Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 512.54

ОБОБЩЕННЫЕ FC–ГРУППЫ С УСЛОВИЯМИ ОБРЫВА ЦЕПЕЙ

Чж. Чжан, Ш. Чень

Аннотация. Пусть c — положительное число. Группа G называется *FC_c-группой*, если каждый элемент в G имеет лишь конечное число сопряженных с помощью $\gamma_c G$ и $\gamma_c G$ содержится в FC-центре группы G. Исследованы FC_c-группы с условием минимальности или максимальности для абелевых подгрупп и получены их характеризации. Группа называется *FC_c-разрешимой*, если она имеет FC_c-ряд конечной длины. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы FC_c-разрешимая группа удовлетворяла условию минимальности или условию максимальности для абелевых подгрупп.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.416

Ключевые слова: FC-группа, FC_c-группа, BFC_c-группа (FN_c-группа), CF_c-группа, FC_c-разрешимая группа, условие максимальности, условие минимальности.

§ 1. Введение

Расширения конечных групп нильпотентными изучались Холлом в [1]. Были и другие попытки описать этот класс групп. Напомним, что группы с конечными классами сопряженности элементов называются *FC-группами.* Теория FC-групп получила мощное развитие во второй половине прошлого века (см. [2–4]). Вместе с тем многие авторы изучали многообразие обобщенных FC-групп (см. [5–11]). Пусть c — целое положительное число. Группа G называется *FN_c-группой*, если $(c+1)$-й член $\gamma_{c+1}G$ в нижнем центральном ряду G конечен. Для характеризации FN_c-групп иным образом первый автор ввел следующие виды обобщенных FC-групп в [11]. Предположим, что каждый элемент группы G имеет лишь конечное число элементов, сопряженных посредством $\gamma_c G$. Если $\gamma_c G$ содержится в FC-центре G, то G называется *FC_c-группой*; если существует положительное целое число d такое, что никакой элемент в $\gamma_c G$ не имеет более, чем d сопряженных в G, то G называется *BFC_c-группой*; если индекс $|G : C|$ подгруппы C в G конечен и $C = C_G(\gamma_c G)$, то G называется *CF_c-группой.*

Легко видеть, что если $c = 1$, то можно получить FC-, BFC- и CF-группы. В [11] несколько элементарных результатов об FC-группах были распространены на FC_c-группы при $c \geq 2$. Например, если G — CF_c-группа, то G — FN_c-группа (см. [11, теорема 2.2]); G является FN_c-группой тогда и только тогда, когда G — BFC_c-группа (см. [11, теорема 3.3]). В данной работе проведено дальнейшее исследование FC_c-групп при $c \geq 2$.

Работа поддержана Национальным научным фондом КНР (код проекта 11471055).

Теория групп с условием максимальности на абелевы подгруппы (max-ab) или условием минимальности на абелевы подгруппы (min-ab) весьма интересна и сопряжена со значительными трудностями, как показано в [12, § 3.3]. В контексте подходящей формы разрешимости в случае, когда абелевы подгруппы более многочисленны, следует ожидать, что условия min-ab и max-ab сыграют более существенную роль. Многие исследователи внесли вклад в эту теорию. Получены, в частности, следующие результаты. Теорема Мальцева [13, теорема 8] утверждает, что разрешимая группа с условием max-ab полициклична, а теорема Шмидта [14, теорема 9] показывает, что разрешимая четная гиперабелева группа с условием min-ab черниковская. Более общо, имеется результат Черникова о том, что локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию min-ab, черниковская (см. [15, 16] или [12, теорема 3.45]), который, в свою очередь, является приложением известной теоремы Холла — Кулатилаки — Каргаполова (см. [17, 18] или [12, теорема 3.43]). Характеризации FC-групп с условиями min-ab или max-ab были даны Бэром (см. [19; 12, теорема 4.39]). В работе В. П. Шункова [20] показано, что локально конечная группа удовлетворяет условию min-ab, если и только если она черниковская (см. также теорему 5.8 в [21]).

