Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 517.11+517.98

БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ ПРИНЦИП ПЕРЕНОСА ДЛЯ ИНЪЕКТИВНЫХ БАНАХОВЫХ РЕШЕТОК

А. Г. Кусраев

Аннотация. Цель статьи — развить булевозначный подход к теории инъективных банаховых решеток и доказать булевозначный принцип переноса с *AL*-пространств на инъективные банаховы решетки. Устанавливается, что инъективная банахова решетка допускает вложение в подходящую булевозначную модель, превращаясь при этом в *AL*-пространство. В соответствии с этим фактом каждая теорема об *AL*-пространстве, доказуемая в рамках теории множеств Цермело — Френкеля, имеет свой аналог для исходной инъективной банаховой решетки. Перевод теорем об *AL*-пространствах в теоремы об инъективных банаховых решетках осуществляется с помощью общих операций и принципов булевозначного анализа.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.511

Ключевые слова: инъективная банахова решетка, *AL*-пространство, свойство расщепления, M-проектор, оператор Магарам, булевозначное представление, спуск, подъем.

С. С. Кутателадзе к его семидесятилетию

1. Введение

Действительную банахову решетку X называют *инъективной,* если для любой банаховой решетки Y, любой замкнутой векторной подрешетки $Y_0 \subset Y$ и любого линейного положительного оператора $T_0 : Y_0 \to X$ существует положительное линейное продолжение $T : Y \to X$ оператора T_0 такое, что $\|T_0\| = \|T\|$. Инъективность банаховой решетки X равносильна тому, что если X линейно изометрична и порядково изоморфна замкнутой векторной подрешетке Y_0 некоторой банаховой решетки Y, то существует сжимающий положительный проектор из Y на Y_0. Таким образом, инъективные банаховы решетки служат инъективными объектами в категории банаховых решеток со сжимающими линейными положительными операторами в качестве морфизмов. Арендт [1, теорема 2.2] установил, что инъективные объекты в категории банаховых решеток остаются теми же, если под морфизмом понимается регулярный оператор со сжимающим модулем[1)].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–00623–а, 14–01–91339_ННИО–а, 15–51–53119_ГФЕН_а).

[1)] Если в определении инъективной банаховой решетки выполняется $\|T\| \le \lambda \|T_0\|$ (вместо $\|T_0\| = \|T\|$), где $1 \le \lambda \in \mathbb{R}$, то говорят о λ-*инъективности.* В данной работе мы ограничиваемся рамками изометрической теории, т. е. рассматриваем лишь 1-инъективные банаховы решетки. Относительно λ-инъективных банаховых решеток при $\lambda > 1$ см., например, [2, 3].

Понятие инъективной банаховой решетки ввел Лотц [4]. Он же доказал среди прочего, что порядково полное *AM*-пространство[2)] с единицей и произвольное *AL*-пространство являются инъективными банаховыми решетками [4, предложения 2.1 и 3.2]. Картрайт [6, гл. 2] дал геометрическую характеризацию инъективных банаховых решеток посредством свойства расщепления. Хейдон [7] обнаружил, что инъективная банахова решетка имеет смешанную *AM*-*AL*-структуру.

Цель статьи — развить булевозначный подход к теории инъективных банаховых решеток и доказать булевозначный принцип переноса с AL-пространств на инъективные банаховы решетки. В разд. 2 собраны используемые понятия и факты о банаховых пространствах с булевыми алгебрами проекторов, инъективных банаховых решетках, пространствах Банаха — Канторовича и булевозначных моделях. Разд. 3 посвящен булевозначной интерпретации небольшого фрагмента теории банаховых решеток. В разд. 4 изложены основные результаты о булевозначном представлении инъективных банаховых решеток. В разд. 5 даны новые способы построения инъективных банаховых решеток. Основные результаты статьи анонсированы в [8].

Если не оговорено иное, то X и Y обозначают банаховы решетки, а $\mathscr{L}(X,Y)$ — пространство ограниченных по норме линейных операторов из X в Y; полагаем также $\mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X,X)$ и $X^* := \mathscr{L}(X,\mathbb{R})$. Если $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ и $\|T\| \leq 1$, то оператор T, как обычно, называем *сжимающим*.

Теория банаховых решеток и положительных операторов представлена в [9–11]. Необходимые сведения о булевозначных моделях конспективно изложены в [9, гл. 9; 12, гл. 1]; подробности можно найти в [13–15].

В дальнейшем придерживаемся следующих обозначений: $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра с единицей $\mathbb{1}$, нулем $\mathbb{0}$, супремумом $\vee$, инфимумом $\wedge$ и дополнением $(\cdot)^*$, причем $\mathbb{1} \neq \mathbb{0}$; X_+ и $\mathbb{P}(X)$ — соответственно конус положительных элементов и булева алгебра всех порядковых проекторов в векторной решетке X; $\Lambda := \Lambda(\mathbb{B})$ — порядково полное *AM*-пространство с единицей такое, что булевы алгебры $\mathbb{B}$ и $\mathbb{P}(\Lambda)$ изоморфны. Под *разбиением единицы* в $\mathbb{B}$ понимается семейство $(b_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathbb{B}$ такое, что $\bigvee\limits_{\xi\in\Xi} b_\xi = \mathbb{1}$ и $b_\xi \wedge b_\eta = \mathbb{0}$ при $\xi \neq \eta$. Символ $:=$ используется как назначение по определению, а $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ обозначают множества натуральных, рациональных и действительных чисел соответственно.

2. Предварительные сведения

Банахово пространство с булевой алгеброй проекторов. Возьмем произвольное банахово пространство X. Рассмотрим инъективное отображение $\varphi := \varphi_X : \mathbb{B} \to \mathscr{L}(X)$, удовлетворяющее условиям ($b, d \in \mathbb{B}$): (1) $\varphi(b)$ — сжимающий проектор; (2) $\varphi(\mathbb{1})$ и $\varphi(\mathbb{0})$ совпадают соответственно с тождественным и нулевым операторами; (3) проекторы $\varphi(b)$ и $\varphi(d)$ коммутируют; (4) $\varphi(b \wedge d) = \varphi(b) \circ \varphi(d)$ и $\varphi(b^*) = I_X - \varphi(b)$. Тогда множество $\mathscr{B} := \varphi(\mathbb{B})$ называют *булевой алгеброй проекторов в* X. В дальнейшем будем отождествлять булевы алгебры $\mathbb{B}$ и $\mathscr{B}$ и говорить о булевой алгебре проекторов $\mathbb{B} \subset \mathscr{L}(X)$.

Если $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — разбиение единицы в $\mathbb{B}$ и $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ — семейство в X, то элемент $x \in X$, удовлетворяющий равенству $b_\xi x_\xi = b_\xi x$ для всех $\xi \in \Xi$, называют *перемешиванием* (x_ξ) относительно (b_ξ). Банахово пространство X именуют

[2)]Это первый пример инъективной банаховой решетки, ранее указанный Абрамовичем [5] без введения соответствующего термина.

$\mathbb{B}$-*циклическим,* если $\mathbb{B} \subset \mathscr{L}(X)$ и перемешивание любого семейства из единичного шара $U(X)$ пространства X относительно любого разбиения единицы в $\mathbb{B}$ (с тем же множеством индексов) существует в $U(X)$ и единственно (см. [9, определения 7.3.1, 7.3.3].

Пусть X и Y — банаховы пространства, причем $\mathbb{B} \subset \mathscr{L}(X)$ и $\mathbb{B} \subset \mathscr{L}(Y)$. Оператор $T : X \to Y$ называют $\mathbb{B}$-*линейным*, если он линеен и коммутирует со всеми проекторами из $\mathbb{B}$, т. е. $b \circ T = T \circ b$ $(b \in \mathbb{B})$. (Здесь подразумевается, конечно, что $\varphi_Y(b) \circ T = T \circ \varphi_X(b)$.) Множество всех ограниченных $\mathbb{B}$-линейных операторов из X в Y обозначим символом $\mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X,Y)$. Понятно, что если Y $\mathbb{B}$-циклично, то $\mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ с индуцированной из $\mathscr{L}(X,Y)$ нормой представляет собой $\widehat{\mathbb{B}}$-циклическое (или $\mathbb{B}$-циклическое, так как $\widehat{\mathbb{B}} \simeq \mathbb{B}$) банахово пространство, где $\widehat{\mathbb{B}} := \{\hat{\pi} : \pi \in \mathbb{B}\}$ и $\hat{\pi}(T) : x \mapsto \pi T x$ для $\pi \in \mathbb{B}$. Биективный $\mathbb{B}$-линейный оператор называют $\mathbb{B}$-*изоморфизмом*, а изометрический $\mathbb{B}$-*изоморфизм* — $\mathbb{B}$-*изометрией.* Аналогично $\mathbb{B}$-линейный ($\mathbb{B}$-изометрический) решеточный гомоморфизм именуют *решеточным* $\mathbb{B}$-*гомоморфизмом* (*решеточной* $\mathbb{B}$-*изометрией*), см. ниже определение 2.5. Вместо решеточной $\{\mathbb{0},\mathbb{1}\}$-изометрии говорят просто о *решеточной изометрии*, и т. п. $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство $X^{\#} := \mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X,\Lambda)$, где $\Lambda = \Lambda(\mathbb{B})$, называют $\mathbb{B}$-*двойственным* к X.

Инъективные банаховы решетки. Геометрическое свойство, характеризующее инъективные банаховы решетки, найдено Картрайтом (см. [6, теоремы 2.9 и 3.6]).

Определение 2.1. Банахова решетка обладает *свойством Картрайта,* если для любых $x_1, x_2, y \in X_+$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условиям $\|x_1\| \le \lambda_1$, $\|x_2\| \le \lambda_2$ и $\|x_1 + x_2 + y\| \le \lambda_1 + \lambda_2$, существуют $y_1, y_2 \in X_+$ такие, что $y_1 + y_2 = y$, $\|x_1 + y_1\| \le \lambda_1$ и $\|x_2 + y_2\| \le \lambda_2$. Говорят, что банахова решетка X имеет *свойство расщепления*, если в ней выполняется свойство Картрайта при $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Теорема 2.2. *Для банаховой решетка X равносильны следующие условия:*

(1) *X имеет свойство Картрайта;*

(2) *X имеет свойство расщепления;*

(3) *второе сопряженное пространство X^{**} — инъективная банахова решетка.*

Ключевую роль в теории инъективных банаховых решеток играет понятие M-проектора. В более широком контексте общей теории банаховых пространств понятие M-проектора представлено в [16].

Определение 2.3. Порядковый проектор π в банаховой решетке X называют *M-проектором,* если $\|x\| = \max\{\|\pi x\|, \|\pi^{\perp} x\|\}$ для всех $x \in X$, где $\pi^{\perp} := I_X - \pi$.

Совокупность всех M-проекторов служит подалгеброй $\mathbb{M}(X)$ булевой алгебры всех порядковых проекторов $\mathbb{P}(X)$ в X. Если $X \ne \{0\}$ обладает свойством Фату и Леви, то $\mathbb{M}(X)$ является порядково замкнутой подалгеброй полной булевой алгебры $\mathbb{P}(X)$. В этом случае X является $\mathbb{B}$-циклической банаховой решеткой для любой порядково замкнутой подалгебры $\mathbb{B} \subset \mathbb{M}(X)$.

