bigr) \to 1 \quad \text{при } x \to \infty.$$

По условию (3.4) при достаточно больших x выполняется

$$t_g^+ - t_g^- \le \frac{4l(t_g)}{a-b},$$

так что

$$\mathbf{P}\biggl(|\eta_g - t_g| < \frac{4l(t_g)}{a-b}\biggr) \to 1.$$

Это означает, что

$$\frac{\eta_g}{t_g} \underset{p}{\to} 1 \quad \text{при } x \to \infty \tag{3.6}$$

и выполнено условие 3 теоремы 2.1 при $\theta(x) = \eta_g$ и $h(x) = t_g$. Поэтому из теоремы 2.1 получаем

$$\mathbf{P}(y(\eta_g) < v) \Rightarrow \Phi(v) \quad \text{при } x \to \infty, \tag{3.7}$$

где

$$y(\eta_g) = \frac{Y(\eta_g) - a\eta_g}{\sigma\sqrt{\eta_g}}, \quad \frac{\sqrt{\eta_g}}{\sqrt{t_g}} \underset{p}{\to} 1 \quad \text{при } x \to \infty. \tag{3.8}$$

Далее,

$$(\eta_g) = g_x(\eta_g) + \chi_g, \tag{3.9}$$

где $\chi_g \le \zeta_{\eta(\eta_g)}$. Положим

$$n_x^\pm := \frac{t_g^\pm}{a_\tau}(1 \pm \varepsilon)$$

при $\varepsilon > 0$ и введем в рассмотрение события

$$\begin{gathered} B_1 := \{t_g^- < \eta_g < t_g^+\}, \quad B_2 := \{\eta(t_g^-) > n_x^-\}, \\ B_3 := \{\eta(t_g^+) < n_x^+\}, \quad B = B_1B_2B_3. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Ясно, что $\mathbf{P}(B_1) \to 1$ при $x \to \infty$ и в силу закона больших чисел для $\eta(t)$ выполняется $\mathbf{P}(B_2B_3) \to 1$, так что $\mathbf{P}(B) \to 1$ при $x \to \infty$. При этом на множестве B

$$n_x^- < \eta(t_g^-) < \eta(\eta_g) < \eta(t_g^+) < n_x^+, \quad \chi_g \le \max\{\zeta_k : n_x^- < k < n_x^+\}.$$

Поэтому при любом $\delta > 0$

$$\mathbf{P}(\chi_g > \delta\sqrt{t_g}; B) \le (n_x^+ - n_x^-)\mathbf{P}(\zeta > \delta\sqrt{t_g}).$$

Далее, при достаточно больших x и малых ε

$$n_x^+ - n_x^- < \frac{2(t_g^+ - t_g^-)}{a_\tau} < \frac{8l(t_g)}{a_\tau(a-b)},$$

так что

$$\mathbf{P}(\chi_g > \delta\sqrt{t_g}) \le o(1) + \frac{8l(t_g)}{a_\tau(a-b)}\frac{\mathbf{E}\zeta^2}{\delta^2 t_g} = o(1)$$

при $x \to \infty$; $\chi_g = o_p(\sqrt{t_g})$. Поэтому из (3.9) и условия $[\mathscr{A}]_1$ получаем

$$Y(\eta_g) - a\eta_g = g_x(\eta_g) - a\eta_g + o_p(\sqrt{t_g}) = (a - b_x)(t_g - \eta_g) + o_p(\sqrt{t_g}),$$

$$y(\eta_g) = -\frac{(a - b_x)(\eta_g - t_g)}{\sigma\sqrt{t_g}} + o_p(1) \tag{3.11}$$

и в силу (3.7)

$$\mathbf{P}\biggl(-\frac{(a - b_x)(\eta_g - t_g)}{\sigma\sqrt{t_g}} < v\biggr) = \mathbf{P}\biggl(\frac{\eta_g - t_g}{\sigma\sqrt{t_g}} > -\frac{v}{a - b_x}\biggr) \to \Phi(v) \tag{3.12}$$

при $x \to \infty$ или, что то же,

$$\mathbf{P}\biggl(\frac{\eta_g - t_g}{\sigma\sqrt{t_g}} < u\biggr) \to \Phi((a-b)u).$$

Теорема 3.1 доказана.

