Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 512.542.5

О ГЛАВНЫХ ФАКТОРАХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП СКРУЧЕННЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

В. В. Кораблева

Аннотация. Для конечных простых групп скрученных лиевых типов ${}^2A_l$ и ${}^2D_l$ уточняется описание главных факторов параболической максимальной подгруппы, входящих в ее унипотентный радикал. Доказана теорема, в которой для каждой параболической максимальной подгруппы групп ${}^2A_l(q^2)$ и ${}^2D_l(q^2)$ даются фрагменты главных рядов, входящие в унипотентный радикал этой параболической подгруппы. Приводятся таблицы, в которых указываются порождающие элементы соответствующих главных факторов.

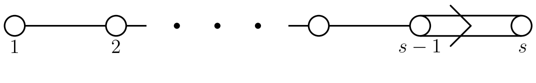
DOI 10.17377/smzh.2015.56.510

Ключевые слова: конечная группа лиева типа, параболическая подгруппа, главный фактор, унипотентный радикал.

Введение

Статья является продолжением работ [1, 2], в которых получено уточненное описание главных факторов параболических максимальных подгрупп, входящих в ее унипотентный радикал, для всех конечных простых групп нормального лиева типа, за исключением специальных групп, и для скрученной группы ${}^2E_6(q^2)$. Группа лиева типа над полем характеристики p называется *специальной*, если $p = 2$ для групп типа B_l, C_l, F_4 и $p \leqslant 3$ для групп типа G_2. В настоящей работе для конечных простых групп ${}^2A_l(q^2)$ и ${}^2D_l(q^2)$ автор уточняет описание главных факторов каждой параболической максимальной подгруппы, входящих в ее унипотентный радикал. Наша цель — доказать следующую теорему.

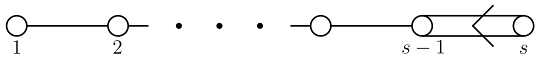
Теорема. (1) *Пусть $G = {}^2A_{2s}(q^2)$ — конечная простая скрученная группа лиева типа и P_k — параболическая максимальная подгруппа группы G, полученная удалением k-й вершины диаграммы Дынкина типа B_s в стандартном упорядочении вершин*



Тогда для любого $1 \leqslant k \leqslant s$ фрагмент главного ряда группы P_k, входящий в ее унипотентный радикал U, имеет вид $U = U_1 > U_2 > 1$, где $|U_1/U_2| = q^{2k(2s-2k+1)}$ и $|U_2| = q^{k^2}$.

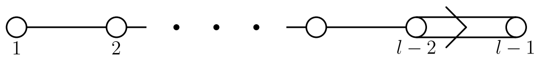
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–00469) и лаборатории квантовой топологии Челябинского гос. университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

(2) *Пусть $G = {}^2A_{2s-1}(q^2)$ — конечная простая скрученная группа лиева типа и P_k — параболическая максимальная подгруппа группы G, полученная удалением k-й вершины диаграммы Дынкина типа C_s в стандартном упорядочении вершин*



Тогда фрагмент главного ряда группы P_k, входящий в ее унипотентный радикал U, имеет вид $U = U_1 > U_2 > 1$, где $|U_1/U_2| = q^{4k(s-k)}$ и $|U_2| = q^{k^2}$, при $1 \leqslant k \leqslant s-1$ и $U = U_1 > 1$, где $|U_1| = q^{s^2}$, при $k = s$.

(3) *Пусть $G = {}^2D_l(q^2)$ — конечная простая скрученная группа лиева типа и P_k — параболическая максимальная подгруппа группы G, полученная удалением k-й вершины диаграммы Дынкина типа B_{l-1} в стандартном упорядочении вершин*



Тогда фрагмент главного ряда группы P_k, входящий в ее унипотентный радикал U, имеет вид $U = U_1 > 1$, где $|U_1| = q^{2(l-1)}$, при $k = 1$ и $U = U_1 > U_2 > 1$, где $|U_1/U_2| = q^{2k(l-k)}$ и $|U_2| = q^{k(k-1)/2}$, при $2 \leqslant k \leqslant l-1$.

Полезные следствия из доказательства этой теоремы составляют содержание шести таблиц, которые приведены в тексте работы.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Мы сохраняем обозначения и терминологию из [1, 2]. Напомним необходимые определения и обозначения. Зафиксируем поле K и присоединенную группу Шевалле $G = G(K)$ над полем K. Пусть Φ — система корней группы G, π — ее множество простых корней, Φ^+ — множество положительных корней в Φ относительно π, $X_\zeta = \{x_\zeta(t) \mid t \in K\}$ — корневая подгруппа G, соответствующая корню $\zeta \in \Phi$. Для любого подмножества J из π обозначим через Φ_J множество корней из Φ, натянутых на J, и положим $\Phi_J^+ = \Phi^+ \cap \Phi_J$. Зафиксируем параболическую подгруппу $P = P_J$, соответствующую подмножеству J из π. Известно разложение Леви подгруппы P: $P = UL$, где $U = \langle X_\zeta \mid \zeta \in \Phi^+ \setminus \Phi_J^+ \rangle$ — унипотентный радикал и L — дополнение Леви в P. Для любого $\zeta \in \Phi^+$ имеем $\zeta = \zeta_J + \zeta_{J'}$, где $\zeta_J = \sum\limits_{r \in J} c_r r$ и $\zeta_{J'} = \sum\limits_{r \in \pi \setminus J} d_r r$ $(0 \leqslant c_r, d_r \in \mathbb{Z})$. Следуя [3], число $\mathrm{level}(\zeta) = \sum\limits_{r \in \pi \setminus J} d_r$ назовем *уровнем* корня ζ, а выражение $\mathrm{shape}(\zeta) = \zeta_{J'}$ — *шейпом* корня ζ. Для любого натурального числа j положим $U_j = \langle X_\zeta \mid \zeta \in \Phi^+,\ \mathrm{level}(\zeta) \geqslant j \rangle$. Фактор-группа U_j/U_{j+1} равна $\prod X_\zeta U_{j+1}/U_{j+1}$, где произведение берется в некотором фиксированном порядке по всем положительным корням ζ, для которых $\mathrm{level}(\zeta) = j$. Для каждого шейпа S корня из $\Phi^+ \setminus \Phi_J^+$ уровня j положим $V_S = \prod X_\zeta U_{j+1}/U_{j+1}$, где ζ пробегает множество корней уровня j и шейпа S из $\Phi^+ \setminus \Phi_J^+$. Тогда $U_j/U_{j+1} = \prod V_S$, где S пробегает множество различных шейпов корней уровня j из $\Phi^+ \setminus \Phi_J^+$.

Пусть $\overline{G} = G(\overline{GF(p)})$, где $\overline{GF(p)}$ — некоторое алгебраическое замыкание конечного поля простого порядка p. Рассмотрим $\overline{G}$ как алгебраическую группу присоединенного типа, пусть $\overline{G}$ неспециальна. Автоморфизм поля $\overline{GF(p)}$

может быть задан как отображение $x \mapsto x^{p^a}$ для $x \in \overline{GF(p)}$ и подходящего натурального числа a. Положим $q = p^a$ и обозначим соответствующий полевой автоморфизм группы $\overline{G}$ через q. Обозначим через σ эндоморфизм алгебраической группы $\overline{G}$ с конечным централизатором $\overline{G}_\sigma = \{g \in \overline{G} \mid g^\sigma = g\}$ (образ элемента g при отображении σ обозначаем через g^σ). Известно, что $\sigma = q\tau$, где τ — графовый автоморфизм группы $\overline{G}$ (возможно, тривиальный). Пусть $G = O^{p'}(\overline{G}_\sigma)$ — подгруппа из $\overline{G}_\sigma$, порожденная всеми ее p-элементами. Тогда G является конечной группой лиева типа.

