Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 517.951

О ДЕЛЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ МЕДЛЕННОГО РОСТА, ГОЛОМОРФНО ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПАРАМЕТРА, НА МНОГОЧЛЕН

А. Л. Павлов

Аннотация. Приведены достаточные условия, обеспечивающие построение решения уравнения $\sum\limits_{k=0}^{m} P_k(\sigma)\lambda^k u(\lambda) = f(\lambda)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in G \subset \mathbb{C}$, где многочлен $P_m(\sigma)$ имеет вещественные нули, $f(\lambda)$, $u(\lambda)$ — обобщенные функции медленного роста, голоморфно зависящие от λ.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.512

Ключевые слова: обобщенная функция медленного роста, регуляризация обобщенной функции, корректный по Петровскому многочлен.

1. Введение

Ряд задач теории линейных дифференциальных уравнений в частных производных приводит к поиску решения уравнения вида

$$P(\sigma,\lambda)u(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{m} P_k(\sigma)\lambda^k u(\lambda) = f(\lambda), \tag{1.1}$$

где $P_k(\sigma)$ — многочлены, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $k = 0,\dots,m$, $f(\lambda)$, $u(\lambda)$ — обобщенные функции медленного роста, голоморфно зависящие от $\lambda \in \Pi_\gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \gamma\}$. Такие уравнения естественно возникают при использовании преобразования Фурье — Лапласа в изучении задачи Коши для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной по выделенной переменной.

Проблема разрешимости уравнения (1.1) без параметра λ хорошо известна как проблема деления (см. краткий обзор в [1]). Она решена для пространства медленно растущих обобщенных функций S' в [2–4]. Однако это решение не позволяет проследить связи гладкости и поведения на бесконечности правой части уравнения и его решения.

В настоящей работе уравнение (1.1) рассматривается для корректных по Петровскому многочленов $P(\sigma,\lambda)$, т. е. многочленов, удовлетворяющих следующему условию:

$$(P) \quad \exists\gamma \in \mathbb{R} : P(\sigma,\lambda(\sigma)) = 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n \ \Rightarrow\ \operatorname{Re}\lambda(\sigma) < \gamma.$$

Примерами таких многочленов являются символы некоторых уравнений соболевского типа. Например, многочлен $\bigl(-(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)+2\beta\sigma_3 i\bigr)\lambda^2-\omega_0^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$ соответствует уравнению динамики стратифицированной жидкости.

Обозначим через $\mathscr{H}(\Pi_\gamma, E')$ множество голоморфных функций со значениями в пространстве обобщенных функций E', определенных в полуплоскости Π_γ:

$$\mathscr{H}(\Pi_\gamma, E') = \{f(\lambda) \in E',\ \lambda \in \Pi_\gamma : \forall \varphi \in E\ (f(\lambda), \varphi) \in \mathscr{H}(\Pi_\gamma)\},$$

где $\mathscr{H}(\Pi_\gamma)$ — пространство функций, голоморфных в полуплоскости Π_γ. В качестве E' будут использоваться пространство S' и его подпространства H_l^s, которые можно рассматривать как пополнения пространства S по норме

$$\|\varphi\|_l^s = \left[\int (1+|y|^2)^s |\mathscr{F}((1+|\sigma|^2)^{l/2}\varphi)|^2\, d\sigma\right]^{1/2},$$

где $\mathscr{F}\psi$ — преобразование Фурье функции $\psi \in S$. Двупараметрическое семейство гильбертовых пространств H_l^s обладает многими замечательными свойствами, которые рассмотрены в [5].

Семейство пространств H_l^s тесно связано с двупараметрическим семейством пространств C_l^s, где $s \in \mathbb{Z}_+$, l — произвольное число, состоящим из s раз непрерывно дифференцируемых функций с конечной нормой

$$|\varphi|_l^s = \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^n,\, |\alpha| \le s} [(1+|\sigma|^2)^{l/2} |\partial^\alpha \varphi(\sigma)|].$$

Пространства C_l^s банаховы. Для любых $s \in \mathbb{Z}_+$ и $l \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства [5]

$$\|\varphi\|_{l-p}^s < c_1 |\varphi|_l^s < c_2 \|\varphi\|_l^{s+q}, \quad p > \frac{n}{2},\ q > \frac{n}{2}. \tag{1.2}$$

Главная трудность в решении уравнения (1.1) связана с тем, что многочлен $P_m(\sigma)$ может иметь вещественные нули. Будем предполагать выполненным следующее условие.

(D) Множество общих вещественных нулей N многочленов $P_i(\sigma)$, $i = 0, \dots, m$, конечно.

Целью работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Если выполнены условия* (P) *и* (D), *то для любой обобщенной функции* $f(\lambda) \in \mathscr{H}\left(\Pi_\gamma, H_l^s\right)$ *можно построить обобщенную функцию* $u(\lambda)$, *принадлежащую пространству* $\mathscr{H}\left(\Pi_{\gamma_0}, H_{\tilde{l}}^{\tilde{s}}\right)$, *где* γ_0, $\tilde{s}$, $\tilde{l}$ — *некоторые числа, которая удовлетворяет уравнению* (1.1) *в области* Π_{γ_0}, *и справедливо неравенство*

$$\|u(\lambda)\|_{\tilde{l}}^{\tilde{s}} \le c(1+|\lambda|)^\nu \|f(\lambda)\|_l^s, \tag{1.3}$$

где $c > 0$, ν — *некоторые числа, не зависящие от* $f(\lambda)$.

Доказательство теоремы состоит в построении регуляризации обобщенной функции $P^{-1}(\sigma, \lambda) f(\lambda) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \setminus N)$, голоморфно зависящей от параметра, а затем в нахождении такой обобщенной функции, сосредоточенной на множестве общих вещественных нулей многочленов $P_i(\sigma)$, $i = 0, \dots, m$, и голоморфно зависящей от параметра, что сумма построенной регуляризации и этой обобщенной функции является решением уравнения (1.1), голоморфно зависящим от параметра.

Используемые в доказательстве построения позволяют отслеживать зависимость параметров $\tilde{s}$, $\tilde{l}$ от s, l и параметров, входящих в оценку функции $P^{-1}(\sigma, \lambda)$ и ее производных по σ и λ.

Приведенный результат будет использован для построения решения задачи Коши для широкого класса уравнений соболевского типа в классах обобщенных функций медленного роста.