Покажем теперь, что утверждения основных теорем 2.2, 2.3, 3.1 останутся верными для о.п.в. $Z(t) = Z_{\nu(t)}$ и для процессов

$$Y^{(q)}(t) = Y(t) + qt, \quad Z^{(q)}(t) = Z(t) + qt \tag{3.13}$$

с линейным сносом qt.

Теорема 3.2. *Утверждения теорем* 2.2, 2.3, 3.1 *полностью сохранятся, если в них* $Y(t)$ *заменить на* $Z(t)$. *Они полностью сохранятся и в случае, если* $Y(t)$ *заменить на* $Y^{(q)}(t)$ *или* $Z^{(q)}(t)$ *при замене* a *на* $a^{(q)} := a + q$ *и при условии* $\sigma_\tau < \infty$.

Доказательство. Так как

$$Y(t) - Z(t) = \zeta_{\eta(t)} \tag{3.14}$$

и в силу леммы 2.2

$$\frac{|\zeta_{\eta(t)}|}{\sqrt{t}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \tag{3.15}$$

при $t \to \infty$ (см. (2.11)), то

$$\frac{|Z(t) - Y(t)|}{\sqrt{t}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0. \tag{3.16}$$

Отсюда вытекает справедливость названных теорем для о.п.в. $Z(t)$.

Для доказательства второго утверждения теоремы рассмотрим наряду с $Y^{(q)}(t)$ процесс $Y^{[q]}(t)$, который получается из процесса $Y(t)$, если в нем скачки ζ_k заменить на $\zeta_k^{[q]} := \zeta_k + q\tau_k$. Значения процессов $Y^{[q]}(t)$ и $Y^{(q)}(t)$ совпадают в точках T_k,

$$|Y^{[q]}(t) - Y^{(q)}(t)| \le q\chi(t). \tag{3.17}$$

Так как по лемме 2.2

$$\frac{\chi(t)}{\sqrt{t}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \tag{3.18}$$

при $t \to \infty$, то мы аналогично (3.16) вновь получаем требуемое утверждение:

$$\frac{|Y^{[q]}(t) - Y^{(q)}(t)|}{\sqrt{t}} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \quad \text{при } x \to \infty.$$

Процесс $Z^{(q)}(t)$ рассматривается аналогично. Поскольку к процессу $Y^{[q]}(t)$ применима теорема 3.1 с заменой в ней a на $a^{(q)} = a + q$, то теорема 3.2 доказана.

§ 4. Вспомогательные предложения в случае бесконечной дисперсии

Если $\sigma = \sigma_\xi = \infty$, то мы будем предполагать, что выполнено условие правильного убывания распределения $\xi = \zeta - a\tau$ на бесконечности. Положим

$$F_-(t) = \mathbf{P}(\xi \le -t), \quad F_+(t) = \mathbf{P}(\xi \ge t), \quad F(t) = F_-(t) + F_+(t) = \mathbf{P}(|\xi| \ge t).$$

Мы будем предполагать, что выполнено условие

$[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$. *Функция* $F(t)$ *является правильно меняющейся на бесконечности, т. е. представима в виде*

$$F(t) = t^{-\alpha} L(t), \quad \alpha \in (1, 2),$$

где $L(t)$ *— медленно меняющаяся функция на бесконечности, при этом существует*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{F_+(t)}{F(t)} =: \beta_+ \in [0, 1]$$

и мы полагаем $\beta := 2\beta_+ - 1$.

Пусть далее $F^{(-1)}(u)$ — обобщенная обратная функция к $F(t)$:

$$F^{(-1)}(u) = \inf\{t : F(t) < u\}$$

и

$$\sigma_\xi(n) := F^{(-1)}(1/n). \tag{4.1}$$

Функция $\sigma_\xi(n)$ имеет вид $n^{1/\alpha}L_\sigma(n)$, где $L_\sigma(n)$ — медленно меняющаяся последовательность (см., например, [4, § 8.8]).

При выполнении условия $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ нормированные суммы

$$s(n) := \frac{S_n}{\sigma_\xi(n)}$$

(см. (2.8)) слабо сходятся по распределению к устойчивому закону $\Phi_{\alpha,\beta}$ с параметрами (α, β).