Далее будем различать обозначения подгрупп и элементов алгебраических групп: их отмечаем чертой сверху, а соответствующие им объекты конечных групп пишем без черты. В группе $\overline{G}$ выбираем σ-инвариантную параболическую подгруппу $\overline{P} = \overline{U}\ \overline{L}$, где $\overline{U}$ — унипотентный радикал и $\overline{L}$ — дополнение Леви в $\overline{P}$ соответственно. Тогда $P = G \cap \overline{P}_\sigma$ является параболической подгруппой в группе G с унипотентным радикалом $U = \overline{U}_\sigma$ и дополнением Леви $L = G \cap \overline{L}_\sigma$. Положим $L_0 = O^{p'}(L)$.

Пусть корни шейпа S имеют уровень j. Если $\overline{V}_S^\sigma \neq \overline{V}_S$ и $|\tau| = 2$, то аддитивная группа $\left(\overline{V}_S \oplus \overline{V}_S^\sigma\right)_\sigma$ порождается элементами вида $\bar{x}_\zeta(t)\overline{U}_{j+1} + \bar{x}_{\zeta^\rho}(t^q)\overline{U}_{j+1}$, где t пробегает поле $GF(q^2)$ и ρ — подстановка системы корней Φ, соответствующая графовому автоморфизму τ. Обозначаем образ корня $\zeta \in \Phi$ при этом отображении через ζ^ρ и образ подмножества корней M из Φ — через M^ρ. Для корня $\zeta \in \Phi^+ \setminus \Phi_J$ уровня j и для $c, t \in GF(q^2)$ положим

$$c(\bar{x}_\zeta(t)\overline{U}_{j+1} + \bar{x}_{\zeta^\rho}(t^q)\overline{U}_{j+1}) = \bar{x}_\zeta(ct)\overline{U}_{j+1} + \bar{x}_{\zeta^\rho}(c^q t^q)\overline{U}_{j+1}.$$

Таким образом, группа $\left(\overline{V}_S \oplus \overline{V}_S^\sigma\right)_\sigma \cong (\overline{V}_S)_{\sigma^2}$ становится $GF(q^2)L$-модулем.

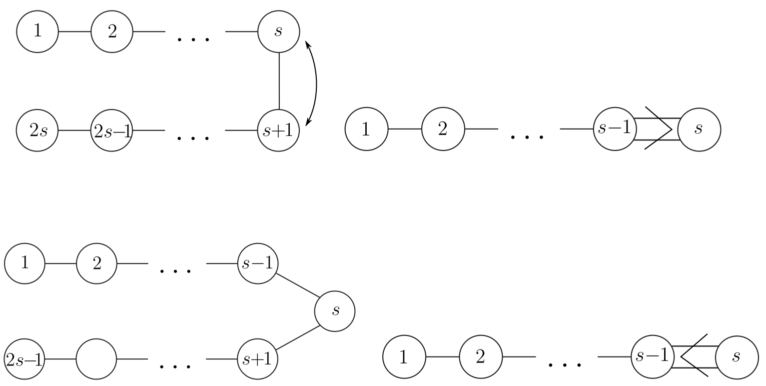
Как частный случай [3, теорема 3] получается

Предложение. *Пусть $G = {}^2A_l(q^2)$ или $G = {}^2D_l(q^2)$ — конечная простая скрученная группа лиева типа, соответствующая эндоморфизму $q\tau$ простой алгебраической группы типа A_l или D_l соответственно, $P = UL$ — параболическая подгруппа в G с унипотентным радикалом U и дополнением Леви L в P. Тогда факторы нижнего центрального ряда группы U являются прямыми суммами главных факторов группы P, каждый из которых есть $GF(q)L$-модуль или $GF(q^2)L$-модуль.*

Далее полагаем, что система корней Φ имеет тип A_l или D_l. Зафиксируем некоторые обозначения. Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$. При $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant l$ обозначаем положительный корень $p_i + p_{i+1} + \dots + p_j$ через p_{ij} и, в частности, $p_i = p_{ii}$. Корневые подгруппы алгебраических групп $A_l(\overline{GF(p)})$ и $D_l(\overline{GF(p)})$ всегда обозначаем далее через $\overline{X}_\zeta$ для $\zeta \in \Phi$.

2. Доказательство теоремы

Рассмотрим систему корней Φ типа A_l. Множество Φ^+ состоит из элементов p_1, $p_{12}, \dots, p_{1l}$, p_2, $p_{23}, \dots, p_{2l}, \dots, p_{l-1}$, p_{l-1l}, p_l. На следующем рисунке слева указано, как подстановка ρ переставляет простые корни на диаграммах Дынкина типа A_l для $l = 2s$ и $l = 2s - 1$. Правые диаграммы на рисунке являются диаграммами Дынкина систем корней B_s и C_s соответственно, полученных в результате «скручивания» (см. [4, 5]).



Случай $G = {}^2A_{2s}(q^2)$, $l = 2s$. Укажем ρ-орбиты положительных корней: $\{p_{1l}\}$, $\{p_{2l-1}\}, \dots, \{p_{ss+1}\}$, $\{p_1, p_l\}$, $\{p_{12}, p_{l-1l}\}, \dots, \{p_{1l-1}, p_{2l}\}$, $\{p_2, p_{l-1}\}$, $\{p_{23}, p_{l-2l-1}\}$, $\dots$, $\{p_{2l-2}, p_{3l-1}\}, \dots, \{p_{s-1}, p_{s+2}\}$, $\{p_{s-1s}, p_{s+1s+2}\}$, $\{p_{s-1s+1}, p_{ss+2}\}$, $\{p_s, p_{s+1}\}$.

Для каждого $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ рассмотрим σ-инвариантную параболическую подгруппу $\overline{P}_k$ в группе $A_{2s}(\overline{GF(p)})$, соответствующую подсистеме простых корней $J_k = \pi \setminus \{p_k, p_{l-k+1}\}$.

Представим множество $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_k}$ в виде объединения трех попарно не пересекающихся подмножеств $M = \{p_{1k}, p_{1k+1}, \dots, p_{1l-k}, p_{2k}, p_{2k+1}, \dots, p_{2l-k}, \dots, p_k, p_{kk+1}, \dots, p_{kl-k}\}$, $M^\rho = \{p_{k+1l-k+1}, p_{k+1l-k+2}, \dots, p_{k+1l}, p_{k+2l-k+1}, p_{k+2l-k+2}, \dots, p_{k+2l}, \dots, p_{l-k+1}, p_{l-k+1l-k+2}, \dots, p_{l-k+1l}\}$ и $N = N^\rho = \{p_{1l-k+1}, p_{1l-k+2}, \dots, p_{1l}, p_{2l-k+1}, p_{2l-k+2}, \dots, p_{2l}, \dots, p_{kl-k+1}, p_{kl-k+2}, \dots, p_{kl}\}$. Корни из множеств M, M^ρ и N имеют шейпы, равные p_k, p_{l-k+1} и $p_k + p_{l-k+1}$ соответственно. По [3, лемма 4] нижний центральный ряд группы $\overline{U}$ имеет вид $\overline{U} = \overline{U}_1 > \overline{U}_2 > 1$. По [3, теорема 2] $\overline{U}_1/\overline{U}_2 \cong \overline{V}_{p_k} \oplus \overline{V}_{p_{l-k+1}}$ и $\overline{U}_2 = \overline{V}_{p_k+p_{l-k+1}} = \prod\limits_{\zeta \in N} \overline{X}_\zeta$, где $\overline{V}_{p_k} = \prod\limits_{\zeta \in M} \overline{X}_\zeta \overline{U}_2/\overline{U}_2$ и $\overline{V}_{p_{l-k+1}} = \prod\limits_{\zeta \in M^\rho} \overline{X}_\zeta \overline{U}_2/\overline{U}_2$. Так как $\overline{V}_{p_{l-k+1}} = \overline{V}^\sigma_{p_k}$, $\overline{V}_{p_k} = \overline{V}^\sigma_{p_{l-k+1}}$ и $\overline{V}^\sigma_{p_k+p_{l-k+1}} = \overline{V}_{p_k+p_{l-k+1}}$, согласно предложению модули $(\overline{V}_{p_k+p_{l-k+1}})_\sigma$ и $(\overline{V}_{p_k} \oplus \overline{V}_{p_{l-k+1}})_\sigma$ являются абсолютно неприводимыми $GF(q)L_0$- и $GF(q^2)L_0$-модулями соответственно.