2. Построение регуляризации

Построение решения уравнения (1.1) предполагает продолжение обобщенной функции $P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n \setminus N)$ на все пространство при каждом $\lambda \in \Pi_\gamma$. Построим одно из продолжений, голоморфно зависящее от $\lambda \in \Pi_\gamma$. Возможность такого построения основана на следующем утверждении.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия* (P) *и* (D). *Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{1}{|P(\sigma,\lambda)|} \le \mathrm{c}(1+|\sigma|)^{\mu}(1+|\lambda|)^{\nu}[d(\sigma,N)]^{\varkappa}, \quad (\sigma,\lambda) \in (\mathbb{R}^n \setminus N)\times\Pi_\gamma, \tag{2.1}$$

где $c>0$, μ, ν, $\varkappa<0$ — некоторые числа, $d(\sigma,N)$ — расстояние от точки σ до множества N.

Доказательство. Из условия леммы следует, что

$$P(\sigma,\lambda)\neq 0,\ (\sigma,\lambda)\in(\mathbb{R}^n\setminus N)\times\overline{\Pi}_\gamma, \quad \text{и} \quad P(\sigma,\lambda)=0,\ (\sigma,\lambda)\in N\times\Pi_\gamma,$$

где $\overline{\Pi}_\gamma$ — замыкание полуплоскости Π_γ.

Рассмотрим многочлен $P(\sigma,\lambda)$ как многочлен от $n+2$ вещественных переменных $\sigma\in\mathbb{R}^n$, $\xi=\operatorname{Re}\lambda$, $\eta=\operatorname{Im}\lambda$. При $\xi\ge\gamma$ многочлен $P(\sigma,\xi,\eta)$ от переменных $(\sigma,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1}$ обращается в нуль на множестве $N\times\mathbb{R}$. Следовательно, многочлен $\widetilde{P}(\sigma,\theta,\eta)=P(\sigma,\theta^2+\gamma,\eta)$ обращается в нуль на множестве $N\times\mathbb{R}^2$.

Воспользовавшись известными оценками модуля многочлена от вещественных переменных (см. [6, дополнение, теорема А3]), получим неравенство

$$\frac{1}{|\widetilde{P}(\sigma,\theta,\eta)|} \le c_1\bigl(1+\sqrt{|\sigma|^2+\theta^2+\eta^2}\bigr)^{\mu}[d((\sigma;\theta;\eta),N\times\mathbb{R}^2)]^{\varkappa},$$

где $(\sigma;\theta;\eta)\in(\mathbb{R}^n\setminus N)\times\mathbb{R}^2$, $c_1>0$, μ, $\varkappa<0$ — некоторые числа.

Так как $d((\sigma;\theta;\eta),N\times\mathbb{R}^2)=d(\sigma,N)$ и при замене $\theta^2=\xi-\gamma$, $\xi\ge\gamma$, многочлен $\widetilde{P}(\sigma;\theta;\eta)$ превращается в многочлен $P(\sigma,\xi,\eta)$, из полученного неравенства следует, что

$$\frac{1}{|P(\sigma,\xi,\eta)|} \le \mathrm{c}_1\bigl(1+\sqrt{|\sigma|^2+\xi-\gamma+\eta^2}\bigr)^{\mu}\,[d(\sigma,N)]^{\varkappa}, \quad \xi\ge\gamma,\ (\sigma;\eta)\in(\mathbb{R}^n\setminus N)\times\mathbb{R}.$$

Поскольку при $\xi\ge\gamma$ справедливы неравенства

$$1+\sqrt{|\sigma|^2+\xi-\gamma+\eta^2} \le (1+|\sigma|)(1+\sqrt{\xi-\gamma})(1+|\eta|) \le c_2(1+|\sigma|)(1+|\xi|)(1+|\eta|),$$

где $c_2>0$ зависит от γ, при $\mu\ge0$ имеем

$$\bigl(1+\sqrt{|\sigma|^2+\xi-\gamma+\eta^2}\bigr)^{\mu} \le c_2^{\mu}(1+|\sigma|)^{\mu}(1+|\xi|)^{\mu}(1+|\eta|)^{\mu} \le c_2^{\mu}(1+|\sigma|)^{\mu}(1+|\lambda|)^{2\mu}.$$

В левой части этого неравенства при $\mu<0$ оценим снизу основание степени. Так как при $\xi\ge\gamma$ верны неравенства

$$\sqrt{|\sigma|^2+\xi-\gamma+\eta^2}\ge|\sigma|, \quad \sqrt{|\sigma|^2+\xi-\gamma+\eta^2}\ge\sqrt{\xi-\gamma},$$
$$\sqrt{|\sigma|^2+\xi-\gamma+\eta^2}\ge|\eta|,$$

имеет место оценка

$$1+\sqrt{|\sigma|^2+\xi-\gamma+\eta^2} \ge (1+|\sigma|^{1/3})(1+\sqrt{\xi-\gamma})^{1/3}(1+|\eta|)^{1/3}, \quad \xi\ge\gamma.$$

Воспользовавшись неравенствами

$$(1+|\xi|)(1+|\eta|) \geq 1+\sqrt{\xi^2+\eta^2}, \quad (1+\sqrt{\xi-\gamma})^2 \geq \frac{1}{1+|\gamma|}(1+|\xi|), \quad \xi \geq \gamma,$$

получим оценку снизу для рассматриваемого основания степени:

$$\begin{aligned} 1+\sqrt{|\sigma|^2+\xi-\gamma+\eta^2} &\geq c_3(1+|\sigma|)^{1/3}(1+|\xi|)^{1/6}(1+|\eta|)^{1/3} \\ &\geq c_3(1+|\sigma|)^{1/3}(1+|\lambda|)^{1/6}. \end{aligned}$$

Если $\mu < 0$, то отсюда следует неравенство

$$(1+\sqrt{|\sigma|^2+\xi-\gamma+\eta^2})^{\mu} \leq c_3^{\mu}(1+|\sigma|)^{\mu/3}(1+|\lambda|)^{\mu/6}, \quad \xi \geq \gamma.$$

Значит, справедливо (2.1).