Напомним, что банахова решетка X обладает *свойством Леви* (или *монотонно полна*), если $0 \le x_\alpha \uparrow$ и $\|x_\alpha\| \le 1$ влечет, что $\sup\limits_\alpha x_\alpha$ существует в X, и *свойством Фату* (или *порядково полунепрерывна*), если $0 \le x_\alpha \uparrow x$ влечет $\|x_\alpha\| \uparrow \|x\|$ (см. [17, определение 7; 11, определение 2.4.18]).

Нам потребуются также некоторые результаты, полученные Хейдоном в [7, теорема 3F(ii), следствие 5D], которые можно суммировать следующим образом.

Теорема 2.4. *Банахова решетка инъективна в том и только в том случае, когда она имеет свойства Картрайта, Леви и Фату. Инъективная банахова решетка X является AL-пространством в том и только в том случае, когда в ней нет M-проекторов, отличных от 0 и I_X.*

Определение 2.5. По определению *полная булева алгебра M-проекторов* в банаховой решетке X — произвольная порядково замкнутая подалгебра $\mathbb{B} \subset \mathbb{M}(X)$. Банахову решетку X называют $\mathbb{B}$-*циклической* если она является $\mathbb{B}$-циклическим банаховым пространством относительно некоторой полной булевой алгебры M-проекторов $\mathbb{B} \subset \mathbb{P}(X)$.

Пространства Банаха — Канторовича. Пусть E — порядково полная векторная решетка. Напомним, что *пространством Банаха — Канторовича* над E называют векторное пространство X, снабженное разложимой нормой $\lvert\!\lvert\cdot\rvert\!\rvert : X \to E$ и полное по норме относительно порядковой сходимости в E. (Не путать с *пространством Канторовича — Банаха* или, короче, *KB-пространством*, которое по определению есть банахова решетка с порядково непрерывной нормой, обладающая свойством Леви (см. [17, с. 89; 11, определение 2.4.11]).)

Разложимость нормы означает, что для любых $e_1, e_2 \in E_+$ и $x \in X$ из представления $\lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert = e_1 + e_2$ следует существование таких $x_1, x_2 \in X$, что $x = x_1 + x_2$ и $\lvert\!\lvert x_k\rvert\!\rvert = e_k$ $(k := 1, 2)$. Если пространство Банаха — Канторовича является одновременно векторной решеткой и норма монотонна ($|x| \leq |y| \Longrightarrow \lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert \leq \lvert\!\lvert y\rvert\!\rvert$), то его называют *решеткой Банаха — Канторовича.* Любая решетка Банаха — Канторовича является решеточно упорядоченным модулем над f-алгеброй $\operatorname{Orth}(E_0)$, где $E_0 := \{\lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert : x \in X\}^{\perp\perp}$. В дальнейшем предполагается, что $E = E_0$. Детальное изложение теории пространство Банаха — Канторовича см. в [9].

Если нормирующая решетка E пространства Банаха — Канторовича X является банаховой решеткой, то X можно снабдить *смешанной нормой* $|\!|\!| x |\!|\!| := \| \lvert\!\lvert x\rvert\!\rvert \|$ $(x \in X)$. В этом случае $(X, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ — банахово пространство, называемое *bo-полным банаховым пространством со смешанной нормой* [9, 7.1.1]. Следующий результат см. в [9, теорема 7.3.3(1)].

Теорема 2.6. *Банахово пространство $\mathbb{B}$-циклично относительно некоторой полной булевой алгебры проекторов $\mathbb{B}$ в том и только в том случае, когда оно линейно изометрично bo-полному пространству со смешанной нормой, нормирующая решетка которого Λ является порядково полным AM-пространством с единицей, причем $\mathbb{B}$ изоморфна $\mathbb{P}(\Lambda)$.*

Булевозначные модели. По фиксированной полной булевой алгебре $\mathbb{B}$ определяется универсум $\mathbb{B}$-значных множеств $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Относительно элементов универсума $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ можно формировать математические утверждения. Возьмем теоретико-множественную формулу $\varphi = \varphi(u_1, \dots, u_n)$ и заменим переменные $u_1, \dots, u_n$ элементами $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда получим некоторое утверждение об объектах $x_1, \dots, x_n$. Каждому такому утверждению естественным образом приписывается элемент $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!] \in \mathbb{B}$ — *булева оценка истинности* утверждения $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ в универсуме $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, которая определяется индукцией по сложности формулы φ, начиная с булевых оценок истинности для элементарных формул $[\![x \in y]\!] \in \mathbb{B}$ и $[\![x = y]\!] \in \mathbb{B}$, где $x, y \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Говорят, что утверждение $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ *истинно внутри* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, если выполняется $[\![\varphi(x_1,\dots,x_n)]\!]=\mathbb{1}$. В этом случае пишут также $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}\vDash\varphi(x_1,\dots,x_n)$.

Пару $(\mathbb{V}^{(\mathbb{B})},[\![\cdot]\!])$ называют *булевозначной моделью* теории множеств Цермело — Френкеля с аксиомой выбора, сокращенно ZFC. Важнейшими свойствами булевозначной модели являются: *принцип переноса,* утверждающий, что все теоремы теории ZFC истинны внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$; *принцип максимума,* гарантирующий существование специальных «булевозначных объектов»; *принцип перемешивания,* дающий способ конструирования таких объектов (см. [13–15]).

Существует каноническое вложение универсума фон Неймана (т. е. класса всех множеств) $\mathbb{V}$ в булевозначный универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, сопоставляющее множеству $x\in\mathbb{V}$ его *стандартное имя* $x^\wedge\in\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Оно отображает $\mathbb{V}$ на $\mathbb{V}^{(\mathbb{2})}$, где $\mathbb{2}:=\{\mathbb{0},\mathbb{1}\}\subset\mathbb{B}$. Формула называется *ограниченной,* если все входящие в нее кванторы имеют вид $(\forall\,x\in y)$ или $(\exists\,x\in y)$, или в ZFC доказуема эквивалентная ей формула такого типа. *Ограниченный принцип переноса* утверждает, что для всякой ограниченной теоретико-множественной формулы φ и любого конечного набора $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{V}$ в ZFC доказуема эквивалентность

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)\iff\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}\models\varphi(x_1^\wedge,\dots,x_n^\wedge).$$

Для произвольного элемента $X\in\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ *спуск* $X{\downarrow}$ определяется как множество $X{\downarrow}:=\{x\in\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}:[\![x\in X]\!]=\mathbb{1}\}$. Предположим, что $X,Y,f,P\in\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ таковы, что $[\![f:X\to Y]\!]=\mathbb{1}$ и $[\![P\subset X^2]\!]=\mathbb{1}$, т. е. f — отображение из X в Y и P — бинарное отношение на X внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда $f{\downarrow}$ — единственное отображение из $X{\downarrow}$ в $Y{\downarrow}$, для которого $[\![f{\downarrow}(x)=f(x)]\!]=\mathbb{1}$ $(x\in X{\downarrow})$, а $P{\downarrow}$ — единственное бинарное отношение на $X{\downarrow}$ такое, что $(x_1,x_2)\in P{\downarrow}\iff[\![(x_1,x_2)^{\mathbb{B}}\in P]\!]=\mathbb{1}$.

Булевозначные числа и банаховы пространства. Под *полем действительных чисел* понимаем порядково полное упорядоченное поле (с различными нулем и единицей). Применяя принципы переноса и максимума к ZFC-теореме «Существует поле действительных чисел», находим элемент $\mathscr{R}\in\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которого $[\![\,\mathscr{R}$ — поле действительных чисел$\,]\!]=\mathbb{1}$. Будем называть $\mathscr{R}$ *полем действительных чисел внутри* $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Следующий результат, найденный Гордоном [18], утверждает, что интерпретация поля действительных чисел в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ представляет собой универсально полную векторную решетку, булева алгебра порядковых проекторов которого изоморфна $\mathbb{B}$ (см. [9, теорема 8.1.2; 12, теорема 2.2.4].

Теорема 2.7. *Пусть $\mathscr{R}$ — поле действительных чисел внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Тогда $\mathscr{R}{\downarrow}$ (со спущенными операциями и порядком) является универсально полной векторной решеткой. Более того, существует булев изоморфизм $\chi:\mathbb{B}\to\mathbb{P}(\mathscr{R}{\downarrow})$ такой, что для всех $x,y\in\mathscr{R}{\downarrow}$ и $b\in\mathbb{B}$ выполняются эквивалентности*

$$\chi(b)x=\chi(b)y\iff b\le[\![x=y]\!],\quad \chi(b)x\le\chi(b)y\iff b\le[\![x\le y]\!].$$

Пусть $\Lambda=\mathscr{R}{\Downarrow}$ обозначает ограниченную часть универсально полной векторной решетки $\mathscr{R}{\downarrow}$, т. е. Λ — порядково плотный идеал в $\mathscr{R}{\downarrow}$, порожденный порядковой единицей $\mathbb{1}:=1^\wedge\in\mathscr{R}{\downarrow}$. Возьмем ненулевое банахово пространство $\mathscr{X}=(\mathscr{X},\|\cdot\|_{\mathscr{X}})$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и обозначим $\mathscr{X}{\Downarrow}:=\{x\in\mathscr{X}{\downarrow}:|x|\in\Lambda\}$, где $|\cdot|$ — спуск нормы $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$. Тогда $\mathscr{X}{\Downarrow}:=(\mathscr{X}{\Downarrow},|\cdot|)$ — пространство Банаха — Канторовича над Λ, именуемое *ограниченным спуском* $\mathscr{X}$. Так как Λ — порядково полное AM-пространство с единицей, $\mathscr{X}{\Downarrow}$ — банахово пространство со смешанной нормой над Λ и, следовательно, $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство (см. [9, 7.3.3]). Следующий результат о булевозначном представлении банаховых пространств см. в [9, теорема 8.3.5(2)].

Теорема 2.8. *Ограниченный спуск ненулевого банахова пространства из модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ является $\mathbb{B}$-циклическим банаховым пространством. Обратно, если дано $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство X, то в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ существует единственное с точностью до изометрического изоморфизма банахово пространство $\mathscr{X}$, ограниченный спуск которого $\mathbb{B}$-изометричен X; символически, $\mathscr{X}{\Downarrow} \simeq_{\mathbb{B}} X$.*

Элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ из теоремы 2.8 называют *булевозначным представлением* X, причем X и $\mathscr{X}{\Downarrow}$ часто отождествляются. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — булевозначные представления $\mathbb{B}$-циклических банаховых пространство X и Y соответственно. Символом $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ обозначается элемент из $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, изображающий пространство всех ограниченных линейных операторов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Следующий результат утверждает, что $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ служит булевозначным представлением банахова пространства $\mathbb{B}$-линейных ограниченных операторов $\mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ (см. [9, теорема 8.3.6]).

Теорема 2.9. *Если $\tau \in \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y}){\Downarrow}$, то существует единственный оператор $T \in \mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ такой, что $[\![\tau(x) = T(x)]\!] = \mathbb{1}$ для всех $x \in X$. Соответствие $\tau \mapsto T$ осуществляет $\mathbb{B}$-изометрию ограниченного спуска банахова пространства $\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ из модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ на $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство $\mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X,Y)$. В частности, $\mathbb{B}$-изометричны $\mathbb{B}$-циклические банаховы пространства $\mathscr{X}^*{\Downarrow}$ и $X^{\#}$.*

3. Булевозначные банаховы решетки

В этом разделе рассматривается булевозначная интерпретация некоторых понятий теории банаховых решеток. При этом ограничиваемся лишь несколькими необходимыми в дальнейшем фактами. Доказательства могут быть получены с учетом приемов из [12, 18, 19] с очевидными модификациями, но для полноты изложения дадим независимые доказательства.