В § 2 изучаются FC_c-группы с условием min-ab или max-ab и даются их характеризации. Оказывается, что FC_c-группа удовлетворяет min-ab, если и только если она является черниковской CF_c-группой (см. теорему 2.3 в § 2), и что FC_c-группа удовлетворяет max-ab тогда и только тогда, когда она является конечно порожденной CF_c-группой (см. теорему 2.5 в § 2). Кроме того, рассматриваются FC_c-группы с условием максимальности для нормальных подгрупп (max-n) или условием минимальности для нормальных подгрупп (min-n)и выводятся аналогичные структурные описания с помощью применения двух результатов Уилсона (см. [22] или [23, 3.1.8]).

В [6] изучены так называемые FC-разрешимые группы и даны описания FC-разрешимых групп с условием max-ab или min-ab (см. также [12, теорема 4.39.1]). В § 3 рассмотрены FC_c-разрешимые группы (поли-FC_c-группы) с условиями обрыва цепей и показано, что FC_c-разрешимая группа удовлетворяет min-ab (или max-ab) тогда и только тогда, когда она является черниковской (или расширением полициклической группы с помощью конечной группы) (см. теоремы 3.1 и 3.2 в § 3).

В § 4 изучаются FC_c-группы с условием минимальности или максимальности для субнормальных абелевых подгрупп (min-snab и max-snab) и представлены их характеризации (см. теорему 4.2 в § 4).

Мы используем обозначения из [11, 12, 23].

§ 2. FC_c-группы с условиями обрыва цепей для абелевых или нормальных подгрупп

В этом параграфе обсудим дальнейшие свойства FC_c-групп, в особенности свойства FC_c-групп, удовлетворяющих min-ab или max-ab, на основе замечательных результатов об FC-группах со свойством min-ab или max-ab (см. [12, теорема 4.39]) и свойства локально разрешимых групп, удовлетворяющих min-ab (см. [12, теорема 3.45]). Также рассматриваем FC_c-группы со свойством min-n или max-n. Приведем сначала без доказательства два самых элементарных свойства FC_c-групп.

Лемма 2.1. *Класс FC_c-групп замкнут относительно формации подгрупп,* *образов и прямых произведений конечного числа групп этого класса.*

Лемма 2.2. *Пусть G — группа и N — конечная нормальная подгруппа в G. Если G/N — FC_c-группа, то G тоже FC_c-группа.*

Конечным остатком группы G называется пересечение всех подгрупп конечного индекса в G. Группа, являющаяся расширением конечного прямого произведения квазициклических групп с помощью конечной группы, называется *черниковской*. Обозначим условие максимальности и условие минимальности для подгрупп символами max и min соответственно. Охарактеризуем FC_c-группы с условием min-ab.

Теорема 2.3. *Пусть G — группа и F — конечный остаток группы G. Следующие условия эквивалентны:*
(i) *G — FC_c-группа с условием* min-ab,
(ii) *G — FC_c-группа с условием* min,
(iii) *G — FC_c- группа с условием* min-n,
(iv) *G — черниковская CF_c-группа.*
При выполнении любого из этих условий $|G : F| < \infty$, $F \leq C_G(\gamma_c G) = C$, F — прямое произведение конечного числа квазициклических групп.

Доказательство. (i)⇒(ii) Пусть G — FC_c-группа, и предположим, что G удовлетворяет условию min-ab. По определению FC_c-группы $\gamma_c G$ сама является FC-группой, удовлетворяющей min-ab, а значит, $\gamma_c G$ — черниковская группа в силу п. (i) теоремы 4.39 в [12]. Таким образом, $G/\gamma_c G$ удовлетворяет условию min-ab в силу п. (i) доказательства теоремы 3.32 в [12], где утверждается, что если группа H удовлетворяет условию min-ab и N — нормальная черниковская подгруппа H, то группа H/N удовлетворяет условию min-ab. С другой стороны, $G/\gamma_c G$, будучи нильпотентной группой с условием min-ab, черниковская, поскольку локально разрешимая группа, удовлетворяющая min-ab, есть черниковская группа (см. [12, теорема 3.45]). Тогда как $\gamma_c G$, так и $G/\gamma_c G$ удовлетворяют условию min, также и G удовлетворяет этому условию в силу [23, 3.1.7].

