Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 517.98+530.1

СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКАЯ МЕРА ГИББСА ДЛЯ ФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

М. М. Рахматуллаев

Аннотация. Изучается модель Поттса с q состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 2$. Для ферромагнитной модели Поттса доказано существование слабо периодической меры Гиббса, не являющейся трансляционно-инвариантной.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.515

Ключевые слова: дерево Кэли, мера Гиббса, модель Поттса, слабо периодическая мера Гиббса.

1. Введение

Понятие меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли вводится обычным образом (см. [1–4]). В [5] изучена ферромагнитная модель Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли второго порядка и показано существование критической температуры T_c такой, что при $T < T_c$ существуют три трансляционно-инвариантных и несчетное число не трансляционно-инвариантных мер Гиббса. В [6] обобщены результаты из [5] для модели Поттса с конечным числом состояний на дереве Кэли произвольного (конечного) порядка.

В [7] доказано, что на дереве Кэли трансляционно-инвариантная мера Гиббса антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем единственна. Работа [8] посвящена модели Поттса со счетным числом состояний и с ненулевым внешним полем на дереве Кэли. Доказано, что эта модель имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса.

В [9] найдены все трансляционно-инвариантные меры Гиббса и, в частности, показано, что при достаточно низких температурах их количество равно $2^q - 1$. Доказано, что существуют $[q/2]$ критических температур, и дано точное количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для каждой промежуточной температуры.

В [10] изучены периодические меры Гиббса для модели Поттса, в частности, показано, что для ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями не существует периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса. В [11] рассмотрены периодические меры Гиббса для модели Поттса с q состояниями.

В [12] вводится слабо периодическая мера Гиббса и для модели Изинга найдены некоторые такие меры. В [13] для модели Поттса исследованы слабо периодические основные состояния и слабо периодические меры Гиббса. Полученные слабо периодические мери Гиббса в [13] также трансляционно-инвариантные.

В [14] изучается модель Поттса с q состояниями на дереве Кэли порядка $k \geq 2$ и для ферромагнитной модели Поттса выделены множества подгрупп индекса два группового представления дерева Кэли, при которых всякая слабо периодическая мера Гиббса трансляционно-инвариантна, а для антиферромагнитной модели Поттса при $k \geq 2$ и $q \geq 2$ показана неединственность слабо периодической меры Гиббса, не являющейся трансляционно-инвариантной.

Данная работа посвящена слабо периодическим (не трансляционно-инвариантным) мерам Гиббса для ферромагнитной модели Поттса на дереве Кэли. В разд. 2 даются необходимые определения и известные факты. Разд. 3 посвящен изучению слабо периодических гиббсовских мер, соответствующих нормальным делителям индекса два.

2. Определения и известные факты

Дерево Кэли $\Im^k$ порядка $k \geq 1$ — бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер. Пусть $\Im^k = (V, L, i)$, где V — множество вершин $\Im^k$, L — его множество ребер и i — функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называют *ближайшими соседями вершины* и используют обозначение $l = \langle x, y\rangle$. Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x,y) = \min\{d \mid \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V \text{ такие, что } \langle x_0, x_1\rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d\rangle\}.$$

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим $W_n = \{x \in V \mid (x, x^0) = n\}$,

$$V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \quad L_n = \{l = \langle x, y\rangle \in L \mid x, y \in V_n\}. \tag{1}$$

Пусть G_k — свободное произведение $k+1$ циклических групп $\{e, a_i\}$ второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ соответственно, т. е. $a_i^2 = e$ (см. [15]).

Существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k (см. [4, 16]).

Это соответствие строится следующим образом. Произвольной фиксированной вершине $x_0 \in V$ поставим в соответствие единичный элемент e группы G_k. Так как рассматриваемый граф без ограничения общности можно считать плоским, каждой соседней вершине точки x_0 (т. е. e) поставим в соответствие образующую a_i, $i = 1, 2, \dots, k+1$, по положительному направлению (рис. 1).