В конечной группе $A_{2s}(q^2)$ рассмотрим подгруппу, состоящую из элементов вида $x_\gamma(v,u) = x_\gamma(v)x_{\gamma^\rho}(v^q)x_{\gamma+\gamma^\rho}(u)$, где $v, u \in GF(q^2)$, $u + u^q + vv^q = 0$ и корень $\gamma \in \Phi^+$ является представителем двухэлементной ρ-орбиты, причем корень $\gamma + \gamma^\rho \in \Phi^+$ образует одноэлементную ρ-орбиту. В этой подгруппе выберем элементы $x_\gamma(0,u)$ и положим $\gamma + \gamma^\rho = \alpha$. Получаем подгруппу $X_\alpha = \{x_\gamma(0,u) = x_\alpha(u) \mid u \in GF(q^2),\ u + u^q = 0\}$. Отметим, что $U = \overline{U}_\sigma = \langle x_\beta(t)x_{\beta^\rho}(t^q),\ x_\gamma(v,u) \mid \beta, \gamma \in \Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_k},\ \beta + \beta^\rho \notin \Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_k},\ \gamma + \gamma^\rho \in \Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_k},\ v, t, u \in GF(q^2),\ u + u^q + vv^q = 0\rangle$.

Используя [3, лемма 5], получаем

$$(\overline{U}_1)_\sigma/(\overline{U}_2)_\sigma \cong (\overline{U}_1/\overline{U}_2)_\sigma \cong (\overline{V}_{p_k} \oplus \overline{V}_{p_{l-k+1}})_\sigma$$

и $(\overline{U}_2)_\sigma = (\overline{V}_{p_k+p_{l-k+1}})_\sigma$. Аддитивная группа $(\overline{V}_{p_k} \oplus \overline{V}_{p_{l-k+1}})_\sigma$ порождается элементами вида $\bar{x}_\beta(t)\overline{U}_2 + \bar{x}_{\beta^\rho}(t^q)\overline{U}_2$, где t пробегает поле $GF(q^2)$ и $\beta \in M$, а группа $(\overline{V}_{p_k+p_{l-k+1}})_\sigma$ — элементами $\bar{x}_\alpha(u)$ и $\bar{x}_\beta(t) + \bar{x}_{\beta^\rho}(t^q)$, где u, t пробегают поле

Таблица 1. Неприводимые модули для $O^{p'}((A_{2s}(\overline{GF(p)}))_\sigma)$

	α	β
$(\overline{V}_{p_k} \oplus \overline{V}_{p_{l-k+1}})_\sigma$, $1 \leqslant k \leqslant s$	$-$	$p_{1k}, p_{1k+1}, \dots, p_{1l-k}$, $p_{2k}, p_{2k+1}, \dots, p_{2l-k}, \dots$, $p_k, p_{kk+1}, \dots, p_{kl-k}$
$(\overline{V}_{p_1+p_l})_\sigma$	p_{1l}	$-$
$(\overline{V}_{p_k+p_{l-k+1}})_\sigma$, $2 \leqslant k \leqslant s$	$p_{1l}, p_{2l-1}, \dots, p_{kl-k+1}$	$p_{1l-k+1}, p_{1l-k+2}, \dots, p_{1l-1}$, $p_{2l-k+1}, p_{2l-k+2}, \dots, p_{2l-2}$, $\dots, p_{k-1l-k+1}$

$GF(q^2)$, $u+u^q=0$, $\alpha \in \{p_{1l}, p_{2l-1}, \dots, p_{kl-k+1}\}$ и $\beta \in \{p_{1l-k+1}, p_{1l-k+2}, \dots, p_{1l-1}, p_{2l-k+1}, p_{2l-k+2}, \dots, p_{2l-2}, \dots, p_{k-1l-k+1}\}$. Представим полученные результаты в виде табл. 1. Второй и третий столбцы табл. 1 содержат корни α и β для порождающих элементов неприводимого модуля, указанного в первом столбце.

Система корней Φ типа A_{2s} разбивается на $2s^2$ классов вида $\{r, r^\rho\}$ или $\{r, r^\rho, r+r^\rho\}$, где $r \in \Phi$, образующих систему корней $\widetilde{\Phi}$ типа B_s (см. [5]). Выпишем положительные корни системы $\widetilde{\Phi}$:

$$\begin{gathered}
\tilde{p}_1 = \{p_1, p_l\},\ \tilde{p}_{12} = \{p_{12}, p_{l-1l}\},\ \dots,\ \tilde{p}_{1s-1} = \{p_{1s-1}, p_{s+2l}\},\\
\tilde{p}_{1s} = \{p_{1s}, p_{s+1l}, p_{1l}\},\ \tilde{p}_{1s-1} + 2\tilde{p}_s = \{p_{1s+1}, p_{sl}\},\\
\tilde{p}_{1s-2} + 2\tilde{p}_{s-1s} = \{p_{1s+2}, p_{s-1l}\},\ \dots,\ \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_{2s} = \{p_{1l-1}, p_{2l}\},\ \tilde{p}_2 = \{p_2, p_{l-1}\},\\
\tilde{p}_{23} = \{p_{23}, p_{l-2l-1}\},\ \dots,\ \tilde{p}_{2s-1} = \{p_{2s-1}, p_{s+2l-1}\},\ \tilde{p}_{2s} = \{p_{2s}, p_{s+1l-1}, p_{2l-1}\},\\
\tilde{p}_{2s-1} + 2\tilde{p}_s = \{p_{2s+1}, p_{sl-1}\},\ \tilde{p}_{2s-2} + 2\tilde{p}_{s-1s} = \{p_{2s+2}, p_{s-1l-1}\},\\
\dots,\ \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_{3s} = \{p_{2l-2}, p_{3l-1}\},\ \dots,\ \tilde{p}_{s-1} = \{p_{s-1}, p_{s+2}\},\\
\tilde{p}_{s-1s} = \{p_{s-1s}, p_{s+1s+2}, p_{s-1s+2}\},\ \tilde{p}_{s-1} + 2\tilde{p}_s = \{p_{s-1s+1}, p_{ss+2}\},\\
\tilde{p}_s = \{p_s, p_{s+1}, p_{ss+1}\}.
\end{gathered}$$

Переписав табл. 1 в терминах системы корней B_s, получим табл. 2. В первом столбце табл. 2 указаны главные факторы $V_S = V_{j\tilde{p}_k}$ для $j \in \{1,2\}$, входящие в унипотентный радикал каждой параболической максимальной подгруппы P_k группы ${}^2A_{2s}(q^2)$. Группа P_k получается удалением k-й вершины диаграммы Дынкина системы корней B_s, $1 \leqslant k \leqslant s$. При всех $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ для первого главного фактора U_1/U_2 имеем $U_1/U_2 = V_{1\tilde{p}_k} = \prod\limits_{\mu \in R_X} X_\mu U_2/U_2$, где $X_\mu = \{x_r(t)x_{r^\rho}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\}$, корни $\mu = \{r, r^\rho\}$ или $\mu = \{r, r^\rho, r+r^\rho\}$ из $\widetilde{\Phi}$ приводятся в соответствующих строках третьего столбца табл. 2. При всех $k \in \{2, 3, \dots, s\}$ для второго главного фактора U_2 имеем $U_2 = V_{2\tilde{p}_k} = \prod\limits_{\mu \in R_Z} Z_\mu \prod\limits_{\mu \in R_X} X_\mu$, где подгруппа X_μ такая же, что и выше, а $\mu = \{r, r^\rho\}$. Для $\mu = \{r, r^\rho, r+r^\rho\} \in \widetilde{\Phi}$ в соответствующей корневой подгруппе $X^1_\mu = \{x_\mu(v,u) = x_r(v)x_{r^\rho}(v^q)x_{r+r^\rho}(u) \mid v, u \in GF(q^2),\ u + u^q + vv^q = 0\}$ из ${}^2A_{2s}(q^2)$ выбираем подгруппу $Z_\mu = \{x_\mu(0,u) = x_{r+r^\rho}(u) \mid u \in GF(q^2),\ u+u^q = 0\}$. Подмножества R_Z и R_X из $\widetilde{\Phi}^+$ для подгрупп Z_μ и X_μ приводятся в строках второго и третьего столбцов табл. 2 соответственно. В частности, $V_{2\tilde{p}_1} = Z_{\tilde{p}_{1s}}$.