(ii)⇒(iii) Получается непосредственно.

(iii)⇒(iv) Пусть G — FC_c-группа с условием min-n. Согласно [23, 5.4.22] $|G : F| < \infty$ и F не имеет собственных подгрупп конечного индекса, так как G удовлетворяет условию min-n.

Для каждого $g \in \gamma_c G$ имеем $|G : C_G(g)| < \infty$ по определению FC_c-группы. Значит, $|F : C_F(g)| = |F : C_G(g) \cap F| = |FC_G(g) : C_G(g)| \leq |G : C_G(g)| < \infty$. Но у F нет собственных подгрупп конечного индекса. Следовательно, $F = C_F(g)$, и тогда $F \leq C_G(\gamma_c G) = C$.

Имеем $\gamma_{c+1} C = [\gamma_c C, C] \leq [\gamma_c G, C] = 1$, и потому C нильпотентна ступени $\leq c$. Кроме того, F удовлетворяет условию min-n в силу результата Уилсона (см. [22] или [23, 3.1.8]). Будучи нильпотентной группой с условием min-n, в силу результата Маклейна (см. [23, 12.1.8]) F есть расширение прямого произведения конечного числа квазициклических групп. Учитывая, что F не содержит собственных подгрупп конечного индекса, он имеет описанную структуру.

Поэтому G — черниковская CF_c-группа.

(iv)⇒(i) Пусть G — черниковская CF_c-группа. Тогда она является FC_c-группой с условием min и потому FC_c-группой с условием min-ab. □

Так как CF_c-группы являются BFC_c-группами, следующее утверждение вытекает непосредственно из теоремы 2.3.

Следствие 2.4. *Пусть G — группа. Следующие утверждения о G эквивалентны:*

(i) *G — FC_c-группа с условием* min,
(ii) *G — BFC_c-группа с условием* min,
(iii) *G — CF_c-группа с условием* min,
(iv) *G — черниковская CF_c-группа.*

Охарактеризуем FC_c-группы с условием max-ab.

Теорема 2.5. *Пусть G — группа. Следующие утверждения о G эквивалентны:*

(i) *G — FC_c-группа с условием* max-ab,
(ii) *G — конечно порожденная CF_c-группа,*
(iii) *G — FC_c-группа с условием* max,
(iv) *G — FC_c-группа с условием* max-n.

Доказательство. (i)⇒(ii) Пусть G — FC_c-группа с условием max-ab. Тогда группа $C = C_G(\gamma_c G)$ нильпотентна в силу доказательства теоремы 2.3 и C полициклическая ввиду теоремы 3.31 из [12]; кроме того, группа G/C удовлетворяет условию max-ab с учетом п. (i) доказательства теоремы 3.31 в [12], в котором утверждается, что если группа H удовлетворяет условию max-ab и N — нормальная подгруппа в H, являющаяся расширением полициклической группы с помощью конечной группы, то H/N удовлетворяет условию max-ab. Тем самым всякая абелева подгруппа в группе G/C конечно порождена и является прямым произведением конечного числа циклических подгрупп ввиду [23, 4.2.10]. Но группа G/C периодическая в силу теоремы 2.1 из [11], поэтому всякая абелева подгруппа в этой группе конечна и G/C удовлетворяет условию min-ab. Следовательно, G/C — черниковская группа и потому является конечной в силу свойства max-ab.

(ii)⇒(iii) Пусть G — конечно порожденная CF_c-группа. Ввиду следствия 2.5 она является FC_c-группой с условием max.

(iii)⇒(i) Очевидно.

(iv)⇒(ii) Пусть G — FC_c-группа с условием max-n. Тогда группа $G/(\gamma_c G)C$ удовлетворяют условию max-n и потому она конечно порождена в силу другого результата Маклейна (см. [23, 12.1.7]).