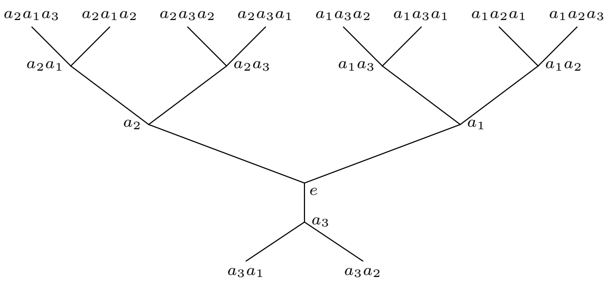

Рис. 1. Дерево Кэли $\Im^2$ и элементы группового представления вершин.

В каждой вершине a_i определим слово длины два a_ia_j соседних вершин a_i. Поскольку одна из соседних вершин вершины a_i есть e, положим $a_ia_i = e$ и тогда нумерация остальных соседних вершин a_i производится однозначно по вышеприведенному правилу нумерации. Далее, для соседних вершин вершины a_ia_j

определим слово длины три следующим образом. Так как одна из соседних для a_ia_j вершин есть a_i, положим $a_ia_ja_j = a_i$ и тогда нумерация остальных соседних вершин производится однозначно и имеет вид $a_ia_ja_l$, $i, j, l = 1, 2, \dots, k+1$. Это соответствие согласуется с предыдущим шагом, ибо $a_ia_ja_j = a_ia_j^2 = a_i$. Таким образом, можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством вершин дерева Кэли $\Im^k$ и группой G_k.

Представление, построенное выше, называется *правым*, так как в этом случае если x и y — соседние вершины, а g и $h \in G_k$ — соответствующие им элементы группы, то либо $g = ha_i$, либо $h = ga_j$ для некоторых i или j. Аналогично определяется левое представление.

Рассмотрим в группе G_k (соответственно на дереве Кэли) преобразование левого (правого) сдвига, определяемое следующим образом: для $g \in G_k$ положим

$$T_g(h) = gh \quad (T_g(h) = hg) \quad \forall h \in G_k.$$

Совокупность всех левых (правых) сдвигов на G_k изоморфна группе G_k.

Любое преобразование S группы G_k индуцирует преобразование $\widehat{S}$ на множестве вершин V дерева Кэли $\Im^k$. Поэтому отождествляем V и G_k.

Теорема 1. *Группа левых* (*правых*) *сдвигов на правом* (*левом*) *представлении дерева Кэли является группой трансляций* (*см.* [4, 16]).

Рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$, и расположены на вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Гамильтониан модели Поттса определяется как

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{2}$$

где $J \in R$, $\langle x, y\rangle$ — ближайшие соседи и δ_{ij} — символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\Big\{ -\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x\in W_n} h_{\sigma(x),x} \Big\}, \tag{3}$$

где $\beta = 1/T$, $T > 0$ — температура, Z_n^{-1} — нормирующий множитель и $\{h_x = (h_{1,x}, \dots, h_{q,x}) \in R^q,\ x \in V\}$ — совокупность векторов и

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}.$$

Говорят, что вероятностное распределение (3) *согласованное*, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}). \tag{4}$$

Здесь $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ — объединение конфигураций. В этом случае существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

Такая мера называется *расщепленной гиббсовской мерой*, соответствующей гамильтониану (2) и векторнозначной функции h_x, $x \in V$.

Следующее утверждение описывает условие на h_x, обеспечивающее согласованность $\mu_n(\sigma_n)$.

Теорема 2 [7]. *Вероятностное распределение $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, в (3) является согласованным тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее равенство:*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \tag{5}$$

где $F : h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in R^{q-1} \to F(h, \theta) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in R^{q-1}$ определяется как

$$F_i = \ln \left(\frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum\limits_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum\limits_{j=1}^{q-1} e^{h_j}} \right)$$

и $\theta = \exp(J\beta)$, $S(x)$ — множество прямых потомков точки x.

