Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2015. Том 56, № 5

УДК 517.5

ОБОБЩЕННЫЕ КЛАССЫ ХАЙЛАША — СОБОЛЕВА НА УЛЬТРАПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ УСЛОВИЮ УДВОЕНИЯ

Е. В. Губкина,
М. А. Прохорович, Е. М. Радыно

Аннотация. Рассматриваются обобщенные классы Хайлаша — Соболева $W^p_\alpha(X)$, $\alpha > 0$, на ультраметрических пространствах с мерой. Изучаются массивность дополнения к множеству точек Лебега, вопросы о скорости сходимости средних Стеклова, а также задача об аппроксимации Лузина. Оценки размеров исключительных множеств даны в терминах емкостей.

Существенно, что снято ограничение $\alpha \leq 1$, которое было необходимо в случае метрических пространств. Результаты работы были анонсированы в журнале «Доклады национальной академии наук Беларуси».

DOI 10.17377/smzh.2015.56.504

Ключевые слова: точки Лебега, скорость сходимости средних Стеклова, аппроксимация Лузина, классы Хайлаша — Соболева, емкости.

1. Введение

В последние годы значительно вырос интерес к анализу на метрических пространствах с мерой, в частности, к исследованию пространств гладких функций на таких структурах. Это связано, например, с интенсивным развитием теории фракталов, римановых пространств, пространств Харди и нелинейного гармонического анализа.

В [1] Хайлаш ввел пространство Соболева $W^p_1(X)$ на любом метрическом пространстве X с s-регулярной мерой, которое при $X = \mathbb{R}^n$ совпадает с классическим пространством Соболева первого порядка (все необходимые определения приведены ниже). Отметим, что работе [1] предшествовала важная работа Кальдерона [2], в которой, в частности, было дано описание пространств $W^p_1(\mathbb{R}^n)$, не использующее специфических конструкций на $\mathbb{R}^n$, кроме метрики и меры.

Классы Хайлаша — Соболева $W^p_1(X)$ интенсивно изучаются. В частности, Киннунен, Мартио рассмотрели емкости, порожденные классами $W^p_1(X)$ [3]. Немного позднее в терминах этих емкостей Киннунен, Латвала оценили массивность дополнения к множеству точек Лебега функции из $W^p_1(X)$ [4].

Задача об аппроксимации Лузина для пространств $W^p_1(X)$ исследована Хайлашем [1] (размеры исключительных множеств оценивались в терминах меры) и Хайлашем, Киннуненом [5] (с оценками в терминах хаусдорфовой вместимости).

Дробные шкалы пространств Хайлаша — Соболева $W_\alpha^p(X)$, $0 < \alpha \leq 1$, рассматривались в работе А. С. Романова [6]. Соответствующие емкости при $0 < \alpha \leq 1$ появились в [7] (см. также [8, 9]).

Результаты из [4, 5] перенесены на пространства $W_\alpha^p(X)$, $0 < \alpha \leq 1$, в работах М. А. Прохоровича [7, 8] и В. Г. Кротова, М. А. Прохоровича [10] (оценки размеров исключительных множеств были даны в терминах хаусдорфовой вместимости и емкостей, соответствующих классам $W_\alpha^p(X)$). Здесь следует также упомянуть работу В. Г. Кротова [11], в которой рассмотрена задача о скорости сходимости средних Стеклова для классов $W_\alpha^p(X)$, $0 < \alpha \leq 1$, с оценкой исключительного множества в терминах емкостей.

Отметим, что на некоторых метрических пространствах классы Гёльдера $H^\alpha(X)$ (а следовательно, и классы $W_\alpha^p(X)$) нетривиальны при некоторых значениях $\alpha > 1$. Например, это так на снежинке Коха при $\alpha \leq \log 4/\log 3$ (см. работу Йонсона [12]) и на неархимедовых пространствах при всех $\alpha > 0$. В этой статье мы рассматриваем неархимедовы пространства.

Оценка исключительного множества Лебега для классов $W_\alpha^p(X)$ при любом $\alpha > 0$ получена М. А. Прохоровичем [13], а задача о скорости сходимости средних Стеклова — В. Г. Кротовым, М. А. Прохоровичем [14]. Отметим, что результаты из [13, 14] установлены лишь в терминах размерности Хаусдорфа — дело в том, что на общих метрических пространствах работа с емкостями в классах $W_\alpha^p(X)$ с $\alpha > 1$ не всегда возможна, так как нетривиальные гёльдеровские функции с показателем $\alpha > 1$ и носителем на любом заданном шаре не всегда существуют.