Теорема 3.1. *Ограниченный спуск ненулевой банаховой решетки из модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ есть $\mathbb{B}$-циклическая банахова решетка. Обратно, если X — $\mathbb{B}$-циклическая банахова решетка, то в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ существует единственное с точностью до решеточной изометрии банахова решетка $\mathscr{X}$, ограниченный спуск которой решеточно $\mathbb{B}$-изометричен X. Более того, отображение $\pi \mapsto \pi{\Downarrow} := \pi{\downarrow}|_X$ осуществляет изоморфизм булевых алгебр $\mathbb{M}(\mathscr{X}){\downarrow}$ и $\mathbb{M}(X)$; символически, $\mathbb{M}(\mathscr{X}){\downarrow} \simeq \mathbb{M}(\mathscr{X}{\Downarrow})$.*

Доказательство. Предположим, что X — $\mathbb{B}$-циклическая банахова решетка с нормой $\|\cdot\|_X$, и покажем $\mathbb{B}$-изометричность X ограниченному спуску $\mathscr{X}{\Downarrow}$ некоторой банаховой решетки $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Банахова часть требуемого следует из теорем 2.6 и 2.8. В частности, можем считать, что X совпадает с $\mathbb{B}$-циклическим банаховым пространством $\mathscr{X}{\Downarrow}$ для некоторого банахова пространства $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Положим $\mathscr{X}_+ := X_+{\uparrow}$. Для любого экстенсионального отображения f выполняется $f(A){\uparrow} = f{\uparrow}(A{\uparrow})$, где $A \subset \operatorname{dom}(f)$ (см. [13, теорема 5.5.6(2); 9, П.10 (2, 4)]. Применив это соотношение к операции сложения $f : (x,y) \mapsto x+y$ $(x,y \in X)$, где $A := X_+ \times X_+$, и операции умножения $f : (\lambda,x) \mapsto \lambda x$ $(\lambda \in \Lambda, x \in X)$, где $A := \Lambda_+ \times X_+$, получим $[\![\mathscr{X}_+ + \mathscr{X}_+ = \mathscr{X}_+]\!] = \mathbb{1}$ и $[\![\mathscr{R}_+ \cdot \mathscr{X}_+ = \mathscr{X}_+]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $[\![\mathscr{X}_+$ — выпуклый конус$]\!] = \mathbb{1}$. Более того, $[\![$конус $\mathscr{X}_+$ острый$]\!] = \mathbb{1}$, поскольку $[\![\pm x \in \mathscr{X}_+$ и $\|x\| \le 1]\!] = \mathbb{1}$ влечет $\pm x \in \mathscr{X}_+{\downarrow} \cap X \subset X_+$, а значит, $x = 0$. Теперь определим порядок в $\mathscr{X}$ формулой $[\![(\forall\, x,y \in \mathscr{X})(x \le y \leftrightarrow y - x \in \mathscr{X}_+)]\!] = \mathbb{1}$.

В силу принципа переноса $(\mathscr{X}, \mathscr{X}_+)$ — упорядоченное банахово пространство внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. В частности, $[\![x \le y]\!] = \mathbb{1} \Longleftrightarrow x \le y$ для всех $x, y \in X$.

Рассмотрим предложение $\sigma \equiv (\forall a \in \{0,1\})(\forall x, y \in \mathscr{X})\ (ax \le ay \leftrightarrow (a \ne 1 \vee x \le y))$, представляющее собой весьма простую теорему теории ZF. В силу принципу переноса $[\![\sigma]\!] = \mathbb{1}$. Подсчет булевых оценок истинности для кванторов приводит к равносильной формулировке последнего равенства: $[\![ax \le ay]\!] = [\![a = 1]\!]^* \vee [\![x \le y]\!]$ выполняется для всех $a \in \{0,1\}{\downarrow}$ и $x, y \in \mathscr{X}{\downarrow}$. Используя булев изоморфизм $\chi : \mathbb{B} \to \{0,1\}{\downarrow}$ (см. [6, П.16 (1)]), можно заменить $a \in \{0,1\}{\downarrow}$ на $\chi(b)$ для некоторого $b \in \mathbb{B}$ и написать $b^* \vee [\![x \le y]\!] = [\![\chi(b)x \le \chi(b)y]\!]$. Легко видеть, что (сравни с теоремой 2.7)

$$b \le [\![x \le y]\!] \Longleftrightarrow \chi(b)x \le \chi(b)y \quad (b \in \mathbb{B};\ x, y \in \mathscr{X}{\downarrow}).$$

Последнее соотношение позволяет устанавливать взаимосвязь между порядковыми свойствами X и $\mathscr{X}$. В качестве примера покажем, что $\mathscr{X}$ — векторная решетка, т. е. предложение $(\forall\, x \in \mathscr{X})(\exists y \in \mathscr{X}) y = \sup\{x, -x\}$ истинно внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Используя правила вычисления булевых оценок (см. [13, 5.4.2; 9, П.10(1)]) и принцип максимума, достаточно доказать, что для любого $x \in X$ существует $y \in X$, для которого $[\![y = \sup\{x, -x\}]\!] = \mathbb{1}$. По условию в X существует $y = |x|$, и по определению порядка в $\mathscr{X}$ имеем $[\![\pm x \le y]\!] = \mathbb{1}$. Тем самым остается лишь проверить справедливость равенства $[\![(\forall\, u \in \mathscr{X})(\pm x \le u \to y \le u)]\!] = \mathbb{1}$. Вновь привлекая правила [9, П.4, П.10(1)], замечаем что последнее равносильно неравенству $[\![\pm x \le u]\!] \le [\![y \le u]\!]$ $(u \in X)$. Если теперь $b = [\![\pm\, x \le u]\!]$, то $\pm\chi(b)x \le \chi(b)u$ и $\chi(b)y \le \chi(b)u$ ввиду теоремы 2.7. Отсюда следует $b \le [\![y \le u]\!]$.

Далее, Λ-значная норма $\lvert\!\lvert \cdot \rvert\!\rvert$ пространства X является спуском нормы $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ внутреннего банахова пространства $\mathscr{X}$, причем $\|x\|_X = \|\, \lvert\!\lvert x \rvert\!\rvert\, \|_\infty$ $(x \in X)$. Поэтому норма $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ монотонна внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ в том и только в том случае, когда $|x| \le |y|$ влечет $\lvert\!\lvert x \rvert\!\rvert \le \lvert\!\lvert y \rvert\!\rvert$ для всех $x, y \in X$. По условию $\|\cdot\|_X$ — монотонная норма. Предположим, что $|x| \le |y|$ для некоторых $x, y \in X$. Если бы требуемое неравенство $\lvert\!\lvert x \rvert\!\rvert \le \lvert\!\lvert y \rvert\!\rvert$ оказалось ложным, то можно было бы подобрать такие $\pi \in \mathbb{B} = \mathbb{P}(\Lambda)$ и $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$, что $\pi \lvert\!\lvert x \rvert\!\rvert > \pi(\lvert\!\lvert y \rvert\!\rvert + \varepsilon\mathbb{1})$. Отсюда $\|\pi x\|_X = \|\pi \lvert\!\lvert x \rvert\!\rvert\, \|_\infty \ge \|\pi \lvert\!\lvert y \rvert\!\rvert\, \|_\infty + \varepsilon > \|\pi y\|_X$, что противоречит условию, так как на самом деле $\pi x \le \pi y$. Таким образом, $(\mathscr{X}, \mathscr{X}_+)$ — банахова решетка внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$.

Возьмем какой-нибудь M-проектор π в $\mathscr{X}$, и пусть Π — ограничение спуска $\pi{\downarrow}$ на X. Тогда $[\![\pi \circ \pi = \pi]\!] = \mathbb{1}$, $[\![0 \le \pi x \le x\,(x \in \mathscr{X}_+)]\!] = \mathbb{1}$, и $[\![\|x\| = \max\{\|\pi x\|, \|\pi^\perp x\|\}\,(x \in \mathscr{X})]\!] = \mathbb{1}$ ввиду определений. В силу [9, П.9 (4, 7)] имеем $\pi{\downarrow} = (\pi \circ \pi){\downarrow} = \pi{\downarrow} \circ \pi{\downarrow}$ и, стало быть $\Pi = \Pi \circ \Pi$. По определению спуска $[\![\pi x = \Pi x]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in X)$, поэтому выполняется $0 \le \Pi x \le x$ для всех $x \in X_+$. Наконец, соотношения $[\![\|x\| = \max\{\|\pi x\|, \|\pi^\perp x\|\}\,(x \in \mathscr{X})]\!] = \mathbb{1}$ и $\lvert\!\lvert x \rvert\!\rvert = \lvert\!\lvert \Pi x \rvert\!\rvert \vee \lvert\!\lvert \Pi^\perp x \rvert\!\rvert$ $(x \in X)$ равносильны, откуда выводим $\|x\|_X = \|\, \lvert\!\lvert \Pi x \rvert\!\rvert \vee \lvert\!\lvert \Pi^\perp x \rvert\!\rvert \|_\infty = \max\{\|\Pi x\|_X, \|\Pi^\perp x\|_X\}$. Таким образом, Π служит M-проектором в X, т. е. $\Pi \in \mathbb{M}(X)$. Те же рассуждения в обратном порядке убеждают, что если Π — произвольный M-проектор в X, то $\pi := \Pi{\uparrow}$ также M-проектор в $\mathscr{X}$, т. е. $\pi \in \mathbb{M}(\mathscr{X}){\downarrow}$. Как видно, спуск и подъем устанавливают биекцию между $\mathbb{M}(\mathscr{X}){\downarrow}$ и $\mathbb{M}(X)$. Очевидно, что эта биекция является булевым изоморфизмом.

Непосредственная проверка того, что ограниченный спуск ненулевой банаховой решетки есть $\mathbb{B}$-циклическая банахова решетка, предлагается читателю. $\triangleright$

Определение 3.2. Элемент $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ из теоремы (3.1 называют *булевозначным представлением* $\mathbb{B}$-циклической банаховой решетки X.

Следствие 3.3. *Если $\mathscr{X}$ — булевозначное представление $\mathbb{B}$-циклической банаховой решетки X, то условия $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$ и $[\![\mathbb{M}(\mathscr{X}) = \{0, I_{\mathscr{X}}\}]\!] = \mathbb{1}$ равносильны.*

Доказательство следует непосредственно из теоремы 3.1, так как $\mathbb{B}$ изоморфна спуску двухэлементной булевой алгебры $\{0, I_{\mathscr{X}}\}$ (см. [9, П.16 (1)]). $\rhd$

Следствие 3.4. *Банахова решетка X решеточно изометрична ограниченному спуску ненулевой банаховой решетки из модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ в том и только в том случае, когда она $\mathbb{B}$-циклична относительно полной булевой алгебры M-проекторов в X.*

Определение 3.5. Говорят, что направленное вниз множество A в $\mathbb{B}$-циклическом банаховом пространстве X $\mathbb{B}$-*сходится к нулю,* если для любого $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существует разбиение единицы $(\pi_a)_{a \in A}$ в $\mathbb{B}$ такое, что $\|\pi_a a\| \leq \varepsilon$ для всех $a \in A$. Норму в X называют *порядково $\mathbb{B}$-непрерывной,* если любое направленное вниз множество $A \subset X$ такое, что $\inf A = 0$, $\mathbb{B}$-сходится к нулю. (Сравни с m-сходимостью Такеути [20].)