Пусть $G_k / G_k^* = \{H_1, \dots, H_r\}$ — фактор-группа, где G_k^* — нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение 1. Совокупность векторов $h = \{h_x,\ x \in G_k\}$ называется G_k^*-*периодической*, если $h_{yx} = h_x$ для любых $x \in G_k$, $y \in G_k^*$.

G_k-периодические совокупности называются *трансляционно-инвариантными*.

Определение 2. Совокупность векторов $h = \{h_x,\ x \in G_k\}$ называется G_k^*-*слабо периодической*, если $h_x = h_{ij}$ при $x \in H_i$, $x_\downarrow \in H_j$ для любого $x \in G_k$.

Определение 3. Мера μ называется G_k^*-*периодической* (*слабо периодической*), если она соответствует G_k^*-периодической (слабо периодической) совокупности векторов h.

Замечание 1. Заметим, что всякая периодическая (трансляционно-инвариантная) мера Гиббса также слабо периодическая, но обратное неверно.

3. Слабо периодические меры

Пусть q произвольное, т. е. $\sigma : V \to \Phi = \{1, 2, 3, \dots, q\}$. В данной работе рассмотрим $q \geq 2$. Пусть $A \subset \{1, 2, \dots, k+1\}$. Заметим, что в случае $|A| = k+1$ (где $|A|$ — число элементов множества A), т. е. в случае $A = N_k$, понятие слабо периодичности совпадает с обычной периодичностью. Поэтому рассмотрим $A \subset N_k$ такое, что $A \neq N_k$, и пусть $H_A = \big\{x \in G_k \mid \sum\limits_{j \in A} w_j(x) \text{ четно}\big\}$, где $w_j(x)$ — число a_j в слове x, $G_k / H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$ — фактор-группа. Для простоты обозначим $H_0 = H_A$, $H_1 = G_k \setminus H_A$, H_A — слабо периодическая совокупность векторов $h = \{h_x \in R^{q-1} \mid x \in G_k\}$ — имеет следующий вид:

$$h_x = \begin{cases} h_1, & \text{если } x_\downarrow \in H_0,\ x \in H_0, \\ h_2, & \text{если } x_\downarrow \in H_0,\ x \in H_1, \\ h_3, & \text{если } x_\downarrow \in H_1,\ x \in H_0, \\ h_4, & \text{если } x_\downarrow \in H_1,\ x \in H_1. \end{cases}$$

Здесь $h_i = (h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{iq-1})$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда в силу (5) имеем

$$\begin{cases} h_1 = (k - |A|)F(h_1, \theta) + |A|F(h_2, \theta), \\ h_2 = (|A| - 1)F(h_3, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_4, \theta), \\ h_3 = (|A| - 1)F(h_2, \theta) + (k + 1 - |A|)F(h_1, \theta), \\ h_4 = (k - |A|)F(h_4, \theta) + |A|F(h_3, \theta). \end{cases} \tag{6}$$

Введем следующие обозначения: $e^{h_{ij}} = z_{ij}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, \dots, q - 1$. Тогда последнюю систему уравнений можно переписать:

$$\begin{aligned} z_{1j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{1j} + \sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right)^{k-|A|} \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j} + \sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{|A|}, \\ z_{2j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{3j} + \sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{|A|-1} \left(\frac{(\theta - 1)z_{4j} + \sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z_{3j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{2j} + \sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{2i} + 1}{\sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{2i} + \theta} \right)^{|A|-1} \left(\frac{(\theta - 1)z_{1j} + \sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{1i} + 1}{\sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{1i} + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z_{4j} &= \left(\frac{(\theta - 1)z_{4j} + \sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{4i} + 1}{\sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{4i} + \theta} \right)^{k-|A|} \left(\frac{(\theta - 1)z_{3j} + \sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{3i} + 1}{\sum\limits_{i=1}^{q-1} z_{3i} + \theta} \right)^{|A|}, \end{aligned} \tag{7}$$

здесь $j = 1, 2, 3, \dots, q - 1$.