Пользуясь неравенством (2.1), нетрудно показать, что для любых мультииндексов $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$ верны неравенства

$$\left|\partial_\lambda^k \partial_\sigma^\beta \frac{1}{P(\sigma,\lambda)}\right| \leq c_{\beta k}(1+|\sigma|)^{\mu_{\beta k}}(1+|\lambda|)^{\nu_{\beta k}}[d(\sigma,N)]^{\varkappa_{\beta k}}, \quad (\sigma,\lambda) \in (\mathbb{R}^n \setminus N) \times \Pi_\gamma, \tag{2.2}$$

где $c_{\beta k} \geq 0$, $\nu_{\beta k}$, $\mu_{\beta k}$, $\varkappa_{\beta k}$ — некоторые числа, зависящие от многочлена $P(\sigma,\lambda)$ и выбора γ.

Для произвольной функции $f \in H_l^s$ построим регуляризацию обобщенной функции $P^{-1}(\sigma,\lambda)f$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, методом вычитания. Для этого выберем такие ограниченные окрестности U_i точек $\sigma_i \in N$, $i = 1, \dots, p$, что $U_i \cap U_j = \varnothing$ для любых $i \neq j$, а открытое множество U_0 — так, что выполняются соотношения

$$U_0 \cap N = \varnothing, \quad \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{p} U_j \subset U_0.$$

Построим разбиение единицы $\{\mu_i(\sigma),\ \mathscr{U}_i,\ i = 0,\dots,p\}$, подчиненное выбранному покрытию $\mathbb{R}^n$, так, что $\mu_i(\sigma) = 1$, $i > 0$, в некоторой окрестности точки σ_i.

Рассмотрим функции

$$\mu_i\varphi_{q_i} = \mu_i(\sigma)\left(\varphi(\sigma) - \sum_{|\alpha|\leq q_i-1} \varphi^{\alpha}(\sigma_i)\frac{(\sigma-\sigma_i)^\alpha}{\alpha!}\right), \quad i = 1,\dots,p,\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

По построению $\partial^\alpha(\mu_i\varphi_{q_i})(\sigma_i) = 0$, $|\alpha| \leq q_i - 1$. Следовательно, функция $\varphi_{\bar q} = \mu_0\varphi + \sum_{i=1}^{p} \mu_i\varphi_{q_i}$, где $\bar q = (q_1,\dots,q_p)$, обращается в нуль вместе с производными до заданного порядка в точках, в которых многочлен $P(\sigma,\lambda)$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, равен нулю, причем в разных точках этот порядок разный.

Лемма 2.2. *Если выполнены условия* (P) *и* (D), *то для любой функции* $f(\lambda) \in H_l^s$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, *существует регуляризация* $[P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar q}$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, *обобщенной функции* $P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)$, *принадлежащая пространству* $H_{l'}^{s'}$ *при каждом* $\lambda \in \Pi_\gamma$, *где* s', l' — *некоторые числа, зависящие от* s, l, *многочлена* $P(\sigma,\lambda)$, *и справедливо неравенство*

$$\|[P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar q}\|_{l'}^{s'} \leq c(1+|\lambda|)^{\nu}\|f(\lambda)\|_l^s, \tag{2.3}$$

$c > 0$, ν — *некоторые числа, не зависящие от* $f(\lambda)$.

Доказательство. Искомая регуляризация определяется равенством

$$([P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar q},\varphi) = (f(\lambda), P^{-1}(\sigma,\lambda)\varphi_{\bar q}), \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Параметры q_i, $i = 1,\dots,p$, выбираются так, чтобы «погасить» нули $P(\sigma,\lambda)$. Для уточнения этого выбора воспользуемся конструкцией функции $\varphi_{\bar q}$:

$$([P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar q},\varphi) = (P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu_0 f(\lambda),\varphi) + \sum_{i=1}^{p}(f(\lambda), P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu_i\varphi_{q_i}). \tag{2.4}$$

Так как $\operatorname{supp}\mu_0 \cap N = \varnothing$, из (2.2) следует, что $P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu_0(\sigma)$ при каждом $\lambda \in \Pi_\gamma$ является мультипликатором в пространстве S', отображающим непрерывно пространство H_l^s в $H_{l'}^s$, где l' зависит от s и параметров μ_{β_0} в неравенстве (2.2). Пользуясь (2.2) и свойствами мультипликаторов в S', получим

$$|(P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu_0 f(\lambda),\varphi)| \le \|P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu_0 f(\lambda)\|_{l'}^s\|\varphi\|_{-l'}^{-s}$$
$$\le c_1(1+|\lambda|)^{\nu_s}\|f(\lambda)\|_l^s\|\varphi\|_{-l'}^{-s}, \tag{2.5}$$

где $c_1 > 0$, $\nu_s = \max\limits_{|\beta|\le[|s|]+1}\nu_{\beta_0}$.

Получение такого вида неравенств для остальных слагаемых в (2.4) составляет основное содержание доказательства леммы. Так как оценивание для этих слагаемых проводится одинаково, проведем его для одного корня σ_i многочлена $P(\sigma,\lambda)$, считая для удобства, что $\sigma_i = 0$.

Пусть $P(0,\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in \Pi_\gamma$, $\mu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mu(\sigma) = 1$ в некоторой окрестности точки $\sigma = 0$, $P(\sigma,\lambda) \ne 0$ для $\sigma \in \operatorname{supp}\mu \setminus \{0\}$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, $\varphi_q = \varphi(\sigma) - \sum\limits_{|\alpha|\le q-1}\varphi^\alpha(0)\frac{\sigma^\alpha}{\alpha!}$. Для указанного оценивания воспользуемся равенством

$$\mu(\sigma)\partial^\alpha\varphi_q(\sigma) = \mu(\sigma)\partial^\alpha R_q^\varphi(\sigma),$$

где $R_q^\varphi(\sigma)$ — остаточный член в формуле Тейлора. Используя его в интегральной форме, получим

$$\mu(\sigma)\partial^\alpha R_q^\varphi(\sigma) = \mu(\sigma)\int_0^1 \frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!}\sum_{|\beta|=q}\sum_{\rho\le\alpha}\varphi^{\beta+\rho}(t\sigma)P_{\beta\rho}(\sigma,t)\,dt,$$

где $P_{\beta\rho}(\sigma,t)$ — многочлены, слагаемые которых по σ имеют степень не ниже $q-|\alpha|$, а по t — не выше $|\alpha|$.

