Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 517.9

ОПЕРАТОР ГРИНА ОБОБЩЕННОЙ МАТРИЧНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

С. М. Чуйко

Аннотация. Найдены условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нётеровой матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи. Получены достаточные условия приводимости обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения к традиционному дифференциально-алгебраическому уравнению с неизвестной в виде вектор-столбца. Для решения матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи использованы оригинальные условия разрешимости, а также конструкция общего решения матричного уравнения типа Сильвестра.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.417

Ключевые слова: матричная краевая задача, дифференциально-алгебраические уравнения, обобщенный оператор Грина, уравнение Сильвестра.

1. Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений [1–3]

$$Z(t) = (Z^{(i,j)}(t)), \quad Z^{(i,j)}(\cdot) \in C^1[a;b], \quad i = 1,2,\dots,\beta,\ j = 1,2,\dots,\gamma,$$

обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения

$$\mathscr{D}Z(t) = \mathscr{A}Z(t) + F(t), \tag{1}$$

подчиненных краевому условию

$$\mathscr{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{2}$$

Здесь

$$\mathscr{D}Z(t) := \sum_{i=1}^{p} S_i(t)Z'(t)R_i(t), \quad \mathscr{A}Z(t) := \sum_{j=1}^{q} \Phi_j(t)Z(t)\Psi_j(t)$$

— линейные матричные операторы, $S_i(t), \Phi_i(t) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, $R_i(t), \Psi_j(t) \in \mathbb{R}^{\gamma\times\delta}$ и $F(t)$ — непрерывные матрицы, $\mathscr{L}Z(\cdot)$ — линейный ограниченный матричный функционал: $\mathscr{L}Z(\cdot) : C^1[a;b] \to \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$, кроме того, $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mu,\nu$ — произвольные натуральные числа. Матричное дифференциально-алгебраическое уравнение (1) обобщает традиционные постановки задач для матричных дифференциальных уравнений [1–3] и, в частности, дифференциально-алгебраических уравнений [4–7]. С другой стороны, матричная дифференциально-алгебраическая краевая задача (1), (2) обобщает традиционные постановки нётеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [8–10].

Обозначим через $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$, $j = 1, 2, \ldots, \beta\gamma$, естественный [11] базис пространства $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$, при этом задача о нахождении решений уравнения (1) приводит к задаче о нахождении вектора $y(t) \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}$, компоненты которого $y_j(t) \in C^1[a;b]$ определяют разложение матрицы

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{\beta\gamma} \Xi^{(j)} y_j(t), \quad y_j(t) \in \mathbb{R}^1,\ j = 1, 2, \ldots, \beta\gamma,$$

по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. Определим оператор [12, 13]

$$\mathscr{M}[\mathscr{B}] : \mathbb{R}^{\beta\times\gamma} \to \mathbb{R}^{\beta\gamma}$$

как оператор, который ставит в соответствие матрице $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ вектор-столбец $\mathscr{M}[\mathscr{B}] \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}$, составленный из γ столбцов матрицы $\mathscr{B}$, а также обратный оператор

$$\mathscr{M}^{-1}\{\mathscr{M}[\mathscr{B}]\} : \mathbb{R}^{\beta\gamma} \to \mathbb{R}^{\beta\times\gamma},$$

который ставит в соответствие вектору $\mathscr{M}[\mathscr{B}] \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}$ матрицу $\mathscr{B} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. В новых обозначениях линейный матричный оператор $\mathscr{D}Z(t)$ принимает вид

$$\mathscr{D}Z(t) := \sum_{i=1}^{p} S_i(t) Z'(t) R_i(t) = \sum_{j=1}^{\beta\gamma}\sum_{i=1}^{p} S_i(t)\Xi^{(j)} R_i(t) y_j'(t),$$

при этом

$$\mathscr{M}[\mathscr{D}Z(t)] = Q(t)y'(t), \quad Q(t) := [Q_i(t)]_{i=1}^{\beta\gamma} \in \mathbb{R}^{\alpha\delta\times\beta\gamma},$$

где

$$Q_j(t) = \mathscr{M}\left[\sum_{i=1}^{p} S_i(t)\Xi^{(j)} R_i(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \beta\gamma.$$