В терминах емкостей при любом $\alpha > 0$ результаты такого сорта удалось получить для пространств $W_\alpha^p(\mathbb{Q}_l^n)$, где $\mathbb{Q}_l^n$ — ультраметрическое пространство l-адических векторов: оценка размеров исключительного множества Лебега для классов $W_\alpha^p(\mathbb{Q}_l^n)$, $\alpha > 0$, установлена в [15]; скорость сходимости средних Стеклова изучалась в [16]; задача об аппроксимации Лузина рассматривалась в [17] (полное доказательство приведено в [18]).

Однако класс ультраметрических пространств с условием удвоения не ограничивается частным случаем пространства $\mathbb{Q}_l^n$. Многочисленные примеры такого типа можно получить, взяв, например, пространства из [19, гл. II, § 10] с дополнительным условием ограниченности фигурирующих там коэффициентов a_k. В этот же класс попадают и группы Виленкина [20] при подходящем выборе метрики (в качестве меры следует рассматривать меру Хаара).

Нашей целью является перенос результатов, полученных для $W_\alpha^p(\mathbb{Q}_l^n)$, $\alpha > 0$, на любое ультраметрическое пространство с удваивающейся мерой. Результаты были анонсированы в [21, 22].

Конечно, для случая $X = \mathbb{R}^n$ все затрагиваемые выше вопросы были изучены гораздо раньше. Мы не будем приводить историю этих результатов (она достаточно подробно изложена во многих источниках (см., например, работы [10, 11] и библиографию там же).

Отметим, что ультраметрические пространства важны, например, при моделировании энергетического ландшафта некоторых сложных молекул, а процессы диффузии на ультраметрических пространствах — при моделировании эволюции таких молекул [23]. Надеемся, что результаты о функциях на ультраметрических пространствах найдут применение в изучении упомянутых диффузионных процессов.

2. Терминология и определения

Пусть X — ультраметрическое пространство с ультраметрикой d и регулярной борелевской мерой μ. Напомним, что метрика d называется *ультраметрикой*, если выполняется сильное неравенство треугольника

$$d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(z,y)\} \quad \text{для любых } x, y, z \in X. \tag{1}$$

Также предполагаем выполненным следующее условие удвоения: существует такая постоянная a_μ, что

$$\mu(B(x,2r)) \le a_\mu \mu(B(x,r)), \quad x \in X,\ r > 0. \tag{2}$$

Здесь $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ — шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$.

Условие (2) допускает количественную переформулировку (см., например, [24, с. 103]): существуют числа $c > 0$ и $\gamma > 0$, для которых

$$\mu(B(x,R)) \le c\left[\frac{R}{r}\right]^\gamma \mu(B(x,r)), \quad x \in X,\ 0 < r \le R. \tag{3}$$

Всюду далее считаем, что $\alpha > 0$ и $1 < p < \infty$. Через $L^p = L^p(X)$ обозначаем обычные лебеговы пространства, порожденные мерой μ. Для функции $u \in L^p(X)$ обозначим через $D_\alpha(u)$ класс всех неотрицательных μ-измеримых функций на X, для каждой из которых существует такое множество $E \subset X$, $\mu(E) = 0$, что

$$|u(x) - u(y)| \le [d(x,y)]^\alpha [g(x) + g(y)], \quad x, y \in X \setminus E. \tag{4}$$

Введем шкалу пространств Хайлаша — Соболева следующим образом:

$$W^p_\alpha(X) = \{u \in L^p(X) : D_\alpha(u) \cap L^p(X) \ne \varnothing\},$$

$$\|u\|_{W^p_\alpha(X)} = \left(\|u\|^p_{L^p(X)} + [\inf\{\|g\|_{L^p(X)} : g \in D_\alpha(u) \cap L^p(X)\}]^p\right)^{1/p}.$$

Классы $W^p_\alpha(X)$ порождают соответствующие емкости

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = \inf\left\{\|u\|^p_{W^p_\alpha(X)} : u \in W^p_\alpha(X),\ u \ge 1 \text{ в окрестности } E\right\}.$$