Положим

$$\sigma(t) = \sigma_\xi(t)a_\tau^{-1/\alpha}.$$

Теорема 4.1. *Если* $\xi = \zeta - a\tau$ *удовлетворяет условию* $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$, $\tau_1 = o_p(\sigma(t))$, $\zeta_1 = o_p\big(\sigma(t)\big)$, *то при* $t \to \infty$

$$y(t) := \frac{Y(t) - at}{\sigma(t)} \Leftrightarrow \Phi_{\alpha,\beta}. \tag{4.2}$$

(Напомним, что запись $y(t) \Leftrightarrow \Phi_{\alpha,\beta}$ означает слабую сходимость распределений $y(t)$ к распределению $\Phi_{\alpha,\beta}$ с функцией распределения $\Phi_{\alpha,\beta}$.)

Доказательство. Последовательность $s(n)$ удовлетворяет условию 1 теоремы 2.1 при $G = \Phi_{\alpha,\beta}$. По лемме 4.1 в [3] она удовлетворяет также условию 2 этой теоремы. Наконец, как мы уже видели, последовательность $\eta(t)$ удовлетворяет условию 3 теоремы 2.1. Стало быть, по теореме 2.1

$$s(\eta(t)) \Leftrightarrow \Phi_{\alpha,\beta}.$$

Так как $\frac{a_\tau^{1/\alpha}\sigma_\xi(\eta(t))}{\sigma_\xi(t)} \underset{p}{\to} 1$ и по следствию 2.2 $\frac{\chi(t)}{\sigma(t)} \underset{p}{\to} 0$, то $\frac{\sigma_\xi(\eta(t))}{\sigma(t)} \underset{p}{\to} 1$,

$$y(t) = \frac{Y(t) - at}{\sigma(t)} = \frac{S_{\eta(t)}}{\sigma_\xi(\eta(t))}\frac{\sigma_\xi(\eta(t))}{\sigma(t)} + o_p(1) = s(\eta(t)) + o_p(1) \Leftrightarrow \Phi_{\alpha,\beta}.$$

Теорема доказана.

Покажем теперь, что процесс $y(t)$ удовлетворяет условию 2 теоремы 2.1, т. е. установим следующий аналог леммы 2.3.

Лемма 4.1. *Пусть случайная величина* $\xi = \zeta - a\tau$ *удовлетворяет условию* $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$, $\alpha \in (1, 2)$,

$$\mathbf{P}(\tau \geq t) \leq cF(t), \quad c = \text{const}, \tag{4.3}$$

$\tau_1 = o_p(\sigma(t))$, $\zeta_1 = o_p(\sigma(t))$. *Тогда*

$$\sup_{|u|<\delta t} |y(t+u) - y(t)| \underset{p}{\to} 0 \tag{4.4}$$

при $t \to \infty$, $\delta = \delta(t) \to 0$.

Если $a = 0$, то условие (4.3) излишне.

Доказательство. Рассмотрим сначала однородный случай. Аналогично (2.26) имеем

$$\sup_{|u|<\delta t} |y(t+u) - y(t)| \le \sup_{|u|<\delta t} \frac{|Y(t+u) - Y(t) - au|}{\sigma(t+u)} + |y(t)| \sup_{u<\delta t} \left| \frac{\sigma(t)}{\sigma(t+u)} - 1 \right|,$$

где второе слагаемое в правой части есть, очевидно, $o_p(1)$. Первое слагаемое не превосходит (ср. с (2.27))

$$\sup_{|u|<\delta t} \left| \frac{S_{\eta(t+u)} - S_{\eta(t)}}{\sigma(t+u)} \right| + \frac{|a|\chi(t)}{\sigma(t-\delta t)} + \frac{|a|}{\sigma(t-\delta t)} \sup_{|u|<\delta t} \chi(t+u). \tag{4.5}$$

Здесь $\sigma(t-\delta t) \sim \sigma(t) \to \infty$,

$$\frac{\chi(t)}{\sigma(t-\delta t)} \underset{p}{\to} 0, \tag{4.6}$$

так как распределение $\chi(t)$ сходится при $t \to \infty$ к собственному распределению (см. лемму 2.1). Далее,

$$\sup_{|u|<\delta} \chi(t+u) \le \chi(t-\delta t) + \mu_t, \tag{4.7}$$

где $\mu_t \underset{p}{\le} \bar{\tau}_{\eta(2\delta t)}$ и при $\varepsilon > 0$, $m = \left[\frac{3\delta t}{a_\tau}\right] \to \infty$ выполняется

$$\mathbf{P}(\bar{\tau}_{\eta(2\delta t)} > \varepsilon\sigma(t)) \le \mathbf{P}(\eta(2\delta t) > m) + \mathbf{P}(\bar{\tau}_m > \varepsilon\sigma(t)) = o(1) + m\mathbf{P}(\tau > \varepsilon\sigma(t)).$$