Аналогично

$$\mathscr{M}[\mathscr{A}Z(t)] = \Omega(t)y(t), \quad \Omega(t) := [\Omega_i(t)]_{i=1}^{\beta\gamma} \in \mathbb{R}^{\alpha\delta\times\beta\gamma},$$

где

$$\Omega_j(t) = \mathscr{M}\left[\sum_{i=1}^{q} \Phi_i(t)\Xi^{(j)}\Psi_i(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \beta\gamma.$$

Таким образом, задача о построении решений обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения (1) приведена к задаче о нахождении решений

$$y(t) = \operatorname{col}(y_i(t)) \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}, \quad y_i(\cdot) \in C^1[a;b], \quad i = 1, 2, \ldots, \beta\gamma,$$

традиционного дифференциально-алгебраического уравнения [4–7]

$$Q(t)y'(t) = \Omega(t)y(t) + \mathscr{F}(t), \quad \mathscr{F}(t) := \mathscr{M}[F(t)]. \tag{3}$$

2. Случай разрешимости относительно производной

При условии [10]

$$P_{Q^*(t)}\Omega(t) = 0, \quad P_{Q^*(t)}\mathscr{F}(t) = 0, \quad Q^+(t)\Omega(t), Q^+(t)\mathscr{F}(t) \in C[a;b] \tag{4}$$

система (3) по меньшей мере одним способом разрешима относительно производной

$$\frac{dy}{dt} = Q^+(t)\Omega(t)y + Q^+(t)\mathscr{F}(t).$$

Здесь $Q^+(t)$ — псевдообратная (по Муру — Пенроузу) матрица, $P_{Q^*(t)}$ — $(\alpha\delta \times \alpha\delta)$-матрица-ортопроектор, $P_{Q^*(t)} : \mathbb{R}^{\alpha\delta} \to N(Q^*(t))$. Обозначим через $X(t)$ нормальную фундаментальную матрицу [8]

$$\frac{dX(t)}{dt} = Q^+(t)\Omega(t)X(t), \quad Q^+(t)\Omega(t) \in \mathbb{R}^{\beta\gamma\times\beta\gamma}, \quad X(a) = I_{\beta\gamma},$$

полученной традиционной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При условии (4) система (3) имеет решение вида

$$y(t,c) = X(t)c + K[Q^+(s)\mathscr{F}(s)](t), \quad K[f(s)](t) := X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)f(s)\,ds, \ c \in \mathbb{R}^{\beta\gamma},$$

которое определяет решение обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения (1)

$$Z(t,c) = W(t,c) + \mathscr{K}[F(s)](t), \quad W(t,c) := \mathscr{M}^{-1}[X(t)c], \quad c \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}, \tag{5}$$

где $\mathscr{K}[F(s)](t) := \mathscr{M}^{-1}\{K[Q^+(s)\mathscr{F}(s)](t)\}$ — обобщенный оператор Грина матричной задачи Коши с $Z(a) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (1), $W(t,c)$ — общее решение задачи Коши с $Z(a) = \mathscr{M}^{-1}(c)$ для однородной части уравнения (1). Таким образом, доказано следующее достаточное условие разрешимости задачи Коши для дифференциально-алгебраической системы (1).

Лемма. *При условии* (4) *матричная задача Коши с* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для дифференциально-алгебраической системы* (1) *для любого начального значения* $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}$ *имеет по меньшей мере одно решение* (5) *при* $c = \mathscr{M}\{\mathfrak{A}\}$.

Обозначим через $\Theta^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, \beta\gamma$, естественный базис [11] пространства $\mathbb{R}^{\beta\gamma}$. Подставляя решение обобщенного матричного дифференциально алгебраического уравнения (1) в краевое условие (2), приходим к задаче о нахождении решений

$$c = \sum_{j=1}^{\beta\gamma} \Theta^{(j)}\xi_j \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ldots, \beta\gamma,$$

матричного уравнения типа Сильвестра [12]

$$\mathscr{L}W(\cdot,c) + \mathscr{L}\mathscr{K}[F(s)](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{6}$$

В критическом случае ($P_{\mathscr{Q}^*} \neq 0$) при условии (4) и

$$P_{\mathscr{Q}_d^*}\mathscr{M}\{\mathfrak{A} - \mathscr{L}\mathscr{K}[F(s)](\cdot)\} = 0 \tag{7}$$