Классы Гёльдера вводятся обычным способом: если $E \subset X$, $\beta > 0$, то

$$H^\beta(E) = \left\{u : \|u\|_{H^\beta(E)} = \sup_{x \ne y,\, x,y \in E} [d(x,y)]^{-\beta} |u(x) - u(y)| < +\infty\right\}.$$

Напомним определение s-вместимости Хаусдорфа (см., например, [25, § 2.10]):

$$H^s_\infty(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty r_i^s : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i)\right\}, \quad E \subset X,\ s > 0.$$

3. Основные результаты

Отметим, что функции из классов $W^p_\alpha(X)$ определены лишь μ-почти всюду, а их свойства, с которыми будем иметь дело ниже, зависят от изменения значений функции на множествах μ-меры нуль, поэтому, следуя [5], будем считать далее, что все локально суммируемые функции в каждой точке определяются равенством

$$u(x) = \limsup_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} u\,d\mu, \quad u_E = \fint_E u\,d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E u\,d\mu.$$

3.1. Массивность множества точек Лебега. Напомним, что $x \in X$ называется *точкой Лебега* для функции $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$, если

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} u\,d\mu = u(x).$$

Теорема 1 дает ответ на вопрос о массивности дополнения к множеству точек Лебега.

Теорема 1. *Пусть $\alpha p < \gamma$ и задана функция $u \in W^p_\alpha(X)$. Тогда существует такое множество $E \subset X$, что $\mathrm{Cap}_{\alpha,p}(E) = 0$ и для любого $x \in X \setminus E$ существует предел*

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} u\,d\mu = u^*(x),$$

более того,

$$\lim_{r\to+0} \fint_{B(x,r)} |u - u^*(x)|^q\,d\mu = 0 \quad \text{при } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

В случае метрических пространств (без условия (1)) при $\alpha = 1$ это утверждение доказано в [4], причем в более слабой форме: лишь при $1/q > 1/p - 1/\gamma$.

Результаты из [4] перенесены на метрические пространства при $0 < \alpha \le 1$ с точным показателем q в [7], а в [13] (см. также [8]) доказан аналогичный результат в терминах размерности Хаусдорфа с произвольным $\alpha > 0$.

Теорема 1 была доказана в [15] для пространства l-адических векторов $\mathbb{Q}_l^n$, которое является частным случаем ультраметрических пространств с условием удвоения меры (определение пространства $\mathbb{Q}_l^n$ см., например, в [26]).

3.2. Скорость сходимости средних Стеклова. Далее дадим решение задачи о скорости сходимости средних Стеклова для функций из классов $W^p_\alpha(X)$.

Теорема 2. *Пусть $0 < \beta < \alpha$, $\alpha p < \gamma$ и задана функция $u \in W^p_\alpha(X)$. Тогда существует множество $E \subset X$ такое, что $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}(E) = 0$ и для любого $x \in X \setminus E$*

$$\lim_{r\to+0} r^{-\beta} \Bigg(\fint_{B(x,r)} |u - u(x)|^q\,d\mu \Bigg)^{1/q} = 0 \quad \text{при } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

На метрических пространствах при $0 < \alpha \le 1$ теорема 2 получена в [11, следствие 6]. Аналогичный результат в терминах размерности Хаусдорфа установлен на метрических пространствах для любого $\alpha > 0$ [14].

Ограничение $\alpha \le 1$, необходимое для метрических пространств, в теореме 2 удалось снять для пространства l-адических векторов $\mathbb{Q}_l^n$ в [16].

3.3. Задача об аппроксимации Лузина.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \beta \le \alpha$, $\alpha p < \gamma$ *и задана функция* $u \in W^p_\alpha(X)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют функция* w *и открытое множество* $O \subset X$ *такие, что*

(1) $\mathrm{Cap}_{\alpha-\beta,p}(O) < \varepsilon$, $H^{\gamma-(\alpha-\beta)p}_\infty(O) < \varepsilon$,
(2) $u = w$ *на* $X \setminus O$,
(3) $w \in W^p_\alpha(X)$ *и* $w \in H^\beta(B)$ *для любого шара* $B \subset X$,
(4) $\|u - w\|_{W^p_\alpha} < \varepsilon$.