Случай $G = {}^2A_{2s-1}(q^2)$, $l = 2s-1$. Укажем ρ-орбиты положительных корней: $\{p_{1l}\}, \{p_{2l-1}\}, \dots, \{p_{s-1s+1}\}, \{p_1, p_l\}, \{p_{12}, p_{l-1l}\}, \dots, \{p_{1l-1}, p_{2l}\}, \{p_2, p_{l-1}\},$

Таблица 2. Главные факторы подгруппы P_k из ${}^2A_{2s}(q^2)$

V_S	$\mu \in R_Z$	$\mu \in R_X$
$V_{1\tilde{p}_k}$, $1 \leqslant k \leqslant s-1$	–	$\tilde{p}_{1k}, \tilde{p}_{1k+1}, \ldots, \tilde{p}_{1s}, \tilde{p}_{1s-1} + 2\tilde{p}_s$, $\tilde{p}_{1s-2} + 2\tilde{p}_{s-1s}, \ldots, \tilde{p}_{1k} + 2\tilde{p}_{k+1s}$, $\tilde{p}_{2k}, \tilde{p}_{2k+1}, \ldots, \tilde{p}_{2s}, \tilde{p}_{2s-1} + 2\tilde{p}_s$, $\tilde{p}_{2s-2} + 2\tilde{p}_{s-1s}, \ldots, \tilde{p}_{2k} + 2\tilde{p}_{k+1s}, \ldots$, $\tilde{p}_k, \tilde{p}_{kk+1}, \ldots, \tilde{p}_{ks}, \tilde{p}_{ks-1} + 2\tilde{p}_s$, $\tilde{p}_{ks-2} + 2\tilde{p}_{s-1s}, \ldots, \tilde{p}_k + 2\tilde{p}_{k+1s}$
$V_{1\tilde{p}_s}$	–	$\tilde{p}_{1s}, \tilde{p}_{2s}, \ldots, \tilde{p}_{s-1s}, \tilde{p}_s$
$V_{2\tilde{p}_1}$	$\tilde{p}_{1s}$	–
$V_{2\tilde{p}_k}$, $2 \leqslant k \leqslant s$	$\tilde{p}_{1s}, \tilde{p}_{2s}, \ldots, \tilde{p}_{ks}$	$\tilde{p}_{1k-1} + 2\tilde{p}_{ks}, \tilde{p}_{1k-2} + 2\tilde{p}_{k-1s}, \ldots$, $\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_{2s}, \tilde{p}_{2k-1} + 2\tilde{p}_{ks}, \ldots, \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_{3s}$, $\ldots, \tilde{p}_{k-2k-1} + 2\tilde{p}_{ks}, \tilde{p}_{k-2} + 2\tilde{p}_{k-1s}$, $\tilde{p}_{k-1} + 2\tilde{p}_{ks}$

$\{p_{23}, p_{l-2l-1}\}, \ldots, \{p_{2l-2}, p_{3l-1}\}, \ldots, \{p_{s-1}, p_{s+1}\}, \{p_{s-1s}, p_{ss+1}\}, \{p_s\}$.

Рассмотрим σ-инвариантную параболическую подгруппу $\overline{P}_k$ в группе $A_{2s-1}(\overline{GF(p)})$, соответствующую подсистеме простых корней $J_k = \pi \setminus \{p_k, p_{l-k+1}\}$ при $k \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$ и $J_s = \pi \setminus \{p_s\}$ при $k = s$. Отметим, что при $1 \leqslant k \leqslant s-1$ искомые корни для неприводимых модулей $(\overline{V}_{p_k} \oplus \overline{V}_{p_{l-k+1}})_\sigma$ и $(\overline{V}_{p_k + p_{l-k+1}})_\sigma$ для группы $O^{p'}((A_{2s-1}(\overline{GF(p)}))_\sigma)$ совпадают с найденными выше корнями для соответствующих неприводимых модулей для группы $O^{p'}((A_{2s}(\overline{GF(p)}))_\sigma)$.

Таблица 3. Неприводимые модули для $O^{p'}((A_{2s-1}(\overline{GF(p)}))_\sigma)$

	α	β
$(\overline{V}_{p_k} \oplus \overline{V}_{p_{l-k+1}})_\sigma$, $1 \leqslant k \leqslant s-1$	–	$p_{1k}, p_{1k+1}, \ldots, p_{1l-k}$, $p_{2k}, p_{2k+1}, \ldots, p_{2l-k}, \ldots$, $p_k, p_{kk+1}, \ldots, p_{kl-k}$
$(\overline{V}_{p_1 + p_l})_\sigma$	p_{1l}	–
$(\overline{V}_{p_k + p_{l-k+1}})_\sigma$, $2 \leqslant k \leqslant s-1$	$p_{1l}, p_{2l-1}, \ldots$, $p_{k-1l-k+2}, p_{kl-k+1}$	$p_{1l-k+1}, p_{1l-k+2}, \ldots, p_{1l-1}$, $p_{2l-k+1}, p_{2l-k+2}, \ldots, p_{2l-2}$, $\ldots, p_{k-1l-k+1}$
$(\overline{V}_{p_s})_\sigma$	$p_{1l}, p_{2l-1}, \ldots$, p_{s-1s+1}, p_s	$p_{1s}, p_{1s+1}, \ldots, p_{1l-1}, p_{2s}$, $p_{2s+1}, \ldots, p_{2l-2}, \ldots, p_{s-1s}$

Рассмотрим в группе $A_{2s-1}(\overline{GF(p)})$ параболическую подгруппу $\overline{P}_s$. Все корни множества $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_s}$ имеют шейп, равный p_s. Нижний центральный ряд группы $\overline{U}$ имеет вид $\overline{U} = \overline{U}_1 > 1$ и $\overline{U}_1 = \overline{V}_{p_s} = \overline{V}^\sigma_{p_s}$. Представим множество $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_s}$ в виде объединения трех попарно не пересекающихся подмножеств

$$M = \{p_{1l}, p_{2l-1}, \ldots, p_{s-1s+1}, p_s\},$$

$$N = \{p_{1s}, p_{1s+1}, \ldots, p_{1l-1}, p_{2s}, p_{2s+1}, \ldots, p_{2l-2}, \ldots, p_{s-1s}\},$$

$$N^\rho = \{p_{2l}, p_{3l-1}, p_{3l}, \ldots, p_{s-1s+2}, p_{s-1s+3}, \ldots, p_{s-1l}, p_{ss+1}, p_{ss+2}, \ldots, p_{sl}\}.$$

Множества M и $N \cup N^\rho$ являются объединениями одноэлементных и двухэлементных ρ-орбит корней на $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_s}$ соответственно. Аддитивная группа $(\overline{V}_{p_s})_\sigma$ порождается элементами вида $\bar{x}_\alpha(u)$ и $\bar{x}_\beta(t) + \bar{x}_{\beta^\rho}(t^q)$, где u, t пробегают поле $GF(q^2)$, $u^q = u$, $\alpha \in M$ и $\beta \in N$. Представим полученные результаты в виде табл. 3.