Предполагая, что $t\operatorname{supp}\mu \subset \operatorname{supp}\mu$, $0 \le t \le 1$, для любого $k \in \mathbb{R}$ и любого мультииндекса α при достаточно большом q имеем

$$|\sigma|^{-k}\big|\mu(\sigma)\partial^\alpha R_q^\varphi(\sigma)\big| \le c_\alpha \sup_{\sigma\in\operatorname{supp}\mu}\Big[\sum_{|\beta|=q}\sum_{\rho\le\alpha}|\varphi^{\rho+\beta}(\sigma)|\Big]\sup_{\sigma\in\operatorname{supp}\mu}|\sigma|^{q-|\alpha|-k}.$$

Для таких значений q справедливо неравенство

$$|\sigma|^{-k}|\mu(\sigma)\partial^\alpha\varphi_q(\sigma)| \le \tilde c_\alpha \sup_{\sigma\in\operatorname{supp}\mu,\,|\gamma|\le q+|\alpha|}|\varphi^\gamma(\sigma)|. \tag{2.6}$$

Воспользовавшись формулой Лейбница и неравенствами (2.2), получим

$$\sup_{\sigma\in\mathbb{R}^n}\big|\partial_\sigma^\beta(P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu(\sigma)\varphi_q(\sigma))\big|$$
$$\le \hat c_\beta\sup_{\sigma\in\mathbb{R}^n}\sum_{\gamma\le\beta}(1+|\lambda|)^{\gamma_{\beta-\gamma}}(1+|\sigma|)^{\mu_{\beta-\gamma}}|\sigma|^{\varkappa_{\beta-\gamma}}|\partial^\gamma(\mu(\sigma)\varphi_q(\sigma))|.$$

Если еще раз воспользоваться формулой Лейбница, неравенством (2.6) и тем, что множество $\{\sup\limits_{\sigma\in\operatorname{supp}\mu}|\partial^\gamma\mu(\sigma)|,\ \gamma\le\beta\}$ ограничено и $|\partial^\gamma\mu(\sigma)|=0$ в некоторой окрестности точки $\sigma=0$, то из полученного неравенства следует оценка

$$\sup_{\sigma\in\mathbb{R}^n}|\partial^\beta P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu(\sigma)\varphi_q(\sigma)|\le c''_\beta(1+|\lambda|)^{\bar\nu_\beta}\sup_{\sigma\in\operatorname{supp}\mu,\,|\gamma|\le s_\beta}|\varphi^\gamma(\sigma)|, \tag{2.7}$$

где s_β — число, зависящее от β и показателей $\varkappa_{\beta_0}$ в (2.2), $\bar\nu_\beta=\max\limits_{\alpha\le\beta}\nu_\alpha$.

Из (2.7) следует справедливость неравенства

$$|P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu\varphi_q|_l^s\le c(1+|\lambda|)^{\nu_s}|\varphi|_l^{s''}, \tag{2.8}$$

где $s\in\mathbb{Z}_+$, $l\in\mathbb{R}$ — произвольно выбранные числа, s'', ν_s — некоторые числа, зависящие от s и q.

Пусть $f(\lambda)\in H_l^s$, $\lambda\in\Pi_\gamma$. Будем предполагать, что $s\le 0$ целое. В противном случае будем рассматривать $f(\lambda)$ как элемент более широкого пространства, удовлетворяющего этому условию. Воспользовавшись неравенствами (1.2), (2.8), получим

$$\begin{aligned}|(f(\lambda),P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu\varphi_q)|&\le\|f(\lambda)\|_l^s\|P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu\varphi_q\|_{-l}^{-s}\\&\le c_1\|f(\lambda)\|_l^s|P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu\varphi_q|_{-l'}^{-s}\le c_2\|f(\lambda)\|_l^s(1+|\lambda|)^{\nu_s}\|\varphi\|_{-l'}^{-s'},\end{aligned} \tag{2.9}$$

где $l'<l-\frac{n}{2}$, $s'<s''-\frac{n}{2}$. Из этих неравенств следует, что корректно определена обобщенная функция $[P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu f(\lambda)]_q$, принадлежащая пространству $H_{l'}^{s'}$ при всех $\lambda\in\Pi_\gamma$, и для нее справедливо неравенство вида (2.3).

Рассмотрев с помощью указанного приема все точки $\sigma_i\in\mathbb{N}$ и объединив полученные результаты, получим неравенство (2.3). Лемма доказана. □

Исследуем зависимость построенной регуляризации от параметра λ.

Лемма 2.3. *Если выполнены условия* (P) *и* (D), *то для любой функции* $f(\lambda)\in\mathscr{H}(\Pi_\gamma,H_l^s)$ *существует регуляризация* $[P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar q}$ *обобщенной функции* $P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n\backslash N)$, *принадлежащая пространству* $\mathscr{H}(\Pi_\gamma,H_{l'}^{s'})$, *где* s', l' *— некоторые числа, не зависящие от* $f(\lambda)$.

Доказательство. Из леммы 2.2 следует, что при каждом $\lambda\in\Pi_\gamma$ указанная регуляризация существует и принадлежит пространству $H_{l'}^{s'}$. Для доказательства ее голоморфности по λ рассмотрим для произвольной функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ функцию

$$F_\varphi(\lambda)=(f(\lambda),P^{-1}(\sigma,\lambda)\varphi_{\bar q})=(P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu_0f(\lambda),\varphi)+\sum_{i=1}^p(f(\lambda),P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu_i\varphi_{q_i}).$$

Как и в доказательстве леммы 2.2, достаточно рассмотреть одну из функций $(f(\lambda),P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu_iq_i)$, $i=1,\dots,p$.

Пусть $P(0,\lambda)=0$ для всех $\lambda\in\Pi_\gamma$, $\mu\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mu(\sigma)=1$ в некоторой окрестности точки $\sigma=0$, $P(\sigma,\lambda)\ne0$ для $\sigma\in\operatorname{supp}\mu\setminus\{0\}$, $\varphi_q=\varphi(\sigma)-\sum\limits_{|\alpha|\le q-1}\varphi^\alpha(0)\frac{\sigma^\alpha}{\alpha!}$.

Докажем голоморфность функции $(f(\lambda),P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu\varphi_q)$ при значениях q, указанных в лемме 2.2.