На метрических пространствах при $\beta = \alpha = 1$ подобный результат ранее получен в [1], где вместо (1) утверждалось, что $\mu(O) < \varepsilon$, а в (3) было $w \in H^1(X)$. Случай $\beta \le \alpha = 1$ существенно сложнее, он изучен в [5]. Общий для метрических пространств случай $0 < \beta \le \alpha \le 1$ рассматривался в [10].

Для классов $W^p_\alpha(\mathbb{Q}^n_l)$ теорема 3 доказана в [17] (полное доказательство см. в [18]).

4. Доказательство основных результатов

Далее будем указывать, над какой метрикой рассматриваются соответствующие объекты. Например, будем писать $W^p_\alpha[d](X)$ вместо $W^p_\alpha(X)$.

Заметим, что если d — ультраметрика, то d^α также ультраметрика для любого $\alpha > 0$. Посмотрим, каким образом преобразуются параметры интересующих нас математических объектов в новой метрике.

Прежде всего отметим равенство

$$B[d](x, r) = B[d^\alpha](x, r^\alpha). \tag{5}$$

Условие (3) в метрике d^α примет вид

$$\mu(B[d^\alpha](x, R)) \le c\left(\frac{R}{r}\right)^{\gamma/\alpha} \mu(B[d^\alpha](x, r)), \quad x \in X,\ 0 < r \le R. \tag{6}$$

Для пространств Хайлаша — Соболева по определению имеем $W^p_\alpha[d](X) = W^p_1[d^\alpha](X)$ (см. неравенство (4)). Показатели емкостей преобразуются следующим образом:

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,p}[d](E) = \mathrm{Cap}_{1,p}[d^\alpha](E), \tag{7}$$

$$\mathrm{Cap}_{\beta/\alpha-1,p}[d](E) = \mathrm{Cap}_{\beta-\alpha,p}[d^\alpha](E). \tag{8}$$

В силу (6) и (7) получаем теорему 1 для классов $W^p_\alpha[d](X)$ при любом $\alpha > 0$, применив ее известный частный случай к классам $W^p_1[d^\alpha](X)$ (для классов $W^p_1[\,\cdot\,](X)$ теорема 1 доказана в [7]).

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся соотношениями (5), (6) и (8), также сведя ее к известному частному случаю пространства $W^p_1[d^\alpha](X)$, взяв в исходной формулировке вместо параметров α и β числа 1 и β/α соответственно. Необходимый частный случай теоремы 2 установлен в [11].

Чтобы доказать теорему 3, пересчитаем параметры пространств Гёльдера и вместимостей Хаусдорфа.

Для пространств Гёльдера справедливо равенство

$$H^\alpha[d](X) = H^{\beta/\alpha}[d^\alpha](X). \tag{9}$$

Для вместимостей Хаусдорфа имеем $H^s_\infty[d](E) = H^{s/\alpha}_\infty[d^\alpha](E)$, в частности,

$$H^{\gamma-(\alpha-\beta)p}_\infty[d](E) = H^{\gamma/\alpha-(1-\beta/\alpha)p}_\infty[d^\alpha](E). \tag{10}$$

Теперь теорему 3 можно свести к случаю пространств $W_1^p[d^\alpha](X)$, взяв в исходной формулировке вместо параметров α и β числа 1 и β/α соответственно и использовав равенства (8)–(10), а также равенство $\|\cdot\|_{W_\alpha^p[d](X)} = \|\cdot\|_{W_1^p[d^\alpha](X)}$. Справедливость частного случая теоремы 3 установлена в [10].