Но по условию (4.3)

$$m\mathbf{P}(\tau > \varepsilon\sigma(t)) \le mcF\big(\varepsilon a_\tau^{-1/\alpha}\sigma_\xi(t)\big) \sim mc\varepsilon^{-\alpha} a_\tau F(\sigma_\xi(t)) \sim 3\delta c\varepsilon^{-\alpha} = o(1).$$

Таким образом, $\frac{\mu_t}{\sigma(t)} = o_p(1)$, и в силу (4.6) $\frac{\chi(t-\delta t)}{\sigma(t-\delta t)} = o_p(1)$. Сказанное означает, что последние два слагаемых в (4.5) суть $o_p(1)$.

Если $a = 0$, то последние два слагаемых в (4.5) исчезают и необходимость в проведенных выше оценках отпадает.

Нам остается оценить первое слагаемое в (4.5). Здесь используются те же рассуждения, что и при оценке аналогичного слагаемого в (2.27) в доказательстве леммы 2.3. Согласно этим рассуждениям первое слагаемое в (4.5) при

$$n = \left[t a_\tau^{-1}\right] \tag{4.8}$$

и всех достаточно больших t не будет превосходить значения

$$\frac{2}{\sigma(t-\delta t)} \max_{|k|<5\delta t} |S_{n+k} - S_n|$$

(ср. с (2.29)). Другими словами, при $t \to \infty$, $\delta \to 0$ для первого слагаемого в (4.5), которое мы обозначим через M_t, будем иметь (ср. с (2.31))

$$\mathbf{P}(M_t > \varepsilon) \le o(1) + \mathbf{P}\left(\max_{|k|<5\delta t} |S_{n+k} - S_n| > \frac{\varepsilon\sigma(t)}{3} \right). \tag{4.9}$$

Если под знаком вероятности в правой части (4.9) заменить t на na_τ (см. (4.8)), то мы получим вероятность того же вида, что в лемме 4.1 в [3]. В соответствии с этой леммой вероятности в (4.9) сходятся к 0 при $t \to \infty$ ($n \to \infty$) (мы уже использовали названную лемму в доказательствах теоремы 2.2 и леммы 2.3).

Сходимость (4.4) в однородном случае доказана. В неоднородном случае следует повторить (с очевидными изменениями) рассуждения в доказательстве леммы 2.3. Лемма 4.1 доказана.

Получим теперь аналог леммы 2.2. Ниже мы будем предполагать, что существует постоянная $c < \infty$ такая, что при всех достаточно больших t

$$F_\zeta(t) := \mathbf{P}(|\zeta| \ge t) \le cF(t), \tag{4.10}$$

$$F_\tau(t) := \mathbf{P}(\tau \ge t) \le cF(t). \tag{4.11}$$

Нетрудно видеть, что если τ и ζ независимы, для величины ζ выполнено условие вида $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ и $F_\tau(t) = o(F_\zeta(t))$ при $t \to \infty$ (последнее всегда имеет место, если $\sigma_\tau < \infty$), то выполнено условие $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ для величины ξ и неравенства (4.10), (4.11).

Аналог леммы 2.2 здесь имеет следующий вид.

Положим

$$l(t) = \sigma_\xi(t)(\ln t)^\theta, \quad \theta > \frac{1}{\alpha}. \tag{4.12}$$

Лемма 4.2. *Пусть τ_1, ζ_1 — произвольные фиксированные случайные величины. Если выполнены условия $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ для распределения ξ и неравенство* (4.10), *то*

$$\frac{\bar\zeta_n}{l(n)} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0, \quad \frac{\bar\zeta_{\eta(t)}}{l(t)} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0, \quad \frac{\bar\zeta_{\eta(t)}}{l(\eta(t))} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0$$

при $n \to \infty$, $t \to \infty$. Если выполнено (4.11), *то такие же соотношения справедливы для $\bar\tau_n$, $\bar\tau_{\eta(t)}$. Кроме того,*

$$\frac{\chi(t)}{l(t)} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0, \quad \frac{\chi(t)}{l(\eta(t))} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0 \quad \textit{при } t \to \infty. \tag{4.13}$$