Теорема 3.6. *Предположим, что X — $\mathbb{B}$-циклическая банахова решетка, а $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ — ее булевозначное представление. Тогда имеют место утверждения:*

(1) *X порядково полна $\Longleftrightarrow [\![\mathscr{X}$ порядково полна$]\!] = \mathbb{1}$;*

(2) *X имеет свойство Леви (Фату) $\Longleftrightarrow [\![\mathscr{X}$ имеет свойство Леви (Фату) $]\!] = \mathbb{1}$;*

(3) *X имеет порядково $\mathbb{B}$-непрерывную норму $\Longleftrightarrow [\![\mathscr{X}$ имеет порядков непрерывную норму$]\!] = \mathbb{1}$;*

(4) *X имеет свойство Леви и норма в ней порядково $\mathbb{B}$-непрерывна $\Longleftrightarrow$ $[\![\, \mathscr{X}$ — KB-пространство$]\!] = \mathbb{1}$;*

(5) *оператор $S \in X^{\#}$ порядково непрерывен $\Longleftrightarrow$ $[\![$ функционал $\sigma := S\!\uparrow\, \in \mathscr{X}^*$ порядково непрерывен$]\!] = \mathbb{1}$.*

Доказательство. (1) Так же, как и в [9, теорема 8.1.2], можно доказать, что для порядково ограниченного множества $A \subset X_+$ существует $a = \sup(A)$ в том и только в том случае, когда $[\![$существует $\sup(A\!\uparrow)]\!] = \mathbb{1}$ и при этом $[\![a = \sup(A\!\uparrow)]\!] = \mathbb{1}$. Таким образом, порядковая полнота $\mathscr{X}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ влечет порядковую полноту X. Наоборот, предположим, что X порядково полна, и возьмем непустое множество $\mathscr{A} \subset \mathscr{X}_+$, ограниченное сверху элементом $u \in \mathscr{X}$. Без ограничения общности можно предположить, что $[\![\|u\| \leq 1]\!] = \mathbb{1}$. Тогда $A := \mathscr{A}\!\downarrow$ содержится в X и, принимая во внимание правило сокращения стрелок $\mathscr{A}\!\downarrow\uparrow = \mathscr{A}$ (см. [13, 5.4.3(2)]), получим следующее: существует $a = \sup(\mathscr{A}\!\downarrow)$ в том и только в том случае, когда $[\![$существует $\sup(\mathscr{A})]\!] = \mathbb{1}$ и при этом $[\![a = \sup(\mathscr{A})]\!] = \mathbb{1}$.

(2) Без ограничения общности можно предположить, что направленные вверх множества в определениях свойств Леви и Фату содержатся в единичных шарах $U(X)$ и $U(\mathscr{X})$. Более того, если множество $A \subset X$ направлено вверх, то $[\![A\!\uparrow$ направлено вверх$]\!] = \mathbb{1}$, а из соотношения $[\![\mathscr{A} \subset \mathscr{X}$ направлено вверх$]\!] = \mathbb{1}$ следует, что $\mathscr{A}\!\downarrow$ направлено вверх. Заметим также, что $U(\mathscr{X})\!\downarrow = \{x \in \mathscr{X}\!\downarrow : \left\bracevert x \right\bracevert \leq \mathbb{1}\} = U(X)$. Пусть $\mathscr{X}$ имеет свойство Леви и возьмем направленное вверх множество $A \subset U(X)$. Тогда $\{\left\bracevert a \right\bracevert : a \in A\} \subset [-\mathbb{1}, \mathbb{1}]$ и, следовательно, $[\![\{\|a\| : a \in A\!\uparrow\} \subset [-1, 1]\,]\!] = \mathbb{1}$, т. е. $[\![A\!\uparrow\, \subset U(\mathscr{X})]\!] = \mathbb{1}$. По условию $a = \sup(A\!\uparrow)$ существует в $\mathscr{X}$, откуда $a = \sup(A)$ в X. Обратное устанавливается аналогично. Чтобы убедиться в справедливости утверждения относительно свойства Фату, достаточно заметить, что $\left\bracevert a \right\bracevert = \sup\{\left\bracevert a' \right\bracevert : a' \in A\}$ в Λ в том и только в том

случае, если $\|\pi a\| = \|\,|\pi a|\,\|_\infty = \sup\{\|\,|\pi a'|\|_\infty : a' \in A\}$ для любого $\pi \in \mathbb{P}(\Lambda)$, так как AM-пространство Λ имеет свойство Леви.

(3) Используя приведенные в (2) замечания, легко видеть, что $[\![\mathscr{X}$ имеет порядково непрерывную норму$]\!] = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, когда для любого направленного вниз множества $A \subset X_+$, удовлетворяющего условию $\inf(A) = 0$, имеем $\inf\{|a| : a \in A\} = 0$ в Λ. В соответствии с [9, теорема 8.1.8] последнее свойство равносильно следующему: для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение единицы $(\pi_a)_{a \in A}$ в $\mathbb{B}$ такое, что $|\pi_a a| = \pi_a\,|a| < \varepsilon\mathbb{1}$ для всех $a \in A$. Это сразу же дает требуемое, так как соотношения $|\pi_a a| \le \varepsilon\mathbb{1}$ и $\|\pi_a a\| \le \varepsilon$ равносильны.

(4) Следует непосредственно из (2) и (3).

(5) В силу теоремы 2.9 $S \in X^{\#}$ в том и только в том случае, если выполняется $[\![\sigma := S{\uparrow} \in \mathscr{X}^*]\!] = \mathbb{1}$. Более того, S и σ положительны или нет одновременно. Поэтому можно ограничиться случаем положительного S. Заметим также, что если $[\![\mathscr{A} \subset \mathscr{X}_+ \cap U(\mathscr{X})]\!] = \mathbb{1}$ и $A = \mathscr{A}{\downarrow}$, то $S(A) = \sigma(\mathscr{A}){\downarrow}$ в силу [9, П.9 (4, 7)], а если $A \subset X_+$ и $\mathscr{A} = A{\uparrow}$, то $[\![\sigma(\mathscr{A}) = S(A){\uparrow}]\!] = \mathbb{1}$ ввиду [9, П.10 (2, 4)]. Далее, используя те же соображения, что и в (1), но заменив в них супремум инфимумом, находим, что если S порядково непрерывен, то $[\![\inf(A) = 0]\!] = \mathbb{1}$ влечет $[\![\inf \sigma(\mathscr{A}) = 0]\!] = \mathbb{1}$, а если $[\![\sigma$ порядково непрерывен$]\!] = \mathbb{1}$, то $\inf(A) = 0$ влечет $\inf S(A) = 0$. $\rhd$

Пусть $\mathscr{L}^{\times}_{\mathbb{B}}(X, \Lambda)$ обозначает пространство всех ограниченных по норме порядково непрерывных $\mathbb{B}$-линейных операторов из X в Λ, а $\mathscr{X}^{\times}$ — полоса в $\mathscr{X}^*$, состоящая из порядково непрерывных функционалов.

Следствие 3.7. *$\mathbb{B}$-циклическая банахова решетка X имеет порядково $\mathbb{B}$-непрерывную норму в том и только в том случае, если $X^{\#} = \mathscr{L}^{\times}_{\mathbb{B}}(X, \Lambda)$.*

Доказательство. В силу теоремы 3.6(3),(5) и характеризации банаховых решеток с порядково непрерывной нормой достаточно заметить, что $\mathbb{B}$-циклические банаховы решетки $\mathscr{L}^{\times}_{\mathbb{B}}(X, \Lambda)$ и $\mathscr{X}^{\times}{\Downarrow}$ решеточно $\mathbb{B}$-изометричны. $\rhd$

Замечание 3.8. Дальнейшие результаты о порядково $\mathbb{B}$-непрерывных нормах см. в [12, следствия 5.9.7, 5.9.9, теорема 5.9.8]. В контексте $\mathbb{B}$-циклических банаховых решеток порядковая непрерывность нормы не очень интересна в отличие от порядковой $\mathbb{B}$-непрерывности см. [12, 5.15.9].

4. Представление инъективных банаховых решеток

Результаты разд. 3 позволяют получить булевозначное представление инъективных банаховых решеток.

Теорема 4.1. *Пусть X — $\mathbb{B}$-циклическая банахова решетка и $\mathscr{X}$ — ее булевозначное представление в $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Выполняются следующие утверждения:*

(1) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models$ «$\mathscr{X}$ инъективна» в том и только в том случае, когда X инъективна;

(2) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models$ «$\mathscr{X}$ есть AM-пространство» в том и только в том случае, когда X есть AM-пространство;

(3) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \models$ «$\mathscr{X}$ есть AL-пространство» в том и только в том случае, когда X инъективна и $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$.

Доказательство. (1) Теоремы 2.2 и 2.4 имеют место внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ в силу принципа переноса. По теореме 3.6(2) нужно лишь показать, что $[\![\mathscr{X}$ имеет свойство расщепления$]\!] = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, когда X имеет свойство расщепления. По теореме 3.1 X является решеткой Банаха — Канторовича, причем Λ-значная норма $\lvert\cdot\rvert$ в X является ограниченным спуском нормы банаховой решетки $\mathscr{X}$. Отсюда легко усмотреть, что $[\![\mathscr{X}$ имеет свойство расщепления$]\!] = \mathbb{1}$ равносильно следующему утверждению: для любых $x, y, z \in X_+$, удовлетворяющих неравенствам $\lvert x\rvert \le \mathbb{1}$, $\lvert y\rvert \le \mathbb{1}$ и $\lvert x+y+z\rvert \le 2\mathbb{1}$, существуют такие $u, v \in X_+$, что $z = u + v$, $\lvert x+u\rvert \le \mathbb{1}$ и $\lvert y+v\rvert \le \mathbb{1}$. Но последнее, в свою очередь, равносильно свойству расщепления в X, так как соотношения $\lvert x\rvert \le C\mathbb{1}$ и $\|x\|_X = \|\,\lvert x\rvert\,\|_\infty \le C$ равносильны.