В некотором замкнутом круге $V_r(\lambda_0)$, $r \leq 1$, с центром в произвольной точке $\lambda_0 \in \Pi_\gamma$ функцию $f(\lambda) \in \mathscr{H}\big(\Pi_\gamma, H_l^s\big)$ можно представить в виде степенного ряда

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^k, \quad \lambda \in V_r(\lambda_0).$$

При этом $f_k(\lambda_0) \in H_l^s$, $k = 0, 1, \dots$, и справедливы неравенства

$$\|f_k(\lambda_0)\|_l^s \leq \frac{M}{r^k}, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{2.10}$$

где $M = \max\limits_{\lambda \in V_r(\lambda_0)} \|f(\lambda)\|_l^s$. Аналогичное представление в некотором круге, который можно считать совпадающим с $V_r(\lambda_0)$, имеет голоморфная в области Π_γ функция $P^{-1}(\sigma, \lambda)$, гладко зависящая от вещественного параметра $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$:

$$P^{-1}(\sigma, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\sigma, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^k, \quad \lambda \in V_r(\lambda_0).$$

Из интегрального представления для функции $b_k(\sigma, \lambda_0)$:

$$b_k(\sigma, \lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = r} \frac{d\lambda}{P(\sigma, \lambda)(\lambda - \lambda_0)^{k+1}},$$

следует, что $b_k(\sigma, \lambda_0) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus N)$. Пользуясь этим представлением и неравенствами (2.2), получим оценки для производных по σ функций $b_k(\sigma, \lambda_0)$:

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha b_k(\sigma, \lambda_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = r} |\partial^\alpha P^{-1}(\sigma, \lambda)| \frac{d\lambda}{r^{k+1}} \\
&\leq c_\alpha (1 + |\sigma|)^{\mu_\alpha} [d(\sigma, N)]^{\varkappa_\alpha} \frac{1}{r^{k+1}} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = r} (1 + |\lambda|)^{\nu_\alpha} \, d\lambda \\
&\leq c'_\alpha (1 + |\sigma|)^{\mu_\alpha} [d(\sigma, N)]^{\varkappa_\alpha} (1 + |\lambda_0|)^{\nu_\alpha} \frac{1}{r^k}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Применяя формулу Лейбница и неравенства (2.11), имеем

$$|\partial^\alpha(\mu(\sigma) b_k(\sigma, \lambda_0))| \leq \tilde{c}_\alpha \sum_{\gamma \leq \alpha} |\mu^{\alpha - \gamma}(\sigma)| |\partial^\gamma b_k(\sigma, \lambda_0)| \leq M_\alpha (1 + |\lambda_0|)^{\bar{\nu}_\alpha} \frac{|\sigma|^{\bar{\varkappa}_\alpha}}{r^k}, \tag{2.12}$$

где $\bar{\nu}_\alpha = \max\limits_{\gamma \leq \alpha} \nu_\gamma$, $\bar{\varkappa}_\alpha = \min\limits_{\gamma \leq \alpha} \varkappa_\gamma$, M_α — некоторые числа, не зависящие от λ_0. Важным обстоятельством является независимость от k порядков особенностей функций $\partial^\alpha b_k(\sigma, \lambda_0)$ в точке $\sigma = 0$. Это обеспечивает принадлежность функций $\mu b_k(\sigma, \lambda_0) \varphi_q$ пространству H_{-l}^{-s} при достаточно большом q, не зависящем от k.

Из (2.10), (2.12) и доказательства леммы 2.2 следует справедливость неравенств

$$\begin{aligned}
|(f_i(\lambda_0), \mu b_j(\sigma, \lambda_0) \varphi_q(\sigma))| &\leq \|f_i(\lambda_0)\|_l^s \|\mu b_j(\sigma, \lambda_0) \varphi_q(\sigma)\|_{-l}^{-s} \\
&\leq \max_{\lambda \in V_r(\lambda_0)} \|f(\lambda)\|_l^s (1 + |\lambda_0|)^\nu \frac{M'}{r^{i+j}} \|\varphi\|_{-l'}^{-s'},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где M', ν, s' — некоторые числа, не зависящие от i, j.

Из (2.13) вытекает справедливость оценок

$$\Big| \sum_{i+j=k} (f_i(\lambda_0), \mu b_j(\sigma,\lambda_0)\varphi_q(\sigma)) \Big| \le \frac{\widetilde{M}}{r_1^k}(1+|\lambda_0|)^\nu \max_{\lambda\in V_r(\lambda_0)} \|f(\lambda)\|_l^s \|\varphi\|_{-l}^{-s'}, \tag{2.14}$$

где $r_1 < r$ — произвольное число, $\widetilde{M}$ — константа, зависящая от r_1. Следовательно, внутри круга $V_{r_1}(\lambda_0)$ сходится степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} (f_i(\lambda_0), \mu b_j(\sigma,\lambda_0)\varphi_q(\sigma))(\lambda-\lambda_0)^k. \tag{2.15}$$

Сумма этого ряда равна функции $(f(\lambda), P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu\varphi_q)$.

Аналогично рассматривается слагаемое $(P^{-1}(\sigma,\lambda)\mu_0 f(\lambda),\varphi)$ в формуле для функции $F_\varphi(\lambda)$. Главным его отличием является отсутствие особенностей у функции $\mu_0(\sigma)P^{-1}(\sigma,\lambda)$. При этом необходимо учесть неограниченность множества $\operatorname{supp}\mu_0$. Пользуясь (2.11), получим неравенства

$$|\partial^\alpha \mu_0(\sigma) b_k(\sigma,\lambda_0)| \le \hat{c}_\alpha \sum_{\gamma\le\alpha} |\partial^{\alpha-\gamma}\mu_0(\sigma)||\partial^\gamma b_k(\sigma,\lambda_0)| \le c'_\alpha (1+|\lambda_0|)^{\nu_\alpha}(1+|\sigma|)^{\bar{\mu}_\alpha}\frac{1}{r^k}.$$

Стало быть, для коэффициентов ряда, аналогичного ряду (2.15), справедливы оценки вида (2.14):

$$\Big| \sum_{i+j=k} (f_i(\lambda_0), \mu_0 b_j(\sigma,\lambda_0)\varphi_q(\sigma)) \Big| \le \frac{\widehat{M}}{r_1^k}(1+|\lambda_0|)^\nu \max_{\lambda\in V_r(\lambda_0)} \|f(\lambda)\|_l^s \|\varphi\|_{-l'}^{-s},$$

где l' — некоторое число, зависящее от s, $\widehat{M}$ — константа, не зависящая от k.