решение матричного уравнения (6) определяет вектор [12, 13]

$$c = \mathscr{Q}^+\mathscr{M}\{\mathfrak{A} - \mathscr{L}\mathscr{K}[F(s)](\cdot)\} + P_{\mathscr{Q}_r}c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $P_{\mathscr{Q}^*}$ — $(\mu\nu \times \mu\nu)$-матрица-ортопроектор, $P_{\mathscr{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu\nu} \to N(\mathscr{Q}^*)$, где

$$\mathscr{Q} := [\mathscr{Q}_i]_{i=1}^{\beta\gamma} \in \mathbb{R}^{\mu\nu\times\beta\gamma}, \quad \mathscr{Q}_i := \mathscr{M}\{\mathscr{L}\mathscr{M}^{-1}[X(\cdot)\Theta^{(i)}]\}, \quad i = 1, 2, \ldots, \beta\gamma,$$

матрица $P_{\mathscr{Q}_r}$ составлена из r линейно независимых столбцов $(\beta\gamma\times\beta\gamma)-$ матрицы-ортопроектора $P_{\mathscr{Q}} : \mathbb{R}^{\beta\gamma} \to N(\mathscr{Q})$. Матрица $P_{\mathscr{Q}_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк матрицы-ортопроектора $P_{\mathscr{Q}^*}$. Таким образом, в критическом случае при условиях (4) и (7) по меньшей мере одно решение обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию (2)

$$Z(t, c_r) = W(t, c_r) + G[F(s); \mathfrak{A}](t), \quad W(t, c_r) := \mathscr{M}^{-1}[X(t)P_{\mathscr{Q}_r}c_r], \quad c_r \in \mathbb{R}^r, \tag{8}$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$G[F(s); \mathfrak{A}](t) = \mathscr{M}^{-1}\{X(t)\mathscr{Q}^+\mathscr{M}\{\mathfrak{A} - \mathscr{L}\mathscr{K}[F(s)](\cdot)\}\} + \mathscr{K}[F(s)](t) \tag{9}$$

краевой задачи (1), (2). Таким образом, доказано следующее достаточное условие разрешимости матричной дифференциально-алгебраической задачи (1), (2).

Теорема 1. *В критическом случае* ($P_{\mathscr{Q}^*} \neq 0$) *при условиях* (4) *и* (7) *по меньшей мере одно решение* (8) *обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения* (1), *удовлетворяющее краевому условию* (2), *определяет обобщенный оператор Грина* (9) *матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи* (1), (2).

Пример 1. Требованиям доказанной теоремы 1 удовлетворяет задача о построении 2π-периодических решений матричной дифференциально-алгебраической системы

$$\mathscr{D}Z(t) = \mathscr{A}Z(t) + F(t), \tag{10}$$

где

$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 := \Phi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ \cos t & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_1 := R_2, \quad \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через

$$\Xi_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ \Xi_6 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

естественный базис пространства $\mathbb{R}^{3\times 2}$. Поскольку $P_{Q^*(t)}\Omega(t) = 0$, $P_{Q^*(t)}\mathscr{F}(t) = 0$, условие (4) выполнено. Произведение $Q^+(t)\Omega(t)$ определяет матрицу

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и общее решение

$$W(t,c)=\begin{pmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & tc_3+c_5+2tc_6 \\ c_3 & c_6 \end{pmatrix}$$

задачи Коши с

$$Z(a)=\mathscr{M}^{-1}(c):=\begin{pmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ c_3 & c_6 \end{pmatrix}, \quad c:=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_6 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^6$$

для однородной части уравнения (10). Традиционный оператор Грина задачи Коши $K[f(s)](t)$ определяет обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (10)

$$\mathscr{K}[F(s)](t):=\mathscr{M}^{-1}\{K[Q^+(s)\mathscr{F}(s)](t)\}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin t & 3+t-3\cos t-\sin t \\ 1-\cos t & \sin t \end{pmatrix};$$

здесь

$$Q^+(t)\mathscr{F}(t)=\begin{pmatrix} 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}^*.$$