(2) Поскольку Λ-значная норма $\lvert\cdot\rvert$ в X совпадает с ограниченным спуском нормы $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, а решеточная операция $(x, y) \mapsto x \vee y$ в X — с ограничением на X^2 спуска аналогичной операции в $\mathscr{X}$, то $[\![\,\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ служит M-нормой$]\!] = \mathbb{1}$ в том и только в том случае, когда $\lvert x \vee y\rvert = \lvert x\rvert \vee \lvert y\rvert$ для всех $x, y \in X_+$. Отсюда выводим $\|x \vee y\|_X = \|\,\lvert x\vee y\rvert\,\|_\infty = \|\,\lvert x\rvert\,\|_\infty \vee \|\,\lvert y\rvert\,\|_\infty = \|x\|_X \vee \|y\|_X$, так как $(\Lambda, \|\cdot\|_\infty)$ является AM-пространством. Обратно, если X — это AM-пространство, но при этом $\lvert x \vee y\rvert > \lvert x\rvert \vee \lvert y\rvert$ для некоторых $x, y \in X$, то можно выбрать строго положительное $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и порядковый проектор $\pi \in \mathbb{P}(\Lambda)$ такие, что

$$\lvert \pi x \vee \pi y\rvert - \epsilon\pi\mathbb{1} = \pi(\lvert x \vee y\rvert - \epsilon\mathbb{1}) \ge \pi(\lvert x\rvert \vee \lvert y\rvert) = \lvert \pi x\rvert \vee \lvert \pi y\rvert.$$

Отсюда вытекает противоречивая оценка

$$\|\pi x \vee \pi y\| - \varepsilon = \|\,\lvert \pi x \vee \pi y\rvert - \varepsilon\pi\mathbb{1}\|_\infty \ge \|\,\lvert \pi x\rvert \vee \lvert \pi y\rvert\,\|_\infty = \|\pi x\| \vee \|\pi y\| = \|\pi x \vee \pi y\|.$$

(3) В силу принципа переноса и теоремы 2.4 можно утверждать, что $[\![\mathscr{X}$ является AL-пространством в том и только в том случае, если $\mathscr{X}$ инъективна и $\mathbb{M}(\mathscr{X}) = \{0, I_X\}]\!] = \mathbb{1}$. Значит, требуемый результат следует непосредственно из (1) и теоремы 3.1. $\rhd$

Следствие 4.2. *Ненулевая банахова решетка X со свойствами Леви и Фату инъективна в том и только в том случае, когда ее представление в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, где $\mathbb{B}$ изоморфна полной булевой алгебре $\mathbb{M}(X)$, является AL-пространством*[3]*.*

Определение 4.3. Говорят, что положительный оператор T из векторной решетки X в векторную решетку Y имеет *свойство Леви,* если $Y = T(X)^{\perp\perp}$ и $\sup x_\alpha$ существует в X для любой возрастающей сети $(x_\alpha) \subset X_+$, если только сеть (Tx_α) порядково ограничена в Y. *Оператором Магарам* называют порядково непрерывный оператор $T : X \to Y$, сохраняющий интервалы, т. е. $T([0, x]) = [0, Tx]$ для всех $x \in X_+$ (см. [9, 3.4.1]). Λ-значную норму $\lvert\cdot\rvert$ на векторной решетке X называют *аддитивной,* если $\lvert x + y\rvert = \lvert x\rvert + \lvert y\rvert$ для всех $x, y \in X_+$.

Рассмотрим векторные решетки X и Y, причем будем предполагать, что Y порядково полна. Пусть оператор $\Phi \in L_+(X, Y)$ строго положителен, т. е. $x > 0$ влечет $\Phi(x) > 0$ для всех $x \in X$. Положим $\lvert x\rvert := \Phi(|x|)$ $(x \in X)$. Тогда $(X, \lvert\cdot\rvert)$ — решеточно нормированное пространство с аддитивной нормой. Обозначим символом $L^1(\Phi)$ пространство Банаха — Канторовича, возникающее как *bo*-пополнение пространства $(X, \lvert\cdot\rvert)$ (см. [9, теоремы 2.2.8 и 2.2.11]). При этом $L^1(\Phi) = X$ лишь в том случае, когда Φ — строго положительный оператор Магарам со свойством Леви (см. [9, 3.5.1]).

[3] Нулевая банахова решетка $X = \{0\}$ формально инъективна, но для нее утверждение следствия некорректно, так как булева алгебра $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X) = \{0\}$ и универсум $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ в этом случае вырожденны. Во всех аналогичных ситуациях X по умолчанию предполагается ненулевым.

Теорема 4.4. *Предположим, что X — банахова решетка, $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра, Λ — порядково полное AM-пространство с единицей такое, что булевы алгебры $\mathbb{P}(\Lambda)$ и $\mathbb{B}$ изоморфны. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) *X инъективна и булева алгебра $\mathbb{M}(X)$ изоморфна $\mathbb{B}$;*

(2) *X решеточно изометрична ограниченному спуску некоторого ненулевого AL-пространства из модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$;*

(3) *существует строго положительный оператор Магарам $\Phi : X \to \Lambda$ со свойством Леви такой, что $\|x\|_X = \|\Phi(|x|)\|_\infty$ для всех $x \in X$;*

(4) *существует Λ-значная аддитивная норма $⦀\cdot⦀$ на X такая, что $(X, ⦀\cdot⦀)$ — решетка Банаха — Канторовича, $⦀X⦀^{\perp\perp} = \Lambda$ и $\|x\|_X = \|\,⦀x⦀\,\|_\infty$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) Вытекает из следствия 4.2 и теоремы 4.1(3).

(2) $\Longrightarrow$ (3) Предположим, что булевозначное представление $\mathscr{X}$ банаховой решетки X является AL-пространством внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Работая внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ и используя принцип переноса, найдем строго положительный порядково непрерывный функционал $\phi : \mathscr{X} \to \mathscr{R}$ со свойством Леви, для которого $\|x\|_{\mathscr{X}} = \phi(|x|)$ при всех $x \in \mathscr{X}$. Спуск $\Phi' := \phi{\downarrow}$ оператора Φ, а значит, и его ограничение $\Phi := \Phi'|_X : X \to \Lambda$, представляет собой строго положительный оператор Магарам со свойством Леви (см. [21; 9, теорема 3.6.4(4)]. Поскольку $⦀\cdot⦀ = (\|\cdot\|_{\mathscr{X}}){\downarrow}$, получаем $⦀x⦀ = \Phi(|x|)$ для всех $x \in X$. По определению ограниченного спуска имеем $\|x\|_X = \|\,⦀x⦀\,\|_\infty = \|\Phi(|x|)\|_\infty$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Если выполняется (3), то Λ-значная аддитивная норма на X определяется формулой $⦀x⦀ := \Phi(|x|)$ $(x \in X)$. Тот факт, что $(X, ⦀\cdot⦀)$ — пространство Банаха — Канторовича, следует из [9, 3.5.1–3.5.3].

(4) $\Longrightarrow$ (2) Следует непосредственно из теорем 2.6, 3.1 и 4.1(3). $\rhd$

Следствие 4.5. *Если Φ — строго положительный оператор Магарам со свойством Леви, принимающий значения из порядково полного AM-пространства с единицей Λ, и $⦀x⦀ = \|\Phi(|x|)\|_\infty$ $(x \in L^1(\Phi))$, то $(L^1(\Phi), ⦀\cdot⦀)$ — инъективная банахова решетка, причем существует булев изоморфизм φ из $\mathbb{B} := \mathbb{P}(\Lambda)$ на $\mathbb{M}(L^1(\Phi))$ такой, что $\pi \circ \Phi = \Phi \circ \varphi(\pi)$ для всех $\pi \in \mathbb{B}$. Обратно, произвольная инъективная банахова решетка X с булевой алгеброй M-проекторов $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$ решеточно $\mathbb{B}$-изометрична $(L^1(\Phi), ⦀\cdot⦀)$ для некоторого строго положительного оператора Магарам Φ со свойством Леви, принимающего значения из порядково полного AM-пространства с единицей $\Lambda = \Lambda(\mathbb{B})$.*

Следствие 4.6. *Инъективная банахова решетка X имеет порядково $\mathbb{B}$-непрерывную норму для любой полной булевой алгебры M-проекторов $\mathbb{B} \subset \mathbb{M}(X)$.*

Доказательство следует непосредственно из 3.6(3) и 4.4(2). $\rhd$

Оператор Магарам Φ в теореме 4.4(3) и следствии 4.5 не единствен. Если σ — автоморфизм полной булевой алгебры $\mathbb{B}$, то существует единственный решеточный изоморфизм $\hat\sigma$ решетки $\Lambda = \Lambda(\mathbb{B})$ на себя такой, что $\hat\sigma(\pi\mathbb{1}) = \sigma(\pi)\mathbb{1}$. Этот изоморфизм $\hat\sigma$ называют *сдвигом* посредством σ. Путь даны сдвиг $\hat\sigma$ посредством некоторого автоморфизма σ и обратимый положительный ортоморфизм β в $L^1(\Phi)$. Тогда $\Psi = \hat\sigma \circ \Phi \circ \beta$ — строго положительный оператор Магарам со свойством Леви, причем $L^1(\Phi) = L^1(\Psi)$. Более того, если β является изометрией, то банаховы решетки $L^1(\Phi)$ и $L^1(\Psi)$ совпадают:

$$\|\Psi(|x|)\|_\infty = \|\hat\sigma \circ \Phi(|\beta x|)\|_\infty = \|\Phi(|\beta x|)\|_\infty = \|\beta x\| = \|x\| = \|\Phi(|x|)\|_\infty.$$

Следующий результат утверждает, что этот пример исчерпывающий.

Теорема 4.7. *Пусть X — инъективная банахова решетка, а $\Phi,\Psi : X \to \Lambda$ — строго положительные операторы Магарам со свойством Леви, для которых $\|\Phi(|x|)\|_\infty = \|x\|_X = \|\Psi(|x|)\|_\infty$ при всех $x \in X$. Тогда существуют автоморфизм σ булевой алгебры $\mathbb{B}$ и обратимый положительный изометрический ортоморфизм β в X такие, что $\Psi = \hat{\sigma} \circ \Phi \circ \beta$.*

Доказательство. Если выполнены указанные выше предположения, то $\Phi(X) = \Lambda = \Psi(X)$ и по следствию 4.5 существуют булевы изоморфизмы $\varrho, \tau : \mathbb{B} \to \mathbb{M}(X)$ такие, что $\pi \circ \Phi = \Phi \circ \varrho(\pi)$ и $\pi \circ \Psi = \Psi \circ \tau(\pi)$ для всех $\pi \in \mathbb{B}$. Заметим, что $\sigma := \tau^{-1} \circ \varrho$ представляет собой автоморфизм булевой алгебры $\mathbb{B}$. Пусть $\hat{\sigma}$ — соответствующий сдвиг в Λ. Как видно из определений (см. [9, 5.3.2, 5.3.3]), $\hat{\sigma}(\pi\lambda) = \sigma(\pi)\hat{\sigma}(\lambda)$ для всех $\pi \in \mathbb{B}$ и $\lambda \in \Lambda$. Положим $\Phi_1 = \hat{\sigma} \circ \Phi$ и заметим, что Φ_1 — строго положительный оператор Магарам со свойством Леви. Более того, Ψ абсолютно непрерывен относительно Φ_1. Действительно, для $\pi \in \mathbb{B}$ и $x \in X$ имеем

$$\sigma(\pi)\Phi_1(x) = \sigma(\pi)\hat{\sigma}(\Phi(x)) = \hat{\sigma}(\pi\Phi(x)) = \hat{\sigma}(\Phi(\varrho(\pi)x)) = \Phi_1(\varrho(\pi)x) = \Phi_1(\tau\sigma(\pi)x),$$

следовательно, $\pi \circ \Phi_1 = \Phi_1 \circ \tau(\pi)$ $(\pi \in \mathbb{B})$. Если теперь $\pi\Phi_1(x) = 0$ для некоторых $\pi \in \mathbb{B}$ и $x \in X_+$, то $\Phi_1(\tau(\pi)x) = 0$ и $\tau(\pi)x = 0$, так как оператор Φ_1 строго положителен. Отсюда следует, что $\pi\Psi(x) = \Psi(\tau(\pi)x) = 0$, а значит, $\Psi(x) \in \Phi_1(x)^{\perp\perp}$ для всех $x \in X_+$. По теореме Люксембурга — Шэпа [9, теорема 3.4.9] существует последовательность положительных ортоморфизмов (β_n) в X такая, что $\Psi(x) = \sup\limits_n \Phi_1(\beta_n x)$ для любого $x \in X_+$. Поскольку Φ_1 имеет свойство Леви, равенство $\beta = \sup\limits_n \beta_n$ корректно определяет положительный ортоморфизм в X. Более того, $\Psi(x) = \Phi_1(\beta x)$ $(x \in X)$ или $\Psi = \hat{\sigma} \circ \Phi \circ \beta$ ввиду порядковой непрерывности Φ_1. Обратимость β следует из строгой положительности оператора Ψ, а изометричность β равносильна условию $\|\Phi(|x|)\|_\infty = \|\Psi(|x|)\|_\infty$ $(x \in X)$. ▷

Замечание 4.8. Если Φ и Ψ те же, что и в теореме 4.7, то нормы $x \mapsto \|\Phi(|x|)\|_\infty$ и $x \mapsto \|\Psi(|x|)\|_\infty$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\Psi = \hat{\sigma}\circ\Phi\circ\beta$ для некоторых автоморфизма σ булевой алгебры $\mathbb{B}$ и обратимого положительного ортоморфизма β в X.