Система корней Φ типа A_{2s-1} разбивается на $2s^2$ классов вида $\{r\}$ или $\{r, r^\rho\}$, где $r \in \Phi$, образующих систему корней $\widetilde{\Phi}$ типа C_s. Выпишем положительные корни системы $\widetilde{\Phi}$:

$$2\tilde{p}_{1s-1} + \tilde{p}_s = \{p_{1l}\},\ 2\tilde{p}_{2s-1} + \tilde{p}_s = \{p_{2l-1}\},\ \ldots,\ 2\tilde{p}_{s-1} + \tilde{p}_s = \{p_{s-1s+1}\},$$
$$\tilde{p}_s = \{p_s\},\ \tilde{p}_1 = \{p_1, p_l\},\ \tilde{p}_{12} = \{p_{12}, p_{l-1l}\},\ \ldots,\ \tilde{p}_{1s} = \{p_{1s}, p_{sl}\},$$
$$\tilde{p}_{1s-2} + 2\tilde{p}_{s-1} + \tilde{p}_s = \{p_{1s+1}, p_{s-1l}\},\ \tilde{p}_{1s-3} + 2\tilde{p}_{s-2s-1} + \tilde{p}_s = \{p_{1s+2}, p_{s-2l}\},$$
$$\ldots,\ \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_{2s-1} + \tilde{p}_s = \{p_{1l-1}, p_{2l}\},\ \tilde{p}_2 = \{p_2, p_{l-1}\},\ \tilde{p}_{23} = \{p_{23}, p_{l-2l-1}\},$$
$$\ldots,\ \tilde{p}_{2s} = \{p_{2s}, p_{sl-1}\},\ \tilde{p}_{2s-2} + 2\tilde{p}_{s-1} + \tilde{p}_s = \{p_{2s+1}, p_{s-1l-1}\},$$
$$\tilde{p}_{2s-3} + 2\tilde{p}_{s-2s-1} + \tilde{p}_s = \{p_{2s+2}, p_{s-2l-1}\},\ \ldots,\ \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_{3s-1} + \tilde{p}_s = \{p_{2l-2}, p_{3l-1}\},$$
$$\ldots,\ \tilde{p}_{s-2} = \{p_{s-2}, p_{s+2}\},\ \tilde{p}_{s-2s-1} = \{p_{s-2s-1}, p_{s+1s+2}\},\ \tilde{p}_{s-2s} = \{p_{s-2s}, p_{ss+2}\},$$
$$\tilde{p}_{s-2} + 2\tilde{p}_{s-1} + \tilde{p}_s = \{p_{s-2s+1}, p_{s-1s+2}\},\ \tilde{p}_{s-1} = \{p_{s-1}, p_{s+1}\},$$
$$\tilde{p}_{s-1s} = \{p_{s-1s}, p_{ss+1}\}.$$

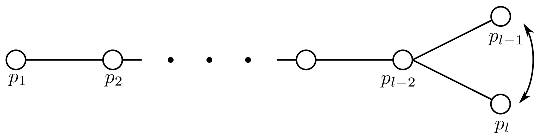
Таблица 4. Главные факторы подгруппы P_k из ${}^2A_{2s-1}(q^2)$

V_S	λ	μ
$V_{1\tilde{p}_k}$, $1 \leqslant k \leqslant s-2$	$-$	$\tilde{p}_{1k}, \tilde{p}_{1k+1}, \ldots, \tilde{p}_{1s}, \tilde{p}_{1s-2} + 2\tilde{p}_{s-1} + p_s$, $\tilde{p}_{1s-3} + 2\tilde{p}_{s-2s-1} + p_s, \ldots, \tilde{p}_{1k} + 2\tilde{p}_{k+1s-1} + p_s$, $\tilde{p}_{2k}, \tilde{p}_{2k+1}, \ldots, \tilde{p}_{2s}, \tilde{p}_{2s-2} + 2\tilde{p}_{s-1} + p_s$, $\tilde{p}_{2s-3} + 2\tilde{p}_{s-2s-1} + p_s, \ldots, \tilde{p}_{2k} + 2\tilde{p}_{k+1s-1} + p_s$, $\ldots, \tilde{p}_k, \tilde{p}_{kk+1}, \ldots, \tilde{p}_{ks}, \tilde{p}_{ks-2} + 2\tilde{p}_{s-1} + p_s$, $\tilde{p}_{ks-3} + 2\tilde{p}_{s-2s-1} + p_s, \ldots, \tilde{p}_k + 2\tilde{p}_{k+1s-1} + p_s$
$V_{1\tilde{p}_{s-1}}$	$-$	$\tilde{p}_{1s-1}, \tilde{p}_{1s}, \tilde{p}_{2s-1}, p_{2s}, \ldots, \tilde{p}_{s-1}, \tilde{p}_{s-1s}$
$V_{1\tilde{p}_s}$	$2\tilde{p}_{1s-1} + \tilde{p}_s$, $2\tilde{p}_{2s-1} + \tilde{p}_s$, $\ldots$, $2\tilde{p}_{s-1} + \tilde{p}_s, \tilde{p}_s$	$\tilde{p}_{1s}, \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_{2s-1} + \tilde{p}_s, \tilde{p}_{12} + 2\tilde{p}_{3s-1} + \tilde{p}_s, \ldots$, $\tilde{p}_{1s-2} + 2\tilde{p}_{s-1} + \tilde{p}_s, \tilde{p}_{2s}, \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_{3s-1} + \tilde{p}_s$, $\tilde{p}_{23} + 2\tilde{p}_{4s-1} + \tilde{p}_s, \ldots, \tilde{p}_{2s-2} + 2\tilde{p}_{s-1} + \tilde{p}_s$, $\ldots, \tilde{p}_{s-2s}, \tilde{p}_{s-2} + 2\tilde{p}_{s-1} + \tilde{p}_s, \tilde{p}_{s-1s}$
$V_{2\tilde{p}_1}$	$2\tilde{p}_{1s-1} + \tilde{p}_s$	$-$
$V_{2\tilde{p}_k}$, $2 \leqslant k \leqslant s-1$	$2\tilde{p}_{1s-1} + \tilde{p}_s$, $2\tilde{p}_{2s-1} + \tilde{p}_s$, $\ldots$, $2\tilde{p}_{ks-1} + \tilde{p}_s$	$\tilde{p}_{1k-1} + 2\tilde{p}_{ks-1} + \tilde{p}_s, \tilde{p}_{1k-2} + 2\tilde{p}_{k-1s-1} + \tilde{p}_s$, $\ldots, \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_{2s-1} + \tilde{p}_s, \tilde{p}_{2k-1} + 2\tilde{p}_{ks-1} + \tilde{p}_s$, $\tilde{p}_{2k-2} + 2\tilde{p}_{k-1s-1} + \tilde{p}_s, \ldots, \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_{3s-1} + \tilde{p}_s$, $\ldots, \tilde{p}_{k-1} + 2\tilde{p}_{ks-1} + \tilde{p}_s$

Корневые подгруппы группы ${}^2A_{2s-1}(q^2)$ имеют вид $X^1_\lambda = \{x_\lambda(t) = x_r(t) \mid t = t^q,\ t \in GF(q^2)\}$ и порядок q для класса $\lambda = \{r\}$ и вид $X^1_\mu = \{x_\mu(t) =$

$x_r(t)x_{r^\rho}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\}$ и порядок q^2 для класса $\mu = \{r, r^\rho\}$. Переписав табл. 3 в терминах системы корней C_s, получим табл. 4. В первом столбце табл. 4 приведены главные факторы $V_S = V_{j\tilde{p}_k}$ для $j \in \{1,2\}$, входящие в унипотентный радикал каждой параболической максимальной подгруппы P_k скрученной группы лиева типа ${}^2A_{2s-1}(q^2)$. Группа P_k получается удалением k-й вершины диаграммы Дынкина системы корней C_s, $1 \leqslant k \leqslant s$. Для $k \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$ модуль $V_{1\tilde{p}_k}$ равен $\prod\limits_{\mu} X^1_\mu U_2/U_2$, а модуль $V_{1\tilde{p}_s}$ равен $\prod\limits_{\lambda,\mu} X^1_\lambda X^1_\mu$. Для $k \in \{2, 3, \ldots, s-1\}$ модуль $V_{2\tilde{p}_k}$ равен $\prod\limits_{\lambda,\mu} X^1_\lambda X^1_\mu$ и $V_{2\tilde{p}_1} = X^1_{2\tilde{p}_{1s-1}+\tilde{p}_s}$. Корневые подгруппы X^1_λ и X^1_μ параметризуются элементами системы корней типа C_s, корни λ и μ выписываются во втором и третьем столбцах табл. 4 соответственно.