Доказательство леммы 4.2 аналогично доказательству леммы 2.2. Рассмотрим сначала однородный случай $(\tau_1, \zeta_1) \underset{d}{=} (\tau, \zeta)$. Имеем при любом фиксированном $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\zeta_n| > \varepsilon l(n)) \le c \sum_{n=1}^{\infty} F(\varepsilon l(n)). \tag{4.14}$$

При любом $\delta > 0$ и всех достаточно больших n выполняется (см., например, [6, гл. 1])

$$F(\varepsilon l(n)) = F(\varepsilon(\ln n)^\theta \sigma_\xi(n)) \le [\varepsilon(\ln n)^\theta]^{-\alpha+\delta} F(\sigma_\xi(n)).$$

Выберем δ так, что $\theta' := (\alpha - \delta)\theta > 1$, и воспользуемся асимптотической эквивалентностью $F(\sigma_\xi(n)) \sim 1/n$. Тогда ряд в (4.14) не будет превосходить (с точностью до постоянного множителя) значение суммы

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}(\ln n)^{-\theta'} < \infty.$$

Это означает, что по лемме Бореля — Кантелли

$$\frac{\zeta_n}{l(n)} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0.$$

Дальнейшие рассуждения в доказательстве леммы повторяют с точностью до очевидных изменений (замены $\sqrt{t}$ на $l(t)$) рассуждения в доказательстве леммы 2.2.

Замечание 4.1. «Полный» аналог леммы 2.2, т. е. утверждение о том, что, например, $\frac{\xi_n}{\sigma_\xi(n)} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0$ ($\sigma_\xi(n)$, как и $\sigma_\xi\sqrt{n}$ в § 3, является нормирующим множителем в соответствующей предельной теореме для S_n) здесь отсутствует. Действительно, среди значений $\xi_1, \dots, \xi_n$ при выполнении условий $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$ относительно распределения ξ найдется при $n \to \infty$ значение, которое со значимой положительной вероятностью сравнимо с $\sigma_\xi(n)$. Этому соответствует тот факт, что $\mathbf{P}(|\xi_n| > \sigma_\xi(n)) \sim 1/n$ при $n \to \infty$ и соответствующий ряд в лемме Бореля — Кантелли расходится.

Аналог закона повторного логарифма для процесса $Y(t) - at$ имеет при $\sigma = \infty$ следующий вид.

Теорема 4.2. *Пусть ξ удовлетворяет условию $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$, $\alpha \in (1,2)$, выполнено условие (4.11), τ_1, ζ_1 — произвольные фиксированные случайные величины. Тогда*

$$\overline{Y} := \lim_{t\to\infty} \frac{|Y(t) - at|}{l(t)} = 0$$

с вероятностью 1.

Если $a = 0$, то условие (4.11) излишне.

Доказательство теоремы повторяет с точностью до очевидных изменений доказательство теоремы 2.3 и использует тот факт, что с вероятностью 1

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a\chi(t)}{l(t)} = 0 \quad (\text{см. } (4.13)) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{l(n)} = 0$$

при любом $\theta > 1/\alpha$ (см. [6, теорема 3.9.1]). Теорема доказана.

§ 5. Интегральная предельная теорема для времени первого прохождения в случае бесконечной дисперсии

Как и в § 4, мы будем предполагать, что $\xi = \zeta - a\tau$ удовлетворяет условию $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$.

Как и в § 3, мы будем предполагать здесь, что определено время t_g первого пересечения кривых $g_x(t)$ и at и что граница $g_x(t)$ удовлетворяет условиям $[\mathscr{A}]_1$, $[\mathscr{A}]_2$, в которых теперь вместо $(1+\varepsilon)l(t)$ (при $l(t)$, определенной в (2.32)) следует писать $l(t)$, где

$$l(t) = \sigma_\xi(t)(\ln t)^\theta, \quad \sigma_\xi(t) = F^{(-1)}\left(\frac{1}{t}\right) \tag{5.1}$$

при любом фиксированном $\theta > 1/\alpha$, а остаточный член $o(\sqrt{t_g})$ в (2.6) заменить на $o\big(\sigma(t_g)\big)$, где, как и прежде,

$$\sigma(t) = a_\tau^{-1/\alpha}\sigma_\xi(t).$$

Здесь остаются справедливыми все комментарии к условиям $[\mathscr{A}]_1$, $[\mathscr{A}]_2$, сделанные в § 3.