Поскольку $P_{\mathscr{Q}^*}\neq 0$, в задаче о построении 2π-периодических решений матричной дифференциально-алгебраической системы (10) имеет место критический случай, здесь

$$\mathscr{Q}=-2\pi\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&2 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathscr{Q}^*}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение

$$W(t,c_r)=\begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \\ -2c_5 & c_5 \end{pmatrix}$$

однородной части 2π-периодической матричной задачи для дифференциально-алгебраической системы (10) определяют матрицы

$$P_{\mathscr{Q}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5&0&0&0&0&0 \\ 0&5&0&0&0&0 \\ 0&0&4&0&0&-2 \\ 0&0&0&5&0&0 \\ 0&0&0&0&5&0 \\ 0&0&-2&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathscr{Q}_r}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5&0&0&0&0 \\ 0&5&0&0&0 \\ 0&0&0&0&-2 \\ 0&0&5&0&0 \\ 0&0&0&5&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие (7) выполнено, решение 2π-периодической матричной задачи для дифференциально-алгебраической системы (10) определяет обобщенный оператор Грина

$$G[F(s);\mathfrak{A}](t)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin t & 3-3\cos t-\sin t \\ \frac{4}{5}-\cos t & -\frac{2}{5}+\sin t \end{pmatrix}.$$

3. Случай неразрешимости относительно производной

При условии $P_{Q^*(t)}\Omega(t) \neq 0$ либо $P_{Q^*(t)}\mathscr{F}(t) \neq 0$ система (3) не разрешима относительно производной, при этом система (1) может иметь решения вида

$$Z(t) = \mathscr{P}_\ell Y(t)\mathscr{P}_r, \quad \mathscr{P}_\ell \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta}, \quad \mathscr{P}_r \in \mathbb{R}^{\gamma\times\gamma},$$

где $\mathscr{P}_\ell, \mathscr{P}_r$ — неизвестные постоянные матрицы. В этом случае линейный матричный оператор $\mathscr{D}Z(t)$ принимает вид

$$\mathscr{D}Z(t) = \sum_{i=1}^{p} S_i(t)\mathscr{P}_\ell Y'(t)\mathscr{P}_r R_i(t) = \sum_{j=1}^{\beta\gamma}\sum_{i=1}^{p} S_i(t)\mathscr{P}_\ell \Xi^{(j)}\mathscr{P}_r R_i(t) y_j'(t),$$

при этом

$$\mathscr{M}[\mathscr{D}Z(t)] = Q_1(t)y'(t), \quad Q_1(t) := \left[Q_1^{(i)}(t)\right]_{i=1}^{\beta\gamma} \in \mathbb{R}^{\alpha\delta\times\beta\gamma},$$

где

$$Q_1^{(j)}(t) = \mathscr{M}\left[\sum_{i=1}^{p} S_i(t)\mathscr{P}_\ell \Xi^{(j)}\mathscr{P}_r R_i(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \beta\gamma.$$

Аналогично

$$\mathscr{M}[\mathscr{A}Z(t)] = \Omega_1(t)y(t), \quad \Omega_1(t) := \left[\Omega_1^{(j)}(t)\right]_{i=1}^{\beta\gamma} \in \mathbb{R}^{\alpha\delta\times\beta\gamma},$$

где

$$\Omega_1^{(j)}(t) = \mathscr{M}\left[\sum_{i=1}^{q} \Phi_i(t)\mathscr{P}_\ell \Xi^{(j)}\mathscr{P}_r \Psi_i(t)\right], \quad j = 1, 2, \ldots, \beta\gamma.$$

Таким образом, задача о построении решений обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения (1) приведена к задаче о нахождении решений традиционного дифференциально-алгебраического уравнения [4–7]

$$Q_1(t)y'(t) = \Omega_1(t)y(t) + \mathscr{F}(t), \quad \mathscr{F}(t) := \mathscr{M}[F(t)]. \tag{11}$$