Рассмотрим инъективную банахову решетку, представленную как $L^1(\Phi)$. Обозначим символом $L^0(\Phi)$ универсальное пополнение векторной решетки $L^1(\Phi)$ с фиксированной порядковой единицей $\mathbb{1}$. В $L^0(\Phi)$ существует единственная структура полупростой f-алгебры, кольцевая единица которой совпадает с $\mathbb{1}$. Пусть $L_\infty(\Phi)$ обозначает порядковый идеал в $L^0(\Phi)$, порожденный элементом $\mathbb{1}$, который снабдим соответствующей M-нормой. Для непустого $X \subset L^0(\Phi)$ определим множество $X' \subset L^0(\Phi)$ формулой $X' := \{x' \in L^0(\Phi) : x' \cdot X \subset L^1(\Phi)\}$. Если X и L — порядково плотные идеалы в $L^0(\Phi)$, то между $\mathbb{P}(X)$ и $\mathbb{P}(L)$ существует *канонический изоморфизм*, при котором проекторы из $\mathbb{P}(X)$ и $\mathbb{P}(L)$ соответствуют друг другу лишь в том случае, когда они имеют общее продолжение на $L^0(\Phi)$.

Теорема 4.9. *Пусть X — некоторая $\mathbb{B}$-циклическая банахова решетка с порядково $\mathbb{B}$-непрерывной нормой, X^u — ее универсальное пополнение. Существует порядково плотный идеал L в X^u, являющийся инъективной банаховой решеткой, причем булевы алгебры $\mathbb{M}(L)$ и $\mathbb{B}$ канонически изоморфны. Более того, если $L = L^1(\Phi)$ для некоторого строго положительного оператора Магарам $\Phi : L \to \Lambda = \Lambda(\mathbb{B})$ со свойством Леви, то отображение, сопоставляющее* *оператор*

$$S_{x'} : X \to \Lambda, \quad S_{x'} : x \mapsto \Phi\,(x \cdot x') \quad (x \in X)$$

элементу $x' \in X'$, *является решеточной* $\mathbb{B}$-*изометрией из* X' *на* $X^{\#}$.

Доказательство. Булевозначное представление $\mathscr{X}$ решетки X представляет собой банахову решетку с порядково непрерывной нормой внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ (см. теорему 3.6). Работая внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, можем подобрать строго положительный порядково непрерывный функционал $\phi : L^1(\phi) \to \mathscr{R}$ со свойством Леви, где $L^1(\phi)$ — порядково плотный идеал в максимальном расширении $\mathscr{X}^u$ решетки $\mathscr{X}$. Положим $\mathscr{X}' := \{x \in \mathscr{X}^u : x \cdot \mathscr{X} \subset L^1(\phi)\}$. Каждому элементу $x' \in \mathscr{X}'$ поставим в соответствие функционал $\sigma_{x'} : x \mapsto \phi(xx')$ $(x \in \mathscr{X})$. Тем самым получим решеточный изоморфизм из $\mathscr{X}'$ на дуальное пространство $\mathscr{X}^*$. Легко видеть, что $\mathscr{X}^u{\downarrow} = X^u$. Определим Φ как ограничение $\phi{\downarrow}$ на $L := L^1(\Phi) = \{x \in X^u : \phi{\downarrow}(x) \in \Lambda\}$. Как видно, Φ — строго положительный оператор Магарам со свойством Леви, стало быть, $L^1(\phi){\Downarrow} = L^1(\Phi)$. Остается заметить, что отождествление X с порядковым идеалом $\mathscr{X}{\Downarrow}$ позволяет написать $\mathscr{X}^*{\Downarrow} = X^{\#}$, $\mathscr{X}'{\Downarrow} = X'$ и $S_{x'} = \sigma_{x'}{\Downarrow} = \sigma_{x'}{\downarrow}|_X$. $\rhd$

Следствие 4.10. *Произвольная инъективная банахова решетка X с булевой алгеброй M-проекторов $\mathbb{B} := \mathbb{M}(X)$ решеточно $\mathbb{B}$-изометрична $\mathscr{L}_{\mathbb{B}}^{\times}(\mathscr{Z}(X), \Lambda)$, где $\Lambda = \Lambda(\mathbb{B})$. Если X представлено в виде $L^1(\Phi)$ для строго положительного оператора Магарам $\Phi : X \to \Lambda$ со свойством Леви, то решеточная $\mathbb{B}$-изометрия сопоставляет элементу $x \in X$ оператор $S_x : \pi \mapsto \Phi(\pi x)$ $(\pi \in \mathscr{Z}(X))$.*

Доказательство. Положим $X := L^1(\Phi)$ в теореме 4.9. Тогда $\mathscr{X} = L^1(\phi)$ и, стало быть, $\mathscr{X}' = L^\infty(\phi)$. Отсюда выводим $X' = \mathscr{X}'{\Downarrow} = L^\infty(\phi){\Downarrow} = L^\infty(\Phi)$. Остается заметить, что $L^\infty(\Phi)$ и $\mathscr{Z}(X)$ решеточно $\mathbb{B}$-изометричны и $X^{\#} = \mathscr{L}_{\mathbb{B}}^{\times}(X, \Lambda)$ по следствию 3.7. $\rhd$

Следствие 4.11. *Возьмем инъективную банахову решетку X. Если E и Λ — порядково полные AM-пространства с единицей такие, что $\mathbb{B} := \mathbb{P}(\Lambda) \simeq \mathbb{M}(X)$ и $\mathbb{P}(E) \simeq \mathbb{P}(X)$, то X решеточно $\mathbb{B}$-изометрична $\mathscr{L}_{\mathbb{B}}^{\times}(E, \Lambda)$.*

Замечание 4.12. Теорема 4.4 позволяет указать полную систему инвариантов, определяющих инъективную банахову решетку с точностью до решеточной изометрии, и получить представление инъективных банаховых решеток в виде прямой суммы банаховых решеток непрерывных вектор-функций (см. [22]).

Замечание 4.13. Следствие 4.10, по существу, основная теорема о представлении Хейдона [7, теорема 5C]. Другой результат Хейдона о представлении [7, теорема 6H] утверждает, что инъективную банахову решетку можно представить в виде $L^1(\mathbf{m})$ для некоторой Λ-значной модулярной меры Магарам $\mathbf{m}$. Этот факт легко выводится из нашей реализационной теоремы 4.4, поскольку отображение $\Phi : L^1(\mathbf{m}) \to \Lambda$, определенное как $\Phi : f \mapsto \int f\,d\mathbf{m}$, представляет собой оператор Магарам со свойством Леви и $L^1(\mathbf{m}) = L^1(\Phi)$ (см. [9, теорема 6.1.10]). Третий результат Хейдона о представлении [7, теорема 7B] можно также вывести из теоремы 4.4, используя представление пространств Банаха — Канторовича посредством непрерывных банаховых расслоений (см. [9, § 2.4]).

5. Примеры инъективных банаховых решеток

Теорема 4.4 и следствие 4.5 доставляют множество примеров инъективных банаховых решеток. Пусть X и Y — порядково полные векторные решетки, а $\Phi : X \to Y$ — строго положительный оператор Магарам со свойством Леви. Обозначим через $Y(e)$ и $\|\cdot\|_e := \|\cdot\|_\infty$ соответственно порядковый идеал в Y и M-норму в $Y(e)$, ассоциированные с элементом $e \in Y_+$. Тогда векторная решетка $L^1(\Phi, e) := \{x \in X : \Phi(|x|) \in Y(e)\}$ со смешанной нормой $\|x\| := \|\Phi(|x|)\|_e$ представляет собой инъективную банахову решетку. Обозначим символом $\mathscr{C}(e)$ булеву алгебру осколков элемента e, т. е. $\mathscr{C}(e) := \{d \in Y_+ : d \wedge (e-d) = 0\}$.

Теорема 5.1. *Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, Y — некоторое КВ-пространство, $e \in Y_+$ и $I_\mu : x \mapsto \int\limits_\Omega x(\omega)\,d\mu(\omega)$ $(x \in L^1(\mu, Y))$ — интеграл Бохнера. Тогда пространство $L^1(\mu, Y, e) := \{x \in L^1(\mu, Y) : I_\mu(|x|) \in Y(e)\}$, снабженное нормой $\|x\| := \|I_\mu(|x|)\|_e$, будет инъективной банаховой решеткой, причем $\mathbb{M}(L^1(\mu, Y, e)) \simeq \mathscr{C}(e)$.*

Доказательство. Порядковая непрерывность нормы в Y влечет, что норма в $L^1(\mu, Y)$ также порядково непрерывна [23], но тогда и оператор I_μ порядково непрерывен. Так как Y имеет свойство Леви, $L^1(\mu, Y)$ также имеет свойство Леви [24], следовательно, I_μ — оператор со свойством Леви (в смысле определения 4.3). Теперь требуемое немедленно вытекает из следствия 4.5, так как I_μ, очевидно, сохраняет интервалы. $\triangleright$

Пусть E, F и G — архимедовы векторные решетки, причем F порядково полна, и $h : G \to E$ — решеточный гомоморфизм. Напомним, что $L^r(E, F)$ обозначает векторную решетку всех регулярных операторов из E в F. Возьмем положительный оператор $S : G \to F$, обозначим символом Λ_S порожденный им порядковый идеал в векторной решетке $L^r(G, F)$ и снабдим Λ_S M-нормой $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_S$, ассоциированной с единицей S. Обозначим символом $L^r(E|h, F|S)$ множество всех $T \in L^r(E, F)$, для которых $|T| \circ h \in \Lambda_S$. Как видно, $L^r(E|h, F|S)$ — идеал в $L^r(E, F)$, причем оператор $T \in L^r(E, F)$ входит в $L^r(E|h, F|S)$ в том и только в том случае, когда существует $C \in \mathbb{R}_+$ такое, что $|Tx| \le CS(|y|)$, при условии, что $x \in E$, $y \in G$ и $|x| \le h(|y|)$. Для $T \in L^r(E|h, F|S)$ положим

$$\|T\|_S := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ : \ |Tx| \le \lambda S|y| \ (\forall\,(x, y) \in E \times G,\ |x| \le h(|y|))\}.$$

Теорема 5.2. *Пусть E, F и G — векторные решетки, а $h : G \to E$ — решеточный гомоморфизм, причем F порядков полна, а $h(G)$ — мажорирующая подрешетка в E. Тогда векторная решетка $L^r(E|h, F|S)$, снабженная нормой $\|\cdot\|_S$, будет инъективной банаховой решеткой и $\mathbb{M}(L^r(E|h, F|S))$ изоморфна булевой алгебре осколков $\mathscr{C}(S)$.*

Доказательство. Оператор композиции справа $R_h : T \mapsto T \circ h$, действующий из $L^r(E, F)$ в $L^r(G, F)$, сохраняет интервалы (см. [1, следствие 1.2]). Кроме того, непосредственно проверяется, что R_h строго положителен, порядково непрерывен и имеет свойство Леви. Заметим также, что ограничение R_h на $L^r(E|h, F|S)$ принимает свои значения из Λ_S и $\|T\|_S = \|R_h(|T|)\|_\infty$ для любого $T \in L^r(E|h, F|S)$. Теперь требуемое следует из теоремы 4.4. $\triangleright$

Если G — векторная подрешетка E и h — вложение G в E, то R_h — оператор ограничения $T \mapsto T|_G$, действующий из $L^r(E|G, F|S) := L^r(E|h, F|S)$ в Λ_S. Как видно, оператор $T \in L^r(E, F)$ входит в $L^r(E|G, F|S)$ в том и только том случае, если существует $C \in \mathbb{R}_+$ такое, что $|Tx| \le CS(|y|)$ для всех $x \in E$ и $y \in G$, $|x| \le |y|$.