Теорема 5.1. *Пусть ξ удовлетворяет условию $[\mathbf{R}_{\alpha,\beta}]$, $\alpha \in (1,2)$, а функции $g_x(t)$ таковы, что $t_g \to \infty$ при $x \to \infty$, $\tau_1 = o_p(\sigma(t_g))$, $\zeta_1 = o_p(\sigma(t_g))$ и выполнены условия $[\mathscr{A}]_1$, $[\mathscr{A}]_2$ с заменами, названными в (5.1). Пусть, кроме того,*

$$\mathbf{P}(\tau \ge t) < cF(t), \quad \mathbf{P}(\zeta \ge t) < cF(t) \tag{5.2}$$

при некотором $c < \infty$. Тогда при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\eta_g - t_g}{\sigma(t_g)} < v\right) \to \Phi_{\alpha,\beta}((a-b)v). \tag{5.3}$$

Если $a = 0$, то первое из условий (5.2) излишне.

Доказательство теоремы 5.1 вполне аналогично доказательству теоремы 3.1. Воспользуемся теоремой 2.1 и проверим выполнение ее условий 1–3 применительно к процессу

$$y(t) = \frac{Y(t) - at}{\sigma(t)}$$

и случайному времени η_g. Выполнение условий 1, 2 вытекает из теоремы 4.1 и леммы 4.1. Проверим выполнение условия 3. Наряду со значением t_g^- (см. (3.2) при замене (5.1)) введем в рассмотрение точку t_g^+ пересечения прямых $g_x(t)$ и $at - l(t)$ в (5.1):

$$t_g^+ := \inf\{t > t_g : at - l(t) \geq g_x(t)\}.$$

В силу условия $[\mathscr{A}]_2$ и аналога закона повторного логарифма (теорема 4.2) имеем

$$\mathbf{P}(\eta_g \in (t_g^-, t_g^+)) \to 1 \quad \text{при } x \to \infty.$$

Ввиду соотношений вида (3.4) при достаточно больших x выполняется

$$t_g^+ - t_g^- \leq \frac{4l(t_g)}{a - b},$$

так что

$$\mathbf{P}\left(|\eta_g - t_g| < \frac{4l(t_g)}{a - b}\right) \to 1.$$

Это означает, что

$$\frac{\eta_g}{t_g} \underset{p}{\to} 1 \quad \text{при } x \to \infty$$

и выполнено условие 3 теоремы 2.1 при $\theta(x) = \eta_g$, $h(x) = t_g$. Применяя теорему 2.1, получаем

$$y(\eta_g) \Subset \Phi_{\alpha,\beta} \quad \text{при } x \to \infty,$$

где

$$y(\eta_g) = \frac{Y(\eta_g) - a\eta_g}{\sigma(\eta_g)}, \quad \frac{\eta_g}{t_g} \underset{p}{\to} 1.$$

Далее, положим

$$n_x^\pm := (1 \pm \varepsilon) a_\tau^{-1} t_g^\pm, \quad \varepsilon > 0,$$

и воспользуемся представлением (3.9). Как и в доказательстве теоремы 3.1, рассмотрим события B_1, B_2, B_3, B, определенные в (3.10), где, как и прежде, $\mathbf{P}(B_1) \to 1$ при $x \to \infty$. Далее, считая для простоты, что $n_x^\pm$ — целые числа, имеем

$$\mathbf{P}(\eta(t_g^-) < n_x^-) = \mathbf{P}(T_{n_x^-} \geq t_g^-) = \mathbf{P}(T_{n_x^-} - a_\tau n_x^- \geq \varepsilon t_g^-). \tag{5.4}$$

В силу закона больших чисел вероятность в (5.4) сходится к 0 при $x \to \infty$, так что $\mathbf{P}(B_2) \to 1$. Аналогично устанавливается, что $\mathbf{P}(B_3) \to 1$, $\mathbf{P}(B) \to 1$.