При условии [10]

$$P_{Q_1^*(t)}\Omega_1(t) = 0, \quad P_{Q_1^*(t)}\mathscr{F}(t) = 0 \tag{12}$$

в случае

$$Q_1^+(t)\Omega_1(t), Q_1^+(t)\mathscr{F}(t) \in C[a;b] \tag{13}$$

система (11) по меньшей мере одним способом разрешима относительно производной

$$\frac{dy}{dt} = Q_1^+(t)\Omega_1(t)y + Q_1^+(t)\mathscr{F}(t).$$

Условие (12) представляет собой, вообще говоря, нелинейное уравнение относительно постоянных матриц $\mathscr{P}_\ell$, $\mathscr{P}_r$, определяющих матрицы $Q_1(t) = Q_1(\mathscr{P}_\ell, \mathscr{P}_r, t)$ и $\Omega_1(t) = \Omega_1(\mathscr{P}_\ell, \mathscr{P}_r, t)$. Предположим, что система уравнений (12) имеет действительные решения $\mathscr{P}_\ell \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta}$, $\mathscr{P}_r \in \mathbb{R}^{\gamma\times\gamma}$, для которых выполнено условие (13). Обозначим через $\mathfrak{X}(t)$ нормальную фундаментальную матрицу [8]

$$\frac{d\mathfrak{X}(t)}{dt} = Q_1^+(t)\Omega_1(t)\mathfrak{X}(t), \quad Q_1^+(t)\Omega_1(t) \in \mathbb{R}^{\beta\gamma\times\beta\gamma}, \quad \mathfrak{X}(a) = I_{\beta\gamma},$$

полученной традиционной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При условии (13) система (11) имеет решение вида

$$y(t,c) = \mathfrak{X}(t)c + K[Q_1^+(s)\mathscr{F}(s)](t),$$

которое определяет решение обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения (1)

$$Z(t,c) = \mathfrak{W}(t,c) + \mathscr{K}[F(s)](t), \quad \mathfrak{W}(t,c) := \mathscr{P}_\ell \mathscr{M}^{-1}[\mathfrak{X}(t)c]\mathscr{P}_r, \quad c \in \mathbb{R}^{\beta\gamma},$$

где

$$\mathscr{K}[F(s)](t) := \mathscr{P}_\ell \mathscr{M}^{-1}\{K[Q^+(s)\mathscr{F}(s)](t)\}\mathscr{P}_r \tag{14}$$

— обобщенный оператор Грина матричной задачи Коши с $Z(a) = 0$ для дифференциально-алгебраической системы (1). Подставляя решение обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения (1) в краевое условие (2), приходим к задаче о нахождении решений

$$c = \sum_{j=1}^{\beta\gamma} \Theta^{(j)}\xi_j \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}, \quad \xi_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ldots, \beta\gamma,$$

матричного уравнения типа Сильвестра [12]

$$\mathscr{L}\mathfrak{W}(\cdot, c) + \mathscr{L}\mathscr{K}[F(s)](\cdot) = \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\mu\times\nu}. \tag{15}$$

В критическом случае ($P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$) при условии (12) и

$$P_{\mathfrak{Q}_d^*}\mathscr{M}\{\mathfrak{A} - \mathscr{L}\mathscr{K}[F(s)](\cdot)\} = 0 \tag{16}$$

решение матричного уравнения (15) определяет вектор [12, 13]

$$c = \mathfrak{Q}^+\mathscr{M}\{\mathfrak{A} - \mathscr{L}\mathscr{K}[F(s)](\cdot)\} + P_{\mathfrak{Q}_r}c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Здесь $P_{\mathfrak{Q}^*}$ — $(\mu\nu \times \mu\nu)$-матрица-ортопроектор, $P_{\mathfrak{Q}^*} : \mathbb{R}^{\mu\nu} \to N(\mathfrak{Q}^*)$, где

$$\mathfrak{Q} := [\mathfrak{Q}_i]_{i=1}^{\beta\gamma} \in \mathbb{R}^{\mu\nu\times\beta\gamma}, \quad \mathfrak{Q}_i := \mathscr{M}\{\mathscr{L}\mathscr{P}_\ell\mathscr{M}^{-1}[\mathfrak{X}(\cdot)\Theta^{(i)}]\mathscr{P}_r\}, \quad i = 1, 2, \ldots, \beta\gamma;$$