Следствие 5.3. *Пусть E, F и G — векторные решетки, причем F порядково полна, а G — мажорирующая подрешетка E. Тогда $(L^r(E|G,F|S), \|\cdot\|_S)$ — инъективная банахова решетка и $\mathbb{M}(L^r(E|G,F|S))$ изоморфна булевой алгебре осколков $\mathscr{C}(S)$.*

Предположим, что $F = G$ и $S = I_G$. Операторы из $L^r(E|G,F|S)$ принято называть *центральными относительно* G, причем используют обозначения $Z(E|G) := L^r(E|G,F|S)$ и $\|\cdot\|_n := \|\cdot\|_S$ (см. [25, определения 2.1, 2.2]). Более того, $\|\cdot\|_n$ называют *естественной нормой* в $Z(E|G)$ (см. [25, определение 4.1]. Для этого частного случая получаем следующий слегка усиленный результат Викстеда [25, теорема 5.2, проблема 5.3].

Следствие 5.4. *Пусть E — векторная решетка, а G — порядково полная мажорирующая подрешетка E. Тогда $Z(E|G)$ с естественной нормой является инъективной банаховой решеткой и $\mathbb{M}(Z(E|G))$ изоморфна $\mathbb{P}(G)$.*

Теорема 5.5. *Пусть Λ — порядково полное AM-пространство с единицей и $\mathscr{A}$ — булева алгебра с единицей $\mathbb{1}$. Тогда порядково полная векторная решетка $ba(\mathscr{A},\Lambda)$ всех Λ-значных порядково ограниченных конечно аддитивных мер на $\mathscr{A}$, снабженное нормой $\|\nu\| := \||\nu|(\mathbb{1})\|_\infty$ $(\nu \in ba(\mathscr{A}\Lambda))$, где $|\nu|(\mathbb{1}) \in \Lambda_+$ — полная вариация ν, является инъективной банаховой решеткой и $\mathbb{M}(ba(\mathscr{A},\Lambda)) \simeq \mathbb{P}(\Lambda)$.*

Доказательство. Ясно, что $ba(\mathscr{A},\Lambda)$ — порядково полная векторная решетка, поскольку $ba(\mathscr{A},\Lambda)$ как упорядоченное векторное пространство изоморфно некоторому пространству регулярных операторов (см. [9, 4.2.8, 4.2.9]). Поэтому в соответствии с теоремой 4.4(4) нужно лишь доказать, что $ba(\mathscr{A},\Lambda)$ представляет собой пространство Банаха — Канторовича с аддитивной Λ-значной нормой. Очевидно, что Λ-значная норма, определенная формулой $\lvert\!\lvert\nu\rvert\!\rvert := |\nu|(\mathbb{1})$, аддитивна на конусе положительных мер. Кроме того, она разложима. В самом деле, если $\lvert\!\lvert\nu\rvert\!\rvert = \lambda_1 + \lambda_2$ для некоторых $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_+$, то $\lambda_k = \alpha_k \lvert\!\lvert\nu\rvert\!\rvert$ для подходящих ортоморфизмов $0 \le \alpha_1, \alpha_2 \le I_\Lambda$, $\alpha_1 + \alpha_2 = I_\Lambda$, и, полагая $\nu_k := \alpha_k \nu$, получим $\nu = \nu_1 + \nu_2$ и $\lvert\!\lvert\nu_k\rvert\!\rvert = |\alpha_k \nu|(\mathbb{1}) = \alpha_k|\nu|(\mathbb{1}) = \lambda_k$ $(k := 1,2)$. Для любого ограниченного семейства $(\nu_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $ba(\mathscr{A},\Lambda)$ и любого разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathbb{P}(\Lambda)$ сумма $\nu(A) := o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \pi_\xi \nu_\xi(A)$ существует. Более того, ν — единственный элемент в $ba(\mathscr{A},\Lambda)$ удовлетворяющий соотношениям $\pi_\xi\nu = \pi_\xi\nu_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. В силу [6, теорема 2.2.3] остается доказать равномерную полноту $ba(\mathscr{A},\Lambda)$, которая проверяется стандартными рассуждениями. ▷

Конструкция магарамова расширения положительного оператора [9, § 4.5] вместе со следствием 4.5 позволяет связать инъективную банахову решетку с каждым положительным оператором со значениями в порядково полном AM-пространстве с единицей. Если M — множество в векторной решетке X, то символом $M^{\downarrow}$ обозначаем совокупность всех элементов $x \in X$ вида $x = \inf(A)$, где A — направленное вниз подмножество M. Множество $M^{\uparrow}$ определяется аналогично с учетом направленности вверх множества. Полагаем также $M^{\downarrow\uparrow} := (M^{\downarrow})^{\uparrow}$. Обозначим символом $\mathscr{Z}_m(X)$ порядково замкнутую f-подалгебру центра $\mathscr{Z}(X)$, порожденную множеством проекторов $\mathbb{M}(X)$.

Определение 5.6. Подпространство X_0 $\mathbb{B}$-циклического банахова пространства X называют $\mathbb{B}$-*плотным,* если для любых $x \in X$ и $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ существуют $x_\varepsilon \in X$, разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в $\mathbb{M}(X)$ и семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в X_0 такие, что $\|x - x_\varepsilon\| \le \varepsilon$ и $\pi_\xi x_\varepsilon = \pi_\xi x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$.

Теорема 5.7. *Пусть E — векторная решетка, Λ — порядково полное AM-пространство с единицей и $\Phi : E \to \Lambda$ — линейный строго положительный оператор. Существует единственная (с точностью до линейной изометрии) инъективная банахова решетка X, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *булевы алгебры $\mathbb{M}(X)$ и $\mathbb{P}(\Lambda)$ изоморфны;*

(2) *существуют решеточный изоморфизм $\iota : E \to X$ и изоморфизм f-алгебр h из $\mathscr{Z}(\Lambda)$ на $\mathscr{Z}_m(X)$ такие, что $\|\sigma\Phi(x)\|_\infty = \|h(\sigma)\iota(x)\|$ $(x \in E_+,\ \sigma \in \mathscr{Z}(\Lambda)_+)$;*

(3) *множество $\iota(E)$ $\mathbb{B}$-плотно в X;*

(4) *$X = X_0^{\downarrow\uparrow}$, где X_0 состоит из всех конечных сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \pi_k \iota(x_k)$, где $\pi_k \in \mathbb{M}(X)$ и $x_k \in E$ $(k = 1, \dots, n \in \mathbb{N})$.*

Доказательство. Магарамово продолжение $\widetilde{\Phi}$ оператора Φ является строго положительным оператором Магарам со свойством Леви (см. [9, предложения 3.5.1, 3.5.3, теорема 3.5.2]). Если $X = L^1(\widetilde{\Phi})$ — область определения $\widetilde{\Phi}$ и $\|x\| = \|\widetilde{\Phi}(|x|)\|_\infty$ $(x \in X)$, то X — инъективная банахова решетка по теореме 4.4. Условия (1)–(4) немедленно вытекают из [9, 3.5.1, 3.5.8(1)].

Можно дать другое доказательство, интерпретируя в булевозначном универсуме $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ хорошо известную конструкцию, позволяющую строить AL-пространство $(E^\varphi, \|\cdot\|^\varphi)$, исходя из строго положительного линейного функционала $\varphi \in E^\sim$ (см., например, [11, предложение 2.5.16]). Для этой цели нужно заметить, что a) стандартное имя $E^\wedge$ решетки E есть векторная решетка над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$; б) модифицированный подъем $\varphi = \Phi\!\uparrow$ оператора Φ — строго положительный $\mathbb{Q}^\wedge$-линейный функционал на $E^\wedge$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$; c) предложение 2.5.16 из [11] остается в силе для векторной решетки E над $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}$-линейного $\varphi : E \to \mathbb{R}$. Подробности см. в [12, § 5.5]. $\triangleright$

Теорема 5.8. *Предположим, что X и Y — инъективные банаховы решетки. Пусть σ — порядково непрерывный булев гомоморфизм из $\mathbb{P}(X)$ в $\mathbb{P}(Y)$, индуцирующий булев изоморфизм $\mathbb{M}(X)$ на $\mathbb{M}(Y)$. Тогда существует единственный положительный порядково непрерывный линейный оператор $P_\sigma : Y \to X$ такой, что $\|\pi P_\sigma(y)\|_X = \|\sigma(\pi)y\|_Y$ для всех $\pi \in \mathbb{P}(X)$ и $y \in Y_+$. Более того, P_σ — оператор Магарам, $\|P_\sigma\| \le 1$ и $\pi P_\sigma y = P_\sigma(\sigma(\pi)y)$ для всех $\pi \in \mathbb{P}(X)$ и $y \in Y$.*

Доказательство. Обозначим символом $\hat{\sigma}$ единственный Λ-линейный порядково непрерывный гомоморфизм f-алгебр из $\mathscr{Z}(X)$ в $\mathscr{Z}(Y)$, расширяющий σ. В соответствии со следствием 4.5 можно предположить, что $X = L^1(\Phi)$ и $Y = L^1(\Psi)$ для строго положительных операторов Магарам $\Phi : X \to \Lambda$ и $\Psi : Y \to \Lambda$, обладающих свойством Леви, причем $\|x\|_X = \|\Phi(|x|)\|_\infty$ и $\|y\|_X = \|\Psi(|y|)\|_\infty$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Для фиксированного $y \in Y$ определим оператор $\Phi_y : \mathscr{Z}(X) \to \Lambda$ формулой $\Phi_y(\rho) = \Psi(\hat{\sigma}(\rho)y)$. Как видно, Φ_y будет Λ-линейным и порядково непрерывным как композиция таких операторов. По следствию 4.10 существует единственный $x \in X$ такой, что $\Phi(\rho x) = \Phi_y(\rho) = \Psi(\hat{\sigma}(\rho)y)$ для всех $\rho \in \mathscr{Z}(X)$. Определим $P_\sigma := P : Y \to X$, полагая $Py := x$, и заметим, что $\Phi(\rho P y) = \Psi(\hat{\sigma}(\rho)y)$ для всех $y \in Y$ и $\rho \in \mathscr{Z}(X)$. Последнее соотношение влечет, что P линеен, поскольку $Py_1 + Py_2$ и tPy удовлетворяют условиям, определяющим $P(y_1 + y_2)$ и $P(ty)$ соответственно. Кроме того, для произвольных $\pi \in \mathscr{Z}(X)_+$ и $y \in Y_+$ имеем $\|\pi P(y)\|_X = \|\Phi(\pi P y)\|_\infty = \|\Psi(\hat{\sigma}(\pi)y)\|_\infty = \|\hat{\sigma}(\pi)y\|_Y$. Далее, если $Py \notin X_+$ для некоторого положительного $y \in Y$, то найдется порядковый проектор ρ в X такой, что $\rho P y < 0$, и приходим к противоречию с тем, что $0 > \Phi(\rho P y) = \Psi(\hat{\sigma}(\rho)y) \ge 0$. Порядковая непрерывность P легко усматривается из следствия 4.6 с учетом равенства $\|P_\sigma(y)\|_X = \|\pi y\|_Y$ $(y \in Y_+)$ и свойства σ.