Случай $G = {}^2D_l(q^2)$. Существует подстановка ρ системы корней Φ типа D_l (см. [4, 5]), индуцированная следующей симметрией ее диаграммы Дынкина:



Укажем ρ-орбиты положительных корней:

$$\{p_1\},\ \{p_{12}\},\ \ldots,\ \{p_{1l-2}\},\ \{p_2\},\ \{p_{23}\},\ \ldots,\ \{p_{2l-2}\},\ \ldots,\ \{p_{l-3}\},\ \{p_{l-3l-2}\},$$
$$\{p_{l-2}\},\ \{p_1 + 2p_{2l-2} + p_{l-1l}\},\ \{p_{12} + 2p_{3l-2} + p_{l-1l}\},\ \ldots,\ \{p_{1l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}\},$$
$$\{p_{1l}\},\ \{p_2 + 2p_{3l-2} + p_{l-1l}\},\ \{p_{23} + 2p_{4l-2} + p_{l-1l}\},\ \ldots,\ \{p_{2l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}\},$$
$$\{p_{2l}\},\ \ldots,\ \{p_{l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}\},\ \{p_{l-3l}\},\ \{p_{l-2l}\},\ \{p_{1l-1}, p_{1l-2} + p_l\},$$
$$\{p_{2l-1}, p_{2l-2} + p_l\},\ \ldots,\ \{p_{l-3l-1}, p_{l-3l-2} + p_l\},\ \{p_{l-2l-1}, p_{l-2} + p_l\}, \{p_{l-1}, p_l\}.$$

Рассмотрим σ-инвариантную параболическую подгруппу $\overline{P}_k$ в $D_l(\overline{GF(p)})$, соответствующую подмножеству $J_k = \pi \setminus \{p_k\}$ множества простых корней при $k \in \{1, 2, \ldots, l-2\}$ и $J_{l-1} = \pi \setminus \{p_{l-1}, p_l\}$ при $k = l-1$.

Множество $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_1}$ состоит из корней $p_1, p_{12}, \ldots, p_{1l}$, $p_1 + 2p_{2l-2} + p_{l-1l}, p_{12} + 2p_{3l-2} + p_{l-1l}, \ldots, p_{1l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}$, $p_{1l-2} + p_l$, имеющих шейп, равный p_1. Группа $\overline{U}$ абелева и $\overline{U} = \prod \overline{X}_\zeta$, где произведение берется по всем корням $\zeta \in \Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_1}$. Представим множество $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_1}$ в виде объединения трех попарно не пересекающихся подмножеств $M_1 = \{p_1, p_{12}, \ldots, p_{1l-2}, p_{1l}, p_1 + 2p_{2l-2} + p_{l-1l}, p_{12} + 2p_{3l-2} + p_{l-1l}, \ldots, p_{1l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}\}$, $N_1 = \{p_{1l-1}\}$ и $N_1^\rho = \{p_{1l-2} + p_l\}$. Множество M_1 является объединением всех одноэлементных ρ-орбит, а $N_1 \cup N_1^\rho$ — единственная двухэлементная ρ-орбита корней из $\Phi^+ \setminus \Phi^+_{J_1}$. Имеем

$$U = \overline{U}_\sigma = \langle x_\alpha(t), x_{p_{1l-1}}(v) x_{p^\rho_{1l-1}}(v^q) \mid \alpha \in M_1,\ t \in GF(q),\ v \in GF(q^2)\rangle.$$

Так как $\overline{V}^\sigma_{p_1} = (\overline{U})^\sigma = \overline{V}_{p_1}$, ввиду [3, лемма 7] модуль $(\overline{V}_{p_1})_\sigma = \overline{U}_\sigma$ является абсолютно неприводимым $GF(q)L_0$-модулем.

Зафиксируем $k \in \{2, \ldots, l-3\}$. Корни p_{1k}, p_{1k+1}, $\ldots$, p_{1l}, p_{2k}, $p_{2k+1}, \ldots, p_{2l}$, $\ldots, p_k, p_{kk+1}, \ldots, p_{kl}$, $p_{1k} + 2p_{k+1l-2} + p_{l-1l}, \ldots, p_{1l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}$, $p_{2k} + 2p_{k+1l-2} + p_{l-1l}, \ldots, p_{2l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}$, $\ldots$, $p_k + 2p_{k+1l-2} + p_{l-1l}$, $p_{kk+1} + 2p_{k+2l-2} + p_{l-1l}, \ldots$, $p_{kl-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}$, $p_{1l-2} + p_l$, $p_{2l-2} + p_l, \ldots, p_{kl-2} + p_l$ имеют шейп, равный p_k, а остальные корни $p_1 + 2p_{2l-2} + p_{l-1l}$, $p_{12} + 2p_{3l-2} + p_{l-1l}$, $\ldots$, $p_{1k-1} + 2p_{kl-2} + p_{l-1l}$,

Таблица 5. Неприводимые модули для $O^{p'}((D_l(\overline{GF(p)}))_\sigma)$

	α	β
$(\overline{V}_{p_k})_\sigma$, $1 \leqslant k \leqslant l-3$	$p_{1k}, p_{1k+1}, \dots, p_{1l-2}, p_{1l}, p_{2k}, p_{2k+1}, \dots,$ $p_{2l-2}, p_{2l}, \dots, p_k, p_{kk+1}, \dots, p_{kl-2}, p_{kl},$ $p_{1k} + 2p_{k+1l-2} + p_{l-1l}, p_{1k+1} + 2p_{k+2l-2} + p_{l-1l},$ $\dots, p_{1l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}, p_{2k} + 2p_{k+1l-2} + p_{l-1l},$ $\dots, p_{2l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}, \dots,$ $p_k + 2p_{k+1l-2} + p_{l-1l}, p_{kk+1} + 2p_{k+2l-2} + p_{l-1l},$ $\dots, p_{kl-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}$	$p_{1l-1}, p_{2l-1}, \dots, p_{kl-1}$
$(\overline{V}_{2p_k})_\sigma$, $2 \leqslant k \leqslant l-2$	$p_1 + 2p_{2l-2} + p_{l-1l}, p_{12} + 2p_{3l-2} + p_{l-1l}, \dots,$ $p_{1k-1} + 2p_{kl-2} + p_{l-1l}, p_2 + 2p_{3l-2} + p_{l-1l}, \dots,$ $p_{2k-1} + 2p_{kl-2} + p_{l-1l}, \dots, p_{k-1} + 2p_{kl-2} + p_{l-1l}$	–
$(\overline{V}_{p_{l-2}})_\sigma$	$p_{1l-2}, p_{1l}, p_{2l-2}, p_{2l}, \dots, p_{l-2}, p_{l-2l}$	$p_{1l-1}, p_{2l-1}, \dots, p_{l-2l-1}$
$(\overline{V}_{p_{l-1}} \oplus \overline{V}_{p_l})_\sigma$	–	$p_{1l-1}, p_{2l-1}, \dots,$ p_{l-2l-1}, p_{l-1}
$(\overline{V}_{p_{l-1}+p_l})_\sigma$	$p_1 + 2p_{2l-2} + p_{l-1l}, p_{12} + 2p_{3l-2} + p_{l-1l}, \dots,$ $p_{1l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}, p_{1l}, p_2 + 2p_{3l-2} + p_{l-1l},$ $p_{23} + 2p_{4l-2} + p_{l-1l}, \dots, p_{2l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l},$ $p_{2l}, \dots, p_{l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}, p_{l-3l}, p_{l-2l}$	–