Приведенные результаты означают, что функция $([P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar{q}},\varphi)$ голоморфна в некоторой окрестности точки λ_0 для любой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Из неравенства (2.9) следует, что функция $([P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar{q}}$ голоморфна в окрестности произвольной точки $\lambda_0\in\Pi_\gamma$ как функция со значениями в пространстве $H_{l'}^{s'}$, т. е. $[P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar{q}} \in \mathscr{H}\big(\Pi_\gamma, H_{l'}^{s'}\big)$.

3. Построение решения уравнения (1.1)

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$u(\lambda) = [P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar{q}} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{|\alpha|\le r_i} u_\alpha^i(\lambda, f(\lambda))\delta_{\sigma_i}^\alpha, \tag{3.1}$$

где первое слагаемое — голоморфная регуляризация обобщенной функции $P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n\setminus N)$, построенная в лемме 2.2, $u_\alpha^i(\lambda,f(\lambda))$ — неизвестные голоморфные функции, зависящие от $f(\lambda)$, δ_{σ_i} — дельта-функция, сосредоточенная в точке σ_i.

Обобщенная функция $[P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar{q}}$ является решением уравнения (1.1) в области $\mathbb{R}^n\backslash N$, так как для произвольной функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\backslash N)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&(P(\sigma,\lambda)[P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar{q}} - f(\lambda),\varphi) \\
&\qquad = (f(\lambda), P^{-1}(\sigma,\lambda)(P(\sigma,\lambda)\varphi)_{\bar{q}}) - (f(\lambda),\varphi)) \\
&\qquad = \left(f(\lambda), \frac{\mu_0 P(\sigma,\lambda)\varphi}{P(\sigma,\lambda)} + \sum_{i=1}^{p}\mu_i\frac{(P(\sigma,\lambda)\varphi)_{q_i}}{P(\sigma,\lambda)}\right) - (f(\lambda),\varphi) \\
&\qquad = \left(f(\lambda), \left(\sum_{i=0}^{p}\mu_i\right)\varphi\right) - (f(\lambda),\varphi) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь использованы соотношение $\operatorname{supp}\varphi\cap N=\varnothing$ и свойство разбиения единицы. Следовательно,

$$\operatorname{supp}\omega(\lambda,f(\lambda))\subset N,\quad \text{где } \omega(\lambda,f(\lambda))=P(\sigma,\lambda)[P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar q}-f(\lambda).$$

На основании описания обобщенных функций, сосредоточенных в точке, имеем равенство

$$\omega(\lambda,f(\lambda))=\sum_{i=1}^{p}\sum_{|\alpha|\le q_i}h_\alpha^i(\lambda,f(\lambda))\delta_{\sigma_i}^\alpha.$$

Существуют такие функции $\varphi_\alpha^i\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i=1,\dots,p$, $|\alpha|\le q_i$, что имеют место равенства

$$h_\alpha^i(\lambda,f(\lambda))=\big(\omega(\lambda,f(\lambda)),\varphi_\alpha^i\big)=\big(P(\sigma,\lambda)[P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar q},\varphi_\alpha^i\big)-\big(f(\lambda),\varphi_\alpha^i\big),$$

откуда следует, что $h_\alpha^i(\lambda,f(\lambda))\in\mathscr{H}(\Pi_\gamma)$. Линейная зависимость функций $h_\alpha^i(\lambda,f(\lambda))$ от $f(\lambda)$ при фиксированном λ вытекает из построения регуляризации, а непрерывная зависимость их от $f(\lambda)\in H_l^s$ является следствием неравенства (2.3):

$$\begin{aligned}\big|h_\alpha^i(\lambda,f(\lambda))\big|&\le\|[P^{-1}(\sigma,\lambda)f(\lambda)]_{\bar q}\|_{l'}^{s'}\big\|P(\sigma,\lambda)\varphi_\alpha^i\big\|_{-l'}^{-s'}+\|f(\lambda)\|_l^s\big\|\varphi_\alpha^i\big\|_{-l}^{-s}\\&\le c_1(1+|\lambda|)^\nu\|f(\lambda)\|_l^s(1+|\lambda|)^m\big\|\varphi_\alpha^i\big\|_{-l'}^{-s'}+\|f(\lambda)\|_l^s\big\|\varphi_\alpha^i\big\|_{-l}^{-s}\\&\le c_2(1+|\lambda|)^{\nu+m}\|f(\lambda)\|_l^s,\end{aligned}\tag{3.2}$$

где константа c_2 не зависит от $f(\lambda)$.

Обозначим второе слагаемое в правой части (3.1) через $U(\lambda,f(\lambda))$. Чтобы обобщенная функция $u(\lambda)$ была решением уравнения (1.1), необходимо и достаточно, чтобы обобщенная функция $U(\lambda,f(\lambda))$ была решением уравнения

$$P(\sigma,\lambda)U(\lambda,f(\lambda))=-\omega(\lambda,f(\lambda)).\tag{3.3}$$

Разрешимость уравнения (1.1) в шкале пространств $\mathscr{H}\big(\Pi_\gamma,H_l^s\big)$ сведена к разрешимости этого уравнения в специальных пространствах голоморфных функций со значениями в пространстве «точечных» потенциалов.

Решение уравнения (3.3) сводится к разрешимости систем линейных уравнений в пространстве голоморфных функций. Пусть $U(\lambda,f(\lambda))$ является решением уравнения (3.3). Тогда для любой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, для которой $\operatorname{supp}\varphi\cap N=\{\sigma_i\}$, имеет место равенство

$$\begin{aligned}(P(\sigma,\lambda)U(\lambda,f(\lambda)),\varphi)&\equiv\sum_{|\beta|\le r_i}u_\beta^i(\lambda,f(\lambda))(-1)^{|\beta|}\partial^\beta(P(\sigma)\varphi(\sigma))(\sigma_i)\\&=\sum_{|\alpha\le q_i|}h_\alpha^i(\lambda,f(\lambda))(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(\sigma_i).\end{aligned}$$

Пользуясь формулой Лейбница, это равенство можно записать в таком виде:

$$\sum_{|\alpha|\le r_i}g_\alpha^i(\lambda,f(\lambda))(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(\sigma_i)=\sum_{|\alpha|\le q_i}h_\alpha^i(\lambda,f(\lambda))(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha\varphi(\sigma_i),$$

где $g_\alpha^i(\lambda,f(\lambda))=\sum\limits_{|\beta|\le r_i}C_\beta^\alpha(-1)^{|\beta|-|\alpha|}\varepsilon_{\beta-\alpha}\partial^{\beta-\alpha}P(\sigma_i,\lambda)u_\beta^i(\lambda,f(\lambda))$, $\varepsilon_{\beta-\alpha}=1$, если $\beta-\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, и $\varepsilon_{\beta-\alpha}=0$, если $\beta-\alpha\notin\mathbb{Z}_+^n$, $C_\beta^\alpha=\frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!}$.