Допустим, что положительный оператор $P_1 : Y \to X$ удовлетворяет условию $\|\pi P_1(y)\|_X = \|\sigma(\pi)y\|_Y$ для $\pi \in \mathbb{P}(X)$ и $y \in Y_+$. Отождествляя булевы алгебры $\mathbb{B}$ и $\mathbb{M}(X)$, получаем $\|\rho\Phi(\pi P_1(y))\|_\infty = \|\rho\Phi(\pi P(y))\|_\infty$ для всех $\rho \in \mathbb{B} \subset \mathbb{P}(X)$ и, следовательно, $\Phi(\pi(P_1(y) - P(y))) = 0$ для всех $\pi \in \mathbb{P}(X)$, т. е. $P_1 y = Py$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\pi P y = P(\sigma(\pi)y)$ для $\pi \in \mathbb{P}(X)$ и $y \in Y$, стало быть, $\pi P y = P(\hat\sigma(\pi)y)$ также для всех $\pi \in \mathscr{Z}(X)$ и $y \in Y$. Отсюда следует, что P обладает свойством Магарам. Действительно, если $0 \leq x_0 \leq Py$ для некоторого $y \in Y_+$, то существует такой $\pi \in \mathscr{Z}(X)_+$, что $x_0 = \pi P y$, значит, $x_0 = P(y_0)$ для $y_0 := \hat\sigma(\pi)y$. Оставшаяся часть доказательства легко выводится из соотношения $\Phi(\rho P y) = \Psi(\hat\sigma(\rho)y)$. $\triangleright$

Следствие 5.9. *Пусть Y — инъективная банахова решетка, $\mathbb{B} = \mathbb{M}(Y)$ и X — порядково замкнутая $\mathbb{B}$-инвариантная подрешетка Y. Тогда X с индуцированной нормой также является инъективной банаховой решеткой и $\mathbb{M}(X) = [\mathbb{0}, \omega^*]$, где $\omega = \bigvee\{\pi \in \mathbb{B} : \pi|_X = 0\}$. Более того, если X имеет слабую порядковую единицу, то существует порядково непрерывный положительный проектор $\mathscr{E}$ в Y на X такой, что $\pi \circ \mathscr{E} = \mathscr{E} \circ \pi$ и $\|\hat\sigma(\rho)y\| = \|\rho\mathscr{E}y\|$ для всех $\pi \in \mathbb{B}$, $y \in Y_+$ и $\rho \in \mathscr{Z}(X)_+$, где $\hat\sigma(\rho)$ — единственное продолжение ρ на все Y, обращающееся в нуль на $X^\perp$.*

Доказательство. Если $Y = L^1(\Phi)$ для строго положительного оператора Магарам $\Phi : Y \to \Lambda$ со свойством Леви, то таким же будет и ограничение $\Psi := \Phi|_X$, стало быть, банахова решетка $X = L^1(\Psi)$ инъективна. Без ограничения общности можем предположить, что $\mathbb{1}^{\perp\perp} = Y$, где $\mathbb{1}$ — слабая порядковая единица в X. Для $\pi \in \mathbb{P}(X)$ обозначим символом $\sigma(\pi)$ порядковый проектор на полосу $\pi(\mathbb{1})^{\perp\perp}$ в Y. Отображение $\pi \mapsto \sigma(\pi)$ из $\mathbb{P}(X)$ в $\mathbb{P}(Y)$ представляет собой порядково непрерывный булев гомоморфизм. Остается применить теорему 5.8 (сравни [12, теорема 5.4.4]). $\triangleright$

Замечание 5.10. Теорему 5.8 для частного случая L^1-пространства см. в [26, теорема 365P]. Оператор $\mathscr{E}$ из следствия 5.9 — аналог классического условного математического ожидания [26, 365R]; подробнее об этом см. в [12, § 5.4].

Еще одну серию примеров инъективных банаховых решеток доставляет булевозначная интерпретация теоремы Гротендика о том, что банахово пространство будет AL-пространством, если сопряженное к нему пространство линейно изометрично банахову пространству ограниченных непрерывных функций на локально компактном пространстве, исчезающих на бесконечности (см. [27, теорема 27.4.1]).

Определение 5.11. Говорят, что норма в банаховой решетке X имеет *свойство Накано,* если для любого направленного вверх множества $A \subset X_+$ выполняется $\inf\{\|b\| : b \in B\} = \sup\{\|a\| : a \in A\}$, где $B := \{x \in X : (\forall a \in A)\, a \leq x\}$ — совокупность всех верхних границ множества A.

Теорема 5.12. *Пусть Y — одновременно $\mathbb{B}$-циклическая банахова решетка и AM-пространство со свойством Накано. Предположим, что X — $\mathbb{B}$-циклическое банахово пространство и существует линейная $\mathbb{B}$-изометрия Φ из Y на $X^\#$. Тогда $X_+ := \{x \in X : (\forall y \in Y_+)\langle x, \Phi(y)\rangle \geq 0\}$ — выпуклый острый конус, а X с соответствующим упорядочением будет инъективной банаховой решеткой, причем булевы алгебры $\mathbb{B}$ и $\mathbb{M}(X)$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — булевозначные представления X и Y соответственно. Положим $\varphi := \Phi\!\uparrow$ и заметим, что $[\![\mathscr{X}$ — банахово пространство, $\mathscr{Y}$ — AM-пространство и φ — линейная изометрия из $\mathscr{Y}$ на $\mathscr{X}^*$ $\rrbracket = \mathbb{1}$ (см. теоремы 2.8 и 4.1). Более того, $\llbracket \mathscr{Y}$ имеет свойство Накано $\rrbracket = \mathbb{1}$, и, следовательно, $\llbracket \mathscr{Y}$ решеточно изометрична $\mathscr{C}_0(K)$ для некоторого локально компактного хаусдорфова топологического пространства $K \rrbracket = \mathbb{1}$ в силу теоремы Накано об изометрической характеризации пространства $\mathscr{C}_0(K)$ всех вещественнозначных непрерывных функций на K, исчезающих на бесконечности, снабженного супремум-нормой [28]. Упомянутая теорема Гротендика справедлива внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ в силу принципа переноса, следовательно, $\llbracket \mathscr{X}$ есть AL-пространство$\rrbracket = \mathbb{1}$, и остается приречь следствие 4.5. $\triangleright$

Автор выражает благодарность рецензенту за большой труд по выявлению многочисленных погрешностей в первоначальном варианте статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arendt W.* Factorization by lattice homomorphisms // Math. Z. 1984. Bd 185. Heft 4. S. 567–571.
2. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* On the isomorphic classification of injective Banach lattices // Adv. Math. 1981. V. 78. P. 489–498.
3. *Mangheni P. J.* The classification of injective Banach lattices // Israel J. Math. 1984. V. 48. P. 341–347.
4. *Lotz H. P.* Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 211. P. 85–100.
5. *Абрамович Ю. А.* Инъективные оболочки нормированных решеток // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 4. С. 743–745.
6. *Cartwright D. I.* Extension of positive operators between Banach lattices. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1975. (Mem. Amer. Math. Soc.).
7. *Haydon R.* Injective Banach lattices // Math. Z. 1977. Bd 156. S. 19–47.
8. *Кусраев А. Г.* Булевозначный анализ и инъективные банаховы решетки // Докл. РАН. 2012. Т. 444, № 2. С. 143–145.
9. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
10. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators. London etc: Acad. Press Inc., 1985.
11. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices. Berlin etc.: Springer-Verl., 1991.
12. *Kusraev A. G., Kutateladze S. S.* Boolean valued analysis: Selected topics. Vladikavkaz: Vladikavkaz Sci. Center Press, 2014. (Trends in Science. The South of Russia).
13. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
14. *Bell J. L.* Boolean-valued models and independence proofs in set theory. New York etc.: Clarendon Press, 1985.
15. *Takeuti G., Zaring W. M.* Axiomatic set theory. New York: Springer-Verl., 1973.
16. *Harmand P., Werner D., Wener W.* M-Ideals in Banach spaces and Banach algebras. Berlin etc.: Springer-Verl., 1993. (Lecture Notes in Math, 1547).
17. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D.* Positive operators // Handbook of the geometry of Banach spaces. V. 1 / Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss. Amsterdam etc..: Elsevier, 2001. P. 85–122.
18. *Гордон Е. И.* Вещественные числа в булевозначных моделях теории множеств и K-пространства // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 4. С. 773–775.
19. *Гордон Е. И.* K-пространства в булевозначных моделях теории множество // Докл. АН СССР. 1981. Т. 258, № 4. С. 777–780.
20. *Takeuti G.* Boolean completion and m-convergence // Categorical aspects of topology and analysis (Ottawa, Ont., 1980). Berlin etc.: Springer-Verl., 1982. P. 333–350. (Lecture Notes in Math.; V. 915).
21. *Кусраев А. Г.* Порядково непрерывные функционалы в булевозначных моделях теории множеств // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 1. С. 57–65.
22. *Кусраев А. Г.* О классификации инъективных банаховых решеток // Докл. РАН. 2013. Т. 453, № 1. С. 12–16.
23. *Cartwright D. I.* The order completeness of some spaces of vector-valued functions // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. V. 11. P. 57–61.

24. *Бухвалов А. В.* Геометрические свойства банаховых пространств измеримых вектор-функций // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 6. С. 1279–1282.
25. *Wickstead A. W.* Relatively central operators on Archimedean vector lattices // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. 1980. V. A80, N 2. P. 191–208.
26. *Fremlin D. H.* Measure theory. V. 3. Measure Algebras. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
27. *Semadeni Z.* Banach spaces of continuous functions. Warszawa: Polish Sci. Publ., 1971. V. 1.
28. *Nakano H.* Über die Charakterizierung des allgemainen C-Raumen // Proc. Imp. Acac. Tokyo. 1941. V. 17. P. 301–307.

Статья поступила 26 сентября 2014 г.

Кусраев Анатолий Георгиевич
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027;
Северо-Осетинский гос. университет им. К. Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 44-46, Владикавказ 362025
kusraev@smath.ru