Обозначим

$$I = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{q-1}) \in R^{q-1} \mid z_1 = z_2 = \dots = z_{q-1}\}. \tag{8}$$

Пусть $\mathbf{z}_i = (z_{i1}, \dots, z_{iq-1}) \in I$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Обозначим $z_i = z_{i1} = \dots = z_{iq-1}$. Тогда система уравнений (7) сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{(\theta + q - 2)z_1 + 1}{(q - 1)z_1 + \theta} \right)^{k-|A|} \left(\frac{(\theta + q - 2)z_2 + 1}{(q - 1)z_2 + \theta} \right)^{|A|}, \\ z_2 &= \left(\frac{(\theta + q - 2)z_3 + 1}{(q - 1)z_3 + \theta} \right)^{|A|-1} \left(\frac{(\theta + q - 2)z_4 + 1}{(q - 1)z_4 + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z_3 &= \left(\frac{(\theta + q - 2)z_2 + 1}{(q - 1)z_2 + \theta} \right)^{|A|-1} \left(\frac{(\theta + q - 2)z_1 + 1}{(q - 1)z_1 + \theta} \right)^{k+1-|A|}, \\ z_4 &= \left(\frac{(\theta + q - 2)z_4 + 1}{(q - 1)z_4 + \theta} \right)^{k-|A|} \left(\frac{(\theta + q - 2)z_3 + 1}{(q - 1)z_3 + \theta} \right)^{|A|}. \end{aligned} \tag{9}$$

В [14] доказано, что для модели Потсса при $\theta > 1$ и $|A| > \frac{k}{2}$ все H_A-слабо периодические меры Гиббса трансляционно-инвариантные.

Для ферромагнитной модели Поттса рассмотрим случай $|A| = 1$. Введем обозначение

$$f(z) = \frac{(\theta + q - 2)z + 1}{(q-1)z + \theta}.$$

Тогда система уравнений (9) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} z_1 = (f(z_1))^{k-1} \cdot (f(z_2)), \\ z_2 = (f(z_4))^k, \\ z_3 = (f(z_1))^k, \\ z_4 = (f(z_4))^{k-1} \cdot (f(z_3)). \end{cases} \tag{10}$$

Утверждение 1. *Пусть* $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ *— решение системы уравнений* (10). *Если* $z_i = z_j$ *при* $i \neq j$, *где* $i, j = \overline{1,4}$, *то* $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

Доказательство. Функция $f(z)$ при $\theta > 1$ строго возрастающая, так как

$$f'(z) = \frac{(\theta - 1)(\theta + q - 1)}{((q-1)z + \theta)^2}.$$

Пусть $z_1 = z_2$, тогда из первого и второго уравнений (10) получим $(f(z_1))^k = (f(z_4))^k$. Поскольку функция $f(z)$ строго возрастающая, имеем $z_1 = z_4$. Из второго и третьего уравнений (10) вытекает, что $z_2 = z_3$. Следовательно, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

Предположим, что $z_1 = z_4$. Тогда из второго и третьего уравнений (10) получим $z_2 = z_3$, а из первого и второго уравнений (10) имеем следующие равенства:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{f(z_2)}{f(z_1)}.$$

Из строгого возрастания функции $f(z)$ последнее равенство выполняется только при $z_1 = z_2$. Следовательно, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$.

Остальные всевозможные случаи аналогично доказываются. Утверждение доказано.

Теорема 3. *Пусть* $|A| = 1$, $k \geq 6$ *и* $q \geq 3$. *Тогда для ферромагнитной модели Поттса существуют критические значения* θ_1, θ_2 *такие, что при* $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ *существуют не менее двух* H_A*-слабо периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса, где* $\theta_1 = \frac{4-3q+qk-q\sqrt{k^2-6k+1}}{4}$, $\theta_2 = \frac{4-3q+qk+q\sqrt{k^2-6k+1}}{4}$.