Далее, на множестве B

$$\eta(\eta_g) \in (n_x^-, n_x^+), \quad \chi_g \leq \max\{\zeta_k : n_x^- < k < n_x^+\}. \tag{5.5}$$

Оценим величину перескока χ_g. При любом фиксированном $\delta > 0$ в силу (5.5) имеем

$$\mathbf{P}(\chi_g > \delta\sigma_\xi(t_g); B) \leq (n_x^+ - n_x^-)\mathbf{P}(\zeta > \delta\sigma_\xi(t_g)).$$

При достаточно больших x и малых ε получаем

$$n_x^+ - n_x^- < 2a_\tau^{-1}(t_g^+ - t_g^-) < \frac{8l(t_g)}{a_\tau(a-b)},$$

так что

$$\mathbf{P}(\chi_g > \delta\sigma_\xi(t_g)) \le o(1) + \frac{8l(t_g)}{a_\tau(a-b)}\,\mathbf{P}(\zeta > \delta\sigma_\xi(t_g)). \tag{5.6}$$

Но в силу (5.2) при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}(\zeta > \delta\sigma_\xi(t_g)) \le c\delta^{-\alpha}F(\sigma_\xi(t_g))(1+o(1)) \sim \frac{c\delta^{-\alpha}}{t_g}.$$

Так как $l(t) = o(t)$, то вместе с (5.6) это означает, что $\chi_g = o_p(\sigma(t_g))$. Возвращаясь к (3.9), по условию $[\mathscr{A}]_1$ получаем

$$Y(\eta_g) - a\eta_g = g_x(\eta_g) - a\eta_g + o_p(\sigma(t_g)) = (a-b)(t_g - \eta_g) + o_p(\sigma(t_g)). \tag{5.7}$$

Дальнейшие рассуждения, как и равенство (5.7), повторяют выкладки (3.11), (3.12) в доказательстве теоремы 3.1 с точностью до замены в них $\sigma\sqrt{t_g}$ на $\sigma(t_g)$ и Φ на $\Phi_{\alpha,\beta}$. Теорема 5.1 доказана.

Покажем теперь, как и в § 3, что все основные утверждения § 4, 5 остаются верными и для процессов

$$Z(t), \quad Y^{(q)}(t), \quad Z^{(q)}(t) \tag{5.8}$$

(см. (3.13)).

Теорема 5.2. *Утверждения теорем* 4.1, 4.2, 5.1 *и леммы* 4.1 *полностью сохранятся для процессов* (5.8). *Для процессов с линейным сносом qt центрирующую функцию at в определении $y(t)$ надо заменить на $(a+q)t$.*

Доказательство теоремы 5.2, как и теоремы 3.2, основано на соотношениях (3.14), (3.17). Но теперь для сохранения утверждений теорем 4.1, 5.1 и леммы 4.1 следует воспользоваться не сходимостью почти наверное (ср. с (3.15), (3.18); здесь аналоги такой сходимости отсутствуют), а сходимостью по вероятности

$$\frac{|\zeta_{\eta(t)}|}{\sigma(t)} \underset{p}{\to} 0, \quad \frac{\chi(t)}{\sigma(t)} \underset{p}{\to} 0 \quad \text{при } t \to \infty,$$

которая вытекает из сходимости распределений $\zeta_{\eta(t)}$, $\chi(t)$ к собственному предельному распределению (см. лемму 2.1).

Для сохранения утверждений теоремы 4.2 следует воспользоваться сходимостью почти наверное

$$\frac{\zeta_{\eta(t)}}{l(t)} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0, \quad \frac{\chi(t)}{l(t)} \underset{\text{п.н.}}{\to} 0$$

($l(t)$ определено в (5.1)) при $t \to \infty$, которая вытекает из леммы 4.2. Теорема 5.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кокс Д. Р., Смит В. Л.* Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967.
2. *Asmussen S., Albrecher H.* Ruin probabilities. Word Sci., 2010. (Adv. Ser. Stat. Sci. Appl. Probab.; V. 14).
3. *Боровков А. А.* О распределении времени первого прохождения случайным блужданием произвольной удаленной границы // Теория вероятностей и ее применения. (В печати).

4. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. 5-е изд., существенно перераб. и доп. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2009.
5. *Anscombe C. J.* Large sample theory of sequential estimation // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1952. V. 48. P. 600–607.
6. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Медленно убывающие распределения скачков. М.: АНО «Физматлит», 2008.

Статья поступила 1 июня 2015 г.

Боровков Александр Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
borovkov@math.nsc.ru