матрица $P_{\mathfrak{Q}_r}$ составлена из r линейно независимых столбцов $(\beta\gamma \times \beta\gamma)$-матрицы-ортопроектора $P_{\mathfrak{Q}} : \mathbb{R}^{\beta\gamma} \to N(\mathfrak{Q})$. Матрица $P_{\mathfrak{Q}_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк матрицы-ортопроектора $P_{\mathfrak{Q}^*}$, кроме того, $\mathfrak{X}_r(t) := \mathfrak{X}(t)P_{\mathfrak{Q}_r}$. Таким образом, в критическом случае при условии (12) и (16) по меньшей мере одно решение обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения (1), удовлетворяющее краевому условию (2)

$$Z(t,c_r) = \mathfrak{W}(t,c_r) + \mathfrak{G}[F(s);\mathfrak{A}](t), \quad \mathfrak{W}(t,c_r) := \mathscr{P}_\ell\mathscr{M}^{-1}[\mathfrak{X}_r(t)c_r]\mathscr{P}_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r, \tag{17}$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$\mathfrak{G}[F(s);\mathfrak{A}](t) = \mathscr{P}_\ell\mathscr{M}^{-1}\{\mathfrak{X}(t)\mathscr{Q}^+\mathscr{M}\{\mathfrak{A} - \mathscr{L}\mathscr{K}[F(s)](\cdot)\}\}\mathscr{P}_r + \mathscr{K}[F(s)](t) \tag{18}$$

матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (1), (2). Таким образом, доказано следующее достаточное условие разрешимости матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (1), (2).

Теорема 2. *В критическом случае* ($P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$) *при условии* (16), *а также* $P_{Q^*(t)}\Omega(t) \neq 0$ *либо* $P_{Q^*(t)}\mathscr{F}(t) \neq 0$ *для любых действительных решений* $\mathscr{P}_\ell \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta}$, $\mathscr{P}_r \in \mathbb{R}^{\gamma\times\gamma}$ *уравнения* (12), *для которых выполнено условие* (13), *по меньшей мере одно решение* (17) *обобщенного матричного дифференциально-алгебраического уравнения* (1), *удовлетворяющее краевому условию* (2), *определяет обобщенный оператор Грина* (18) *матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи* (1), (2).

Существенное отличие дифференциально-алгебраической системы (1) при условии (16), а также $P_{Q^*(t)}\Omega(t) \neq 0$ либо $P_{Q^*(t)}\mathscr{F}(t) \neq 0$ от более простого случая $P_{Q^*(t)}\Omega(t) = 0$, $P_{Q^*(t)}\mathscr{F}(t) = 0$ демонстрирует следующее утверждение.

Следствие. *В критическом случае* ($P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$) *при условии* (16), *а также* $P_{Q^*(t)}\Omega(t) \neq 0$ *либо* $P_{Q^*(t)}\mathscr{F}(t) \neq 0$ *для действительных решений* $\mathscr{P}_\ell$, $\mathscr{P}_r$ *уравнения* (12), *для которых выполнено условие* (13), *по меньшей мере одно решение* (17) *задачи Коши с* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для дифференциально-алгебраической системы* (1) *определяет обобщенный оператор Грина* (18) *задачи Коши с* $Z(a) = \mathfrak{A}$ *для дифференциально-алгебраической системы* (1).

Пример 2. Требованиям теоремы 2 удовлетворяет задача о построении 2π-периодических решений матричной дифференциально-алгебраической системы

$$\mathscr{D}Z(t) = \mathscr{A}Z(t) + F(t), \tag{19}$$

где

$$S_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} 0 & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_1 := \Psi_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $P_{Q^*(t)}\Omega(t) \neq 0$, условие (4) не выполнено, при этом система (19) может иметь решения вида

$$Z(t) = \mathscr{P}_\ell Y(t) \mathscr{P}_r, \quad \mathscr{P}_\ell \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \mathscr{P}_r \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

где $\mathscr{P}_\ell, \mathscr{P}_r$ — неизвестные постоянные матрицы. Система уравнений (12) имеет действительное решение

$$\mathscr{P}_\ell := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{P}_r := I_2,$$

для которого выполнено условие (13). Произведение $Q_1^+(t)\Omega_1(t)$ определяет матрицу

$$\mathfrak{X}(t) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ t(t+4) & 0 & 0 & 4t & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