Доказательство. Из системы уравнений (10) легко получим следующую систему уравнений:

$$\frac{z_1}{(f(z_1))^{k-1}} = f((f(z_4))^k), \quad \frac{z_4}{(f(z_4))^{k-1}} = f((f(z_1))^k). \tag{11}$$

Область определения функции $f(z)$ есть $D_f = (0, +\infty)$, а множество значений E_f равно $\left(\frac{1}{\theta}, 1 + \frac{\theta-1}{q-1}\right)$. Для простоты введем обозначения $r = \frac{1}{\theta}$, $t = 1 + \frac{\theta-1}{q-1}$. Если (11) имеет решение, то

$$r < \frac{z_i}{(f(z_i))^{k-1}} < t, \tag{12}$$

где $i = 1, 4$. Введем обозначение $\varphi_1(z) = \frac{z}{(f(z))^{k-1}}$. Легко проверить, что функция $\varphi_1(z)$ непрерывна на D_f и $\varphi_1(1) = 1$. Тогда существуют r_1, t_1 такие, что $r_1 <$

$1, t_1 > 1$ и при $z_i \in (r_1, t_1)$, $i = 1, 4$, неравенство (12) выполняется. Тогда система уравнений (11) сводится к следующей:

$$\begin{cases} f^{-1}\left(\frac{z_1}{(f(z_1))^{k-1}}\right) = (f(z_4))^k, \\ f^{-1}\left(\frac{z_4}{(f(z_4))^{k-1}}\right) = (f(z_1))^k. \end{cases} \tag{13}$$

Учитывая, что $D_{f^{-1}} = (r, t), E_{f^{-1}} = (0, +\infty)$, систему уравнений можно переписать в виде

$$\begin{cases} \sqrt[k]{f^{-1}\left(\frac{z_1}{(f(z_1))^{k-1}}\right)} = f(z_4), \\ \sqrt[k]{f^{-1}\left(\frac{z_4}{(f(z_4))^{k-1}}\right)} = f(z_1). \end{cases} \tag{14}$$

Если система уравнений (14) имеет решение, то

$$r^k < f^{-1}\left(\frac{z_i}{(f(z_i))^{k-1}}\right) < t^k, \quad i = 1, 4. \tag{15}$$

Введем обозначение $\varphi_2(z) = f^{-1}\left(\frac{z}{(f(z))^{k-1}}\right)$. Легко проверить, что при $z \in (r_1, t_1)$ функция $\varphi_2(z)$ непрерывна и $\varphi_2(1) = 1$. Тогда существуют r_2, t_2 такие, что $r_2 < 1, t_2 > 1$ и при $z_i \in (r_2, t_2)$, $i = 1, 4$, выполняется неравенство (15). Введем обозначение $P = \max\{r_1, r_2\}$, $Q = \min\{t_1, t_2\}$. Ясно, что $P < 1$, $Q > 1$ и при $z_i \in (P, Q)$, $i = 1, 4$, выполняются неравенства (12) и (15). Тогда система уравнений (11) сводится к следующей системе уравнений:

$$z_1 = \psi(z_4), \quad z_4 = \psi(z_1), \tag{16}$$

где $\psi(z) = f^{-1}\left(\sqrt[k]{f^{-1}\left(\frac{z}{(f(z))^{k-1}}\right)}\right)$. Понятно, что система уравнений (16) имеет столько решений, сколько решений имеет уравнение $\psi(\psi(z)) = z$. Для изучения системы уравнений (16) воспользуемся следующей известной леммой.

Лемма 1. *Пусть $\gamma : [0, 1] \to [0, 1]$ — непрерывная функция с неподвижной точкой $\xi \in (0, 1)$. Предположим, что функция γ дифференцируема в точке $\xi \in (0, 1)$ и $\gamma'(\xi) < -1$. Тогда существуют x_0, x_1 такие, что $0 \le x_0 < \xi < x_1 \le 1$ и $\gamma(x_0) = x_1$, $\gamma(x_1) = x_0$ (см. [17, с. 70]).*

Легко видеть, что для функции $\psi(z)$ верны следующие утверждения:

1) $\psi(1) = 1$;

2) функция $\psi(z)$ определена на $[P_1; Q_1]$, где $P < P_1 < 1 < Q_1 < Q$;

3) $\psi(z)$ ограничена и дифференцируема в точке $\xi = 1$.