$p_2+2p_{3l-2}+p_{l-1l}$, $p_{23}+2p_{4l-2}+p_{l-1l}$, $\dots$, $p_{2k-1}+2p_{kl-2}+p_{l-1l}$, $\dots$, $p_{k-1}+2p_{kl-2}+p_{l-1l}$ из множества $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_k}$ — равный $2p_k$. Нижний центральный ряд группы $\overline{U}$ имеет вид $\overline{U}=\overline{U}_1>\overline{U}_2>1$. Так как $(\overline{V}_{p_k})^\sigma=\overline{V}_{p_k}$ и $(\overline{V}_{2p_k})^\sigma=\overline{V}_{2p_k}$, то $(\overline{V}_{p_k})_\sigma$ и $(\overline{V}_{2p_k})_\sigma$ являются абсолютно неприводимыми $GF(q)L_0$-модулями. Аддитивная группа $(\overline{V}_{p_k})_\sigma$ порождается элементами вида $\bar{x}_\alpha(u)\overline{U}_2$ и $\bar{x}_\beta(t)\overline{U}_2+\bar{x}_{\beta^\rho}(t^q)\overline{U}_2$, где u,t пробегают поле $GF(q^2)$, $u^q=u$, $\alpha\in\{p_{1k}$, $p_{1k+1},\dots,p_{1l-2}$, p_{1l}, p_{2k}, $p_{2k+1},\dots,p_{2l-2}$, $p_{2l},\dots,p_k$, $p_{kk+1},\dots,p_{kl-2}$, p_{kl}, $p_{1k}+2p_{k+1l-2}+p_{l-1l}$, $\dots$, $p_{1l-3}+2p_{l-2}+p_{l-1l}$, $p_{2k}+2p_{k+1l-2}+p_{l-1l}$, $\dots$, $p_{2l-3}+2p_{l-2}+p_{l-1l}$, $\dots$, $p_{k-1k}+2p_{k+1l-2}+p_{l-1l},\dots,p_{k-1l-3}+2p_{l-2}+p_{l-1l}$, $p_k+2p_{k+1l-2}+p_{l-1l}$, $p_{kk+1}+2p_{k+2l-2}+p_{l-1l}$, $\dots$, $p_{kl-3}+2p_{l-2}+p_{l-1l}\}$ и $\beta\in\{p_{1l-1}$, $p_{2l-1},\dots,p_{kl-1}\}$. Аналогично $(\overline{V}_{2p_k})_\sigma=(\overline{U}_2)_\sigma$ порождается элементами $\bar{x}_\alpha(u)$, где u пробегает поле $GF(q)$ и $\operatorname{shape}(\alpha)=2p_k$.

Множество $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_{l-2}}$ состоит из корней p_{1l-2}, p_{1l-1}, p_{1l}, p_{2l-2}, p_{2l-1}, p_{2l}, $\dots$, p_{l-2}, p_{l-2l-1}, p_{l-2l}, $p_1+2p_{2l-2}+p_{l-1l}$, $p_{12}+2p_{3l-2}+p_{l-1l}$, $\dots$, $p_{1l-3}+2p_{l-2}+p_{l-1l}$, $p_2+2p_{3l-2}+p_{l-1l}$, $p_{23}+2p_{4l-2}+p_{l-1l}$, $\dots$, $p_{2l-3}+2p_{l-2}+p_{l-1l}$, $\dots$, $p_{l-3}+2p_{l-2}+p_{l-1l}$, $p_{1l-2}+p_l,p_{2l-2}+p_l$, $\dots$, $p_{l-2}+p_l$. Аддитивная группа $(\overline{V}_{p_{l-2}})_\sigma$ порождается элементами вида $\bar{x}_\alpha(u)\overline{U}_2$ и $\bar{x}_\beta(t)\overline{U}_2+\bar{x}_{\beta^\rho}(t^q)\overline{U}_2$, где u,t пробегают поле $GF(q^2)$, $u^q=u$, $\alpha\in\{p_{1l-2}$, p_{1l}, p_{2l-2}, p_{2l}, $\dots$, p_{l-2}, $p_{l-2l}\}$ и $\beta\in\{p_{1l-1}$, $p_{2l-1},\dots,p_{l-2l-1}\}$. Аналогично $(\overline{V}_{2p_{l-2}})_\sigma=(\overline{U}_2)_\sigma$ порождается элементами $\bar{x}_\alpha(u)$, где u пробегает поле $GF(q)$ и $\alpha\in\{p_1+2p_{2l-2}+p_{l-1l}$, $p_{12}+2p_{3l-2}+p_{l-1l}$, $\dots$, $p_{1l-3}+2p_{l-2}+p_{l-1l}$, $p_2+2p_{3l-2}+p_{l-1l}$, $p_{23}+2p_{4l-2}+p_{l-1l},\dots,p_{2l-3}+2p_{l-2}+p_{l-1l}$, $\dots$, $p_{l-3}+2p_{l-2}+p_{l-1l}\}$.

Представим множество $\Phi^+\setminus\Phi^+_{J_{l-1}}$ в виде объединения попарно не пересекающихся подмножеств $M=\{p_{1l-1}$, $p_{2l-1},\dots,p_{l-2l-1}$, $p_{l-1}\}$, $M^\rho=\{p_{1l-2}+p_l$, $p_{2l-2}+p_l,\dots,p_{l-2}+p_l,p_l\}$ и $N=N^\rho=\{p_1+2p_{2l-2}+p_{l-1l}$, $p_{12}+2p_{3l-2}+p_{l-1l}$,

Таблица 6. Главные факторы подгруппы P_k из ${}^2D_l(q^2)$

V_S	λ	μ
$V_{1\tilde{p}_k}$, $1 \leqslant k \leqslant l-2$	$\tilde{p}_{1k}, \tilde{p}_{1k+1}, \ldots, \tilde{p}_{1l-2}$, $\tilde{p}_{2k}, \tilde{p}_{2k+1}, \ldots, \tilde{p}_{2l-2}, \ldots$, $\tilde{p}_k, \tilde{p}_{kk+1}, \ldots, \tilde{p}_{kl-2}$, $\tilde{p}_{1k} + 2\tilde{p}_{k+1l-1}, \tilde{p}_{1k+1} + 2\tilde{p}_{k+2l-1}, \ldots$, $\tilde{p}_{1l-2} + 2\tilde{p}_{l-1}, \tilde{p}_{2k} + 2\tilde{p}_{k+1l-1}, \ldots$, $\tilde{p}_{2l-2} + 2\tilde{p}_{l-1}, \ldots, \tilde{p}_k + 2\tilde{p}_{k+1l-1}$, $\tilde{p}_{kk+1} + 2\tilde{p}_{k+2l-1}, \ldots, \tilde{p}_{kl-2} + 2\tilde{p}_{l-1}$	$\tilde{p}_{1l-1}, \tilde{p}_{2l-1}, \ldots, \tilde{p}_{kl-1}$
$V_{2\tilde{p}_k}$, $2 \leqslant k \leqslant l-1$	$\tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_{2l-1}, \tilde{p}_{12} + 2\tilde{p}_{3l-1}, \ldots$, $\tilde{p}_{1k-1} + 2\tilde{p}_{kl-1}, \tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_{3l-1}$, $\tilde{p}_{23} + 2\tilde{p}_{4l-1}, \ldots, \tilde{p}_{2k-1} + 2\tilde{p}_{kl-1}, \ldots$, $\tilde{p}_{k-2} + 2\tilde{p}_{k-1l-1}, \tilde{p}_{k-2k-1} + 2\tilde{p}_{kl-1}$, $\tilde{p}_{k-1} + 2\tilde{p}_{kl-1}$	–
$V_{1\tilde{p}_{l-1}}$	–	$\tilde{p}_{1l-1}, \tilde{p}_{2l-1}, \ldots, \tilde{p}_{l-2l-1}, \tilde{p}_{l-1}$