и общее решение

$$\mathfrak{W}(t,c) = \begin{pmatrix} c_1 & c_4 + \frac{c_1}{2}t \\ c_2 & c_5 + \frac{t}{8}(4c_4 + c_1(t+4)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

задачи Коши с $Z(a)=\mathfrak{A}$ для однородной части дифференциально-алгебраической системы (19). Традиционный оператор Грина задачи Коши $K[f(s)](t)$ определяет обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (19)

$$\mathscr{K}[F(s)](t) := \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4\sin^2\frac{t}{2} \\ 0 & t+\sin t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $P_{\mathfrak{Q}^*}\neq 0$, в задаче о построении 2π-периодических решений матричной дифференциально-алгебраической системы (19) имеет место критический случай, здесь

$$\mathfrak{Q}=-\frac{\pi}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4+2\pi & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathfrak{Q}^*}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение

$$\mathfrak{W}(t,c_r)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & c_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

однородной части 2π-периодической матричной задачи для дифференциально-алгебраической системы (19) определяют матрицы

$$P_{\mathfrak{Q}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathfrak{Q}_r}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку условие (16) выполнено, семейство решений 2π-периодической матричной задачи для дифференциально-алгебраической системы (19)

$$Z(t,c_r)=\mathfrak{W}(t,c_r)+\mathfrak{G}[F(s);\mathfrak{A}](t)$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$\mathfrak{G}[F(s);\mathfrak{A}](t)=\mathscr{K}[F(s)](t)-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найденные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нётеровой матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи (1), (2) обобщают традиционные результаты для нётеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных, а также дифференциально-алгебраических уравнений [8–10, 14]. Предложенная формула частного решения уравнения типа Сильвестра (6) может быть использована при исследовании задач с краевыми условиями типа «interface conditions» для дифференциально-алгебраических систем [15], в теории устойчивости движения [16], а также при решении дифференциальных уравнений Риккати [3] и матричного уравнения Сильвестра [12]. С другой стороны, найденные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина краевой задачи (1), (2) обобщают условия разрешимости и конструкцию обобщенного оператора Грина линейной нётеровой матричной краевой задачи [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
2. *Деревенский В. П.* Матричные уравнения Бернулли // Изв. вузов. Математика. 2008. № 2. С. 14–23.
3. *Бойчук А. А., Кривошея С. А.* Периодическая задача для матричного уравнения Риккати в критическом случае // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 4. С. 439–445.
4. *Campbell S. L.* Singular systems of differential equations. San Francisco; London; Melbourne: Pitman Adv. Publ. Program, 1980.
5. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996.
6. *Бояринцев Ю. Е., Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. Новосибирск: Наука, 1998.
7. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Наука, 2003.
8. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Utrecht; Boston: VSP, 2004.
9. *Бойчук А. А., Шегда Л. М* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. 2007. Т. 10, № 3. С. 303–312.
10. *Чуйко С. М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем // Комп. исслед. и моделирование. 2013. Т. 5, № 5. С. 769–783.
11. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
12. *Чуйко С. М.* О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестн. Одес. нац. ун-та. Сер. Математика и механика. 2014. Т. 19, № 1. С. 49–57.
13. *Чуйко С. М.* О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестн. Харьков. нац. ун-та им. В. Н. Каразина. Сер. Математика, прикладная математика и механика. 2014. № 1120. С. 85–94.
14. *Бойчук А. А., Покутный А. А., Чистяков В. Ф.* О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 6. С. 958–969.
15. *Чуйко С. М.* Краевые задачи типа interface conditions для дифференциально-алгебраических систем // Комп. исслед. и моделирование. 2014. Т. 6, № 4. С. 465–477.
16. *Коробов В. И., Бебия М. О.* Стабилизация одного класса нелинейных систем, неуправляемых по первому приближению // Докл. НАН Украины. 2014. № 2. С. 20–25.
17. *Чуйко С. М.* Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динамические системы. 2014. Т. 4, № 1–2. С. 101–107.

Статья поступила 20 ноября 2014 г.

Чуйко Сергей Михайлович
Донбасский гос. педагогический университет,
ул. Генерала Батюка, 19,
Слявянск 84116 Донецкой обл., Украина
chujko-slav@inbox.ru