В силу произвольности выбора функции φ из полученного равенства следуют равенства

$$\sum_{|\beta|\le r_i} C_\beta^\alpha(-1)^{|\beta|-|\alpha|}\varepsilon_{\beta-\alpha}\partial^{\beta-\alpha}P(\sigma_i,\lambda)u_\beta^i(\lambda,f(\lambda)) = \tilde{h}_\alpha^i(\lambda,f(\lambda)), \quad |\alpha|\le r_i,$$

где $\tilde{h}_\alpha^i(\lambda,f(\lambda)) = 0$, если $|\alpha| \geqq q_i$, и $\tilde{h}_\alpha^i(\lambda,f(\lambda)) = h_\alpha^i(\lambda,f(\lambda))$, если $|\alpha| \le q_i$. Запишем эти равенства, сделав замену $\beta-\alpha=\gamma$ и обозначив $(-1)^{|\gamma|}\partial^\gamma P(\sigma_i,\lambda)$ через $b_\gamma^i(\lambda)$:

$$\sum_{|\gamma|\le r_i-|\alpha|} C_{\alpha+\gamma}^\alpha b_\gamma^i(\lambda)u_{\gamma+\alpha}^i(\lambda,f(\lambda)) = \tilde{h}_\alpha^i(\lambda,f(\lambda)), \quad |\alpha|\le r_i. \tag{3.4}$$

Существование решения уравнения (3.3) указанного вида равносильно разрешимости системы линейных уравнений (3.4) в классе голоморфных функций. Для описания схемы решения системы (3.4) введем на множестве мультииндексов следующее отношение порядка:

$$\alpha>\beta, \quad \text{если } |\alpha|>|\beta| \text{ или } |\alpha|=|\beta|, \quad \alpha_i=\beta_i,\ 1\le i<m,\ \alpha_m>\beta_m.$$

Так как $P(\sigma_i,\lambda)\equiv 0$, $\lambda\in\Pi_\gamma$, существуют такие натуральные числа k_i, что $b_\gamma^i(\lambda)\equiv 0$ при $|\gamma|<k_i$ и $b_{\gamma_i}^i(\lambda)\not\equiv 0$ для некоторого мультииндекса γ_i, $|\gamma_i|=k_i$. Будем предполагать, что это наибольший мультииндекс порядка k_i в соответствии с указанным отношением порядка. Так как $b_{\gamma_i}^i(\lambda)$ — многочлен одной переменной, существует полуплоскость $\Pi_{\gamma_0}^i$, замыкание которой не содержит нулей многочлена $b_{\gamma_i}^i(\lambda)$. Обозначим через Π_{γ_0} пересечения этих полуплоскостей.

Покажем, что система (3.4) имеет решение указанного вида, если выполнены условия $r_i=q_i+k_i$, $i=1,\dots,p$.

Коэффициенты уравнений системы (3.4), соответствующие мультииндексам α, удовлетворяющим неравенствам $q_i<|\alpha|\le r_i$, равны тождественно нулю, так как $|\gamma|\le r_i-|\alpha|<k_i$. Поэтому уравнения системы (3.4), соответствующие этим мультииндексам, являются тождествами.

Рассмотрим уравнения системы (3.4), соответствующие мультииндексам, порядок которых равен q_i:

$$\sum_{|\gamma|=k_i} C_{\alpha+\gamma}^\alpha b_\gamma^i(\lambda)u_{\gamma+\alpha}^i(\lambda,f(\lambda)) = h_\alpha^i(\lambda,f(\lambda)), \quad |\alpha|=q_i. \tag{3.5}$$

Расположим уравнения системы (3.5) и слагаемые в уравнениях в порядке «уменьшения» мультииндексов. По предположению $b_\gamma^i(\lambda)\equiv 0$ для всех мультииндексов γ, порядок которых меньше k_i, и для мультииндексов порядка k_i, которые удовлетворяют соотношению $\gamma>\gamma_i$.

Рассмотрим схему нахождения решения системы (3.5).

1. В последнем уравнении значения всех неизвестных с индексами $\gamma<\gamma_i+(0,\dots,0,q_i)$ положим равными нулю, а $u_{\gamma_i+(0,\dots,0,q_i)}^i(\lambda,f(\lambda))$ определим из уравнения:

$$u_{\gamma_i+(0,\dots,0,q_i)}^i(\lambda,f(\lambda)) = \frac{h_{(0,\dots,0,q_i)}^i(\lambda,f(\lambda))}{C_{(0,\dots,0,q_i)+\gamma_i}^{(0,\dots,0,q_i)} b_{\gamma_i}^i(\lambda)}, \quad \lambda\in\Pi_{\gamma_0}.$$

2. В предпоследнем уравнении подставим значения неизвестных, найденных на предыдущем этапе, остальные с индексами $\gamma < \gamma_i + (0, \dots, 0, 1, q_i - 1)$ выберем равными нулю, а $u^i_{\gamma_i+(0,\dots,0,1,q_i-1)}(\lambda, f(\lambda))$ определим из уравнения:

$$u^i_{\gamma_i+(0,\dots,0,1,q_i-1)}(\lambda, f(\lambda)) = \frac{\hat{h}^i_{(0,\dots,0,1,q_i-1)}(\lambda, f(\lambda))}{C^{(0,\dots,0,1,q_i-1)}_{(0,\dots,0,1,q_i-1)+\gamma_i} b^i_{\gamma_i}(\lambda)},$$

где $\hat{h}^i_{(0,\dots,0,1,q_i-1)}(\lambda, f(\lambda))$ отличается от $h^i_{(0,\dots,0,1,q_i-1)}(\lambda, f(\lambda))$ на уже определенные слагаемые вида $b^i_\gamma(\lambda) u^i_{\gamma_i+\alpha}(\lambda, f(\lambda))$.