Авторы благодарны рецензенту за ряд ценных замечаний, которые были учтены при написании окончательного варианта статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hajłasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Anal. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
2. *Calderón A. P.* Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // Stud. Math. 1972. V. 44. P. 561–582.
3. *Kinnunen J., Martio O.* The Sobolev capacity on metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1996. V. 21. P. 367–382.
4. *Kinnunen J., Latvala V.* Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces // Rev. Mat. Iberoam. 2002. V. 18, N 3. P. 685–700.
5. *Hajłasz P., Kinnunen J.* Hölder quasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces // Rev. Mat. Iberoam. 1998. V. 14, N 3. P. 601–622.
6. *Романов А. С.* О теоремах вложения для обобщенных пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 931–937.
7. *Прохорович М. А.* Емкости и точки Лебега для дробных классов Хайлаша —- Соболева на метрических пространствах с мерой // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. науки. 2006. № 1. С. 19–23.
8. *Прохорович М. А.* Размерность Хаусдорфа множества Лебега для классов W_α^p на метрических пространствах // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 1. С. 99–107.
9. *Прохорович М. А.* Соболевские емкости на метрических пространствах с мерой // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2007. № 3. С. 106–111.
10. *Кротов В. Г., Прохорович М. А.* Аппроксимация Лузина функций из классов W_α^p на метрических пространствах с мерой // Изв. вузов. Математика. 2008. № 5. С. 55–66.
11. *Кротов В. Г.* Весовые L^p-неравенства для шарп-максимальных функций на метрических пространствах с мерой // Изв. НАН Армении. Математика. 2006. Т. 41, № 2. С. 25–42.
12. *Jonsson A.* Haar wavelets of higher order on fractals and regularity of functions // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 290, N 1. P. 86–104.
13. *Прохорович М. А.* Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева W_α^p, $\alpha > 0$, на пространствах однородного типа // Мат. заметки. 2009. Т. 85, № 4. С. 616–621.
14. *Кротов В. Г., Прохорович М. А.* Скорость сходимости средних Стеклова на метрических пространствах с мерой и размерность Хаусдорфа // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 145–148.
15. *Олешкевич Д. Н., Прохорович М. А.* Точки Лебега для функций из классов Соболева на пространстве p-адических чисел // Вестн. БрГУ. Сер. 4. Физика. Математика. 2010. № 2. С. 103–110.
16. *Прохорович М. А., Радыно Е. М.* Скорость сходимости средних Стеклова для классов Соболева на пространстве p-адических чисел // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 5. С. 5–8.
17. *Губкина Е. В., Олешкевич Д. Н., Прохорович М. А., Радыно Е. М.* Аппроксимация Лузина функций из классов Соболева на пространстве p-адических векторов // Докл. НАН Беларуси. 2012. Т. 56, № 3. С. 16–18.
18. *Губкина Е. В., Забелло К. В., Прохорович М. А., Радыно Е. М.* Аппроксимация Лузина функций из классов Соболева на пространстве многомерного p-адического аргумента // Пробл. физики, математики и техники. 2013. Т. 15, № 2. С. 58–65.
19. *Hewitt E.* Abstract harmonic analysis. Berlin: Springer-Verl., 1979. V. 1.
20. *Фарков Ю. А.* Биортогональные всплески на группах Виленкина // Тр. МИАН. 2009. Т. 265. С. 110–124.
21. *Губкина Е. В., Прохорович М. А., Радыно Е. М.* Точки Лебега и скорость сходимости средних Стеклова для классов Соболева на ультраметрических пространствах с условием удвоения // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 2. С. 17–19.

22. *Губкина Е. В., Забелло К. В., Прохорович М. А., Радыно Е. М.* Аппроксимация Лузина функций из классов Соболева на ультраметрических пространствах с условием удвоения // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 2. С. 22–25.
23. *Аветисов В. А., Бикулов А. Х., Осипов В. А.* p-Адические модели ультраметрической диффузии в конформационной динамике макромолекул // Тр. МИАН. 2004. Т. 245. С. 55–64.
24. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. Berlin: Springer-Verl., 2001.
25. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
26. *Schikhof W.* Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis. London: Cambridge Univ. Press, 1984.

Статья поступила 8 января 2015 г., окончательный вариант — 19 февраля 2015 г.

Губкина Елена Владимировна
Горно-Алтайский гос. университет,
экономико-юридический факультет,
кафедра экономики предприятия и прикладной информатики,
ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
helenvl@bk.ru

Прохорович Михаил Александрович
Белорусский гос. университет,
механико-математический факультет,
кафедра теории функций,
пр. Независимости, 4, Минск 220030, Беларусь
prohorovich@mail.ru

Радыно Евгений Мефодьевич
Белорусский гос. университет,
механико-математический факультет,
кафедра функционального анализа,
пр. Независимости, 4, Минск 220030, Беларусь
yauhen.radyna@gmail.com