$\ldots, p_{1l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}$, p_{1l}, $p_2 + 2p_{3l-2} + p_{l-1l}$, $p_{23} + 2p_{4l-2} + p_{l-1l}$, $\ldots$, $p_{2l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}$, $p_{2l}, \ldots, p_{l-3} + 2p_{l-2} + p_{l-1l}$, p_{l-3l}, $p_{l-2l}\}$, корни которых имеют шейпы, равные p_{l-1}, p_l и $p_{l-1} + p_l$ соответственно. Нижний центральный ряд группы $\overline{U}$ имеет вид $\overline{U} = \overline{U}_1 > \overline{U}_2 > 1$. По [3, теорема 2] $\overline{U}_1/\overline{U}_2 \cong \overline{V}_{p_{l-1}} \oplus \overline{V}_{p_l}$, где $\overline{V}_{p_{l-1}} = \prod\limits_{\zeta \in M} \overline{X}_\zeta \overline{U}_2/\overline{U}_2$ и $\overline{V}_{p_l} = \prod\limits_{\zeta \in M^\rho} \overline{X}_\zeta \overline{U}_2/\overline{U}_2$, $\overline{U}_2 = \overline{V}_{p_{l-1}+p_l} = \prod\limits_{\zeta \in N} \overline{X}_\zeta$. Так как $\overline{V}_{p_l} = \overline{V}^\sigma_{p_{l-1}} \neq \overline{V}_{p_{l-1}}, \overline{V}_{p_{l-1}} = \overline{V}^\sigma_{p_l} \neq \overline{V}_{p_l}, \overline{V}^\sigma_{p_{l-1}+p_l} = \overline{V}_{p_{l-1}+p_l}$, согласно предложению модули $(\overline{V}_{p_{l-1}+p_l})_\sigma$ и $(\overline{V}_{p_{l-1}} \oplus \overline{V}_{p_l})_\sigma$ являются абсолютно неприводимыми $GF(q)L_0$- и $GF(q^2)L_0$-модулями соответственно. Аддитивная группа $(\overline{V}_{p_{l-1}} \oplus \overline{V}_{p_l})_\sigma$ порождается элементами вида $\bar{x}_\beta(t)\overline{U}_2 + \bar{x}_{\beta^\rho}(t^q)\overline{U}_2$, где t пробегает поле $GF(q^2)$ и $\beta \in M$, а группа $(\overline{V}_{p_{l-1}+p_l})_\sigma$ порождается элементами $\bar{x}_\alpha(u)$, где u пробегает поле $GF(q)$, $\alpha \in N$. Представим полученные результаты в виде табл. 5. Второй и третий столбцы табл. 5 содержат корни α и β для порождающих элементов неприводимого модуля, указанного в первом столбце.

Система корней Φ типа D_l разбивается на $2(l-1)^2$ классов вида $\{r\}$ или $\{r, r^\rho\}$, где $r \in \Phi$, образующих систему корней $\widetilde{\Phi}$ типа B_{l-1}. Выпишем положительные корни системы $\widetilde{\Phi}$:

$$
\begin{gathered}
\tilde{p}_1 = \{p_1\},\ \tilde{p}_{12} = \{p_{12}\},\ \ldots,\ \tilde{p}_{1l-2} = \{p_{1l-2}\},\ \tilde{p}_2 = \{p_2\},\ \tilde{p}_{23} = \{p_{23}\},\ \ldots,\\
\tilde{p}_{2l-2} = \{p_{2l-2}\},\ \ldots,\ \tilde{p}_{l-3} = \{p_{l-3}\},\ \tilde{p}_{l-3l-2} = \{p_{l-3l-2}\},\ \tilde{p}_{l-2} = \{p_{l-2}\},\\
\tilde{p}_{l-1} = \{p_{l-1}, p_l\},\ \tilde{p}_1 + 2\tilde{p}_{2l-1} = \{p_1 + 2p_{2l-2} + p_{l-1l}\},\\
\tilde{p}_{12} + 2\tilde{p}_{3l-1} = \{p_{12} + 2p_{3l-2} + p_{l-1l}\},\ \ldots,\ \tilde{p}_{1l-2} + 2\tilde{p}_{l-1} = \{p_{1l}\},\\
\tilde{p}_2 + 2\tilde{p}_{3l-1} = \{p_2 + 2p_{3l-2} + p_{l-1l}\},\ \tilde{p}_{23} + 2\tilde{p}_{4l-1} = \{p_{23} + 2p_{4l-2} + p_{l-1l}\},\ \ldots,\\
\tilde{p}_{2l-2} + 2\tilde{p}_{l-1} = \{p_{2l}\},\ \ldots,\ \tilde{p}_{l-2} + 2\tilde{p}_{l-1} = \{p_{l-2l}\},\ \tilde{p}_{1l-1} = \{p_{1l-1}, p_{1l-2} + p_l\},\\
\tilde{p}_{2l-1} = \{p_{2l-1}, p_{2l-2} + p_l\},\ \ldots,\ \tilde{p}_{l-2l-1} = \{p_{l-2l-1}, p_{l-2} + p_l\}.
\end{gathered}
$$

Переписав табл. 5 в терминах системы корней B_{l-1}, получим табл. 6. В первом столбце табл. 6 приведены главные факторы $V_S = V_{j\tilde{p}_k}$ для $j \in \{1, 2\}$, входящие в унипотентный радикал каждой параболической максимальной подгруппы P_k скрученной группы лиева типа $^2D_l(q^2)$. Группа P_k получается удалением k-й вершины диаграммы Дынкина системы корней B_{l-1}, $1 \leqslant k \leqslant l-1$. Для $k \in \{1, 2, \dots, l-2\}$ модуль $V_{1\tilde{p}_k}$ равен $\prod\limits_{\lambda,\mu} X^1_\lambda X^1_\mu U_2/U_2$, а модуль $V_{1\tilde{p}_{l-1}}$ равен $\prod\limits_{\mu} X^1_\mu U_2/U_2$. Для $k \in \{2, 3, \dots, l-1\}$ модуль $V_{2\tilde{p}_k}$ равен $\prod\limits_{\lambda} X^1_\lambda$. Корневые подгруппы $X^1_\lambda = \{x_\lambda(t) = x_r(t) \mid t \in GF(q)\}$ и $X^1_\mu = \{x_\mu(t) = x_r(t)x_{r^\rho}(t^q) \mid t \in GF(q^2)\}$ параметризуются элементами λ и μ — корнями типа B_{l-1}, которые выписываются во втором и третьем столбцах табл. 6 соответственно.

Теперь порядки главных факторов подгруппы P_k, входящие в ее унипотентный радикал, легко вычисляются. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кораблева В. В.* О главных факторах параболических максимальных подгрупп конечных простых групп нормального лиева типа // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 764–782.
2. *Кораблева В. В.* О главных факторах параболических максимальных подгрупп группы $^2E_6(q^2)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 230–237.
3. *Azad H., Barry M., Seitz G.* On the structure of parabolic subgroups // Commun. Algebra. 1990. V. 18, N 2. P. 551–562.
4. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972.
5. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: John Wiley & Sons, 1972.

Статья поступила 8 января 2015 г.

Кораблева Вера Владимировна
Челябинский гос. университет,
лаборатория квантовой топологии,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург 620990
vvk@csu.ru