Тогда по лемме 1 при $\psi'(1) < -1$ система уравнений (16) имеет три решения вида $(1, 1)$, (x_0, x_1), (x_1, x_0), где $\psi(x_0) = x_1$, $\psi(x_1) = x_0$. Неравенство $\psi'(1) < -1$ эквивалентно следующему неравенству:

$$\frac{(\theta + q - 1)(2\theta + q - 2 - k\theta + k)}{(\theta - 1)^2 k} < -1,$$

из которого получим

$$(\theta - \theta_1)(\theta - \theta_2) < 0,$$

где $\theta_{1,2} = \frac{4-3q+qk\pm q\sqrt{k^2-6k+1}}{4}$. Из утверждения 1 вытекает, что при $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ система уравнений (10) имеет не менее двух решений вида $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, где $z_i \ne z_j$, $i \ne j$, $i, j = \overline{1, 4}$, т. е. существуют не менее двух H_A-слабо периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса. Теорема доказана.

Итак, для ферромагнитной модели Поттса с q-состояниями существуют H_A-слабо периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса, в то время как периодические меры Гиббса для этой модели с тремя состояниями не существуют (см. [10]).

Замечание 2. Заметим, что полученные в теореме 3 H_A-слабо периодические меры новые и они дают возможность описать континуум множества не трансляционно-инвариантных гиббсовских мер, отличных от ранее известных.

Благодарность. Автор выражает глубокую признательность профессору У. А. Розикову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Георги Х. О.* Гиббсовские меры и фазовые переходы. М.: Мир, 1992.
2. *Preston C. J.* Gibbs states on countable sets. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1974. (Cambridge Tracts Math.; V. 68).
3. *Синай Я. Г.* Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М.: Наука, 1980.
4. *Rozikov U. A.* Gibbs measures on Cayley trees. Singapore: World Sci., 2013.
5. *Ганиходжаев Н. Н.* О чистых фазах ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями на решетке Бете второго порядка // Теор. и мат. физика. 1990. Т. 85, № 2. С. 163–175.
6. *Ганиходжаев Н. Н.* О чистых фазах ферромагнитной модели Поттса на решетке Бете // Докл. АН РУз. 1992. Т. 6–7. С. 4–7.
7. *Ганиходжаев Н. Н., Розиков У. А.* Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. 1997. Т. 111, № 1. С. 109–117.
8. *Ganikhodjaev N. N., Rozikov U. A.* The Potts model with countable set of spin values on a Cayley tree // Lett. Math. Phys. 2006. V. 75, N 2. P. 99–109.
9. *Külske C., Rozikov U. A., Khakimov R. M.* Description of translation-invariant splitting Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree // J. Stat. Phys. 2014. V. 156, N 1. P. 189–200.
10. *Розиков У. А., Хакимов Р. М.* Периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. 2013. Т. 175, № 2. С. 699–709.
11. *Khakimov R. M.* New periodic Gibbs measures for q-state Potts model on a Cayley tree // J. Sib. Fed. Unv. Math. Phys. 2014. V. 7, N 3. P. 297–304.
12. *Розиков У. А., Рахматуллаев М. М.* Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. 2009. Т. 160, № 3. С. 507–516.
13. *Рахматуллаев М. М.* Слабо периодические меры Гиббса и основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. 2013. Т. 176, № 3. С. 477–493.
14. *Рахматуллаев М. М.* Существование слабо периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли // Теор. и мат. физика. 2014. Т. 180, № 3. С. 1018–1028.
15. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
16. *Ганиходжаев Н. Н.* Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли // Докл. АН РУз. 1994. Т. 4. С. 3–5.
17. *Kesten H.* Quadratic transformations: a model for population growth. I // Adv. Appl. Probab. 1970. V. 2. P. 1–82.

Статья поступила 17 ноября 2014 г.

Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович
Институт математики при Национальном университете Узбекистана,
ул. Дурмон йули, 29, Ташкент 100125, Узбекистан
mrahmatullaev@rambler.ru