3. Переход к следующему уравнению аналогичен переходу от последнего уравнения к предпоследнему.

Реализуемость указанной схемы для решения системы (3.5) следует из того, что неизвестное $u^i_{\gamma_i+\alpha_0}(\lambda, f(\lambda))$, определяемое из уравнения, соответствующего мультииндексу α_0, с помощью деления на многочлен $b^i_{\gamma_i}(\lambda)$, не могло быть найдено таким же способом в силу единственности индекса с заданными свойствами слагаемых. Неизвестные $u^i_{\gamma_i+\alpha_0}(\lambda, f(\lambda))$, значения которых выбраны равными нулю на предыдущем этапе, не могли на данном этапе находиться с помощью деления на многочлен $b^i_{\gamma_i}(\lambda)$. Пусть $\gamma_i + \alpha_0 = \gamma' + \alpha'$. Если $u^i_{\gamma'+\alpha'}(\lambda, f(\lambda)) \equiv 0$ и $\gamma' < \gamma_i$, то $\alpha' > \alpha_0$, т. е. уравнения, соответствующего мультииндексу α', не было на предыдущем этапе.

Применив указанную схему, получим значения части неизвестных. Положив равными нулю значения остальных неизвестных, придем к решению системы (3.5).

Рассмотрим уравнения системы (3.4), соответствующие мультииндексам, порядок которых равен $q_i - 1$:

$$\sum_{k_i \le |\gamma| \le k_i+1} C^\alpha_{\alpha+\gamma} b^i_\gamma(\lambda) u^i_{\gamma+\alpha}(\lambda, f(\lambda)) = h^i_\alpha(\lambda, f(\lambda)), \quad |\alpha| = q_i - 1.$$

Подставив в эту систему значения неизвестных, найденные из уравнений, соответствующих мультииндексам, порядок которых равен $q_i + k_i$, получим систему, аналогичную (3.5):

$$\sum_{|\gamma|=k_i} \mathrm{C}^\alpha_{\alpha+\gamma} b^i_\gamma(\lambda) u^i_{\gamma+\alpha}(\lambda, f(\lambda)) = \hat{h}^i_\alpha(\lambda, f(\lambda)), \quad |\alpha| = q_i - 1, \tag{3.6}$$

где $\hat{h}_i(\lambda, f(\lambda)) = h^i_\alpha(\lambda, f(\lambda)) - \sum\limits_{|\gamma|=k_i+1} C^\alpha_{\alpha+\gamma} b^i_\gamma(\lambda) u^i_{\gamma+\alpha}(\lambda, f(\lambda))$.

Применив указанную схему, найдем решение системы (3.6). Продолжая описанную процедуру для систем уравнений, соответствующих мультииндексам, порядок которых равен $q_i - 2$, $q_i - 3$, ... , получим решения системы (3.4).

При нахождении решения системы (3.4) использовались линейные операции над слагаемыми в уравнениях, умножение на многочлены, а также деление на многочлены $b^i_{\gamma_i}(\lambda) = (-1)^{|\gamma_i|\partial^{\gamma_i}} P(\sigma_i, \lambda)$, которые не имеют нулей в замыкании полуплоскости Π_{γ_0}. Следовательно, искомые неизвестные системы (3.4) являются линейными комбинациями функций $h^i_\alpha(\lambda, f(\lambda))$, коэффициенты которых голоморфны в области Π_{γ_0}. Поэтому функции $u^i_\alpha(\lambda, f(\lambda))$ голоморфны в области Π_{γ_0}.

Из построения функций $u^i_\alpha(\lambda, f(\lambda))$, неравенств (3.2) для $h^i_\alpha(\lambda, f(\lambda))$ и оценки

$$c(1 + |\lambda|)^{\varkappa} \le \left| b^i_{\gamma_i}(\lambda) \right|, \quad \lambda \in \Pi_{\gamma_0},\ i = 1, \dots, p,$$

которая является следствием того, что многочлены $b^i_{\gamma_i}(\lambda)$ не обращаются в нуль в замыкании полуплоскости Π_{γ_0}, вытекает справедливость неравенств

$$\left|u^i_\alpha(\lambda, f(\lambda))\right| \le c(1+|\lambda|)^{\nu'}\|f(\lambda)\|^s_l, \quad |\alpha| \le r_i,\ i = 1, \dots, p,$$

откуда следует неравенство

$$\|u(\lambda, f(\lambda))\|^{s''}_{l'} \le \sum_{i=1}^{p} \sum_{|\alpha|\le r_i} \left|u^i_\alpha(\lambda, f(\lambda))\right| \left\|\delta^\alpha_{\sigma_i}\right\|^{s''}_{l'} \le c'(1+|\lambda|)^{\nu'}\|f(s)\|^s_l,$$

где $s'' < -r_i - \frac{n}{2}$, l' — произвольное число.

Так как функции $u^i_\alpha(\lambda, f(\lambda))$ голоморфны в области Π_{γ_0}, функция $u(\lambda, f(\lambda))$ принадлежит пространству $\mathscr{H}\left(\Pi_{\gamma_0} H^{s''}_{l'}\right)$. Из леммы 2.3 следует, что построенное решение уравнения (1.1) принадлежит пространству $\mathscr{H}\left(\Pi_{\gamma_0} H^{\tilde{s}}_{\tilde{l}}\right)$, где $\tilde{s} = \min\{s', s''\}$, $\tilde{l} = l'$. Объединив полученную оценку для функции $u(\lambda, f(\lambda))$ с оценкой (2.3), получим неравенство (1.3).

Доказательство основной теоремы завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Паламодов В. П.* Обобщенные функции и гармонический анализ // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 72. С. 5–134. (Итоги науки и техники).
2. *Хермандер Л.* О делении обобщенных функций на полиномы // Математика. 1959. Т. 3, № 5. С. 117–130.
3. *Lojasiewicz S.* Sur le problème de division // Stud. Math. 1959. V. 18. P. 87–136.
4. *Мальгранж Б.* Идеалы дифференцируемых функций. М.: Мир, 1968.
5. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Задача Коши и связанные с ней задачи для уравнений в свертках // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 4. С. 65–143.
6. *Трев Ж.* Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1965.

Статья поступила 23 декабря 2014 г.

Павлов Александр Леонидович
Донецкий национальный университет,
факультет математики и информационных технологий
alex4909@gmail.com