Кроме того, $G/(\gamma_c G)C$ — периодическая группа и потому конечна согласно [23, 5.4.11], а значит, $(\gamma_c G)C$ конечно порождена согласно [23, 1.6.11]. Теперь, $(\gamma_c G)C/C$, будучи конечно порожденной периодической FC-группой, конечна и потому конечна группа G/C. Следовательно, C удовлетворяет max-n в силу другого результата Уилсона (см. [22] или [23, упражнение 3.1.11]). Таким образом, группа C, будучи нильпотентной группой с условием max-n, конечно порождена в силу [23, 12.1.7], а значит, G тоже конечно порождена.

(ii)⇒(iv) Получается непосредственно. □

Теоремы 2.3 и 2.5 показывают, что для FC_c-групп min, min-n и min-ab — это одно и то же свойство; то же можно сказать про свойства max, max-n и max-ab.

§ 3. FC_c-разрешимые группы с условиями обрыва цепей

Группа называется FC_c-*разрешимой*, если у нее имеется FC_c-ряд конечной длины. В качестве приложения результатов § 2 опишем строение FC_c-групп с некоторыми условиями обрыва цепей.

Теорема 3.1. *FC_c-разрешимая группа удовлетворяет условию* min-ab *тогда и только тогда, когда она черниковская.*

Доказательство. Пусть G — FC_c-разрешимая группа, удовлетворяющая условию min-ab, и пусть $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \dots \lhd G_n = G$ — FC_c-ряд конечной длины группы G. Тогда существует единственная максимальная нормальная радикальная подгруппа R такая, что G/R не содержит ни одной нетривиальной субнормальной разрешимой подгруппы (группа называется *радикальной*, если она обладает локально нильпотентным возрастающим рядом). В силу теоремы 3.32 из [12] R является черниковской подгруппой, и потому G/R удовлетворяет min-ab. Поэтому можно предполагать, что $R = 1$. Из теоремы 2.3 следует, что G_1 — CF_c-группа и, следовательно, является конечной группой, поскольку группа $C_{G_1}(\gamma_c G_1)$ нильпотентна ступени $\leq c$. Значит, G_2/G_1 — FC_c-группа, удовлетворяющая условию min-ab. Стало быть, по той же причине она является расширением нильпотентной группы ступени $\leq c$ с помощью конечной группы. Таким образом, найдется субнормальная подгруппа H в G такая, что $G_1 \leq H \lhd G_2$ и обе группы $\gamma_{c+1}H$ и G_2/H конечны. Известный результат Холла (см. [1] или теорему 4.25 в [12]) показывает, что группа $H/\zeta_{2c}H$ конечна, и тогда H конечна, так как $\zeta_{2c}H$ — субнормальная нильпотентная подгруппа в G. Отсюда следует, что группа G_2 конечна; используя индукцию по n, получаем, что группа G конечна. Достаточность очевидна. $\square$

Для случая условия max-ab имеем следующую ниже теорему, процесс доказательства которой в точности аналогичен доказательству теоремы 3.31 в [12]. Единственное, о чем следует упомянуть, — это то, что в данном случае единственная максимальная нормальная радикальная подгруппа R в G полициклическая в силу теоремы 3.31 из [12].

Теорема 3.2. *FC_c-разрешимая группа удовлетворяет условию* max-ab *тогда и только тогда, когда она является расширением полициклической группы с помощью конечной группы.*

Изучим FC_c-разрешимые группы с условием минимальности на субнормальные подгруппы (min-sn) или условием максимальности на субнормальные подгруппы (max-sn). Поскольку для FC_c-групп свойства min и min-n эквивалентны, свойства min, min-sn и min-n также равносильны. Из теоремы 2.3 вытекает следующий результат.

Теорема 3.3. *FC_c-группа удовлетворяет условию* min-sn *тогда и только тогда, когда она является черниковской CF_c-группой.*

Аналогично из теоремы 2.5 получаем следующее утверждение.

Теорема 3.4. *FC_c-группа удовлетворяет условию* max-sn *тогда и только тогда, когда она является конечно порожденной CF_c-группой.*

Разд. 5.4 в [12] содержит два известных результата, гласящие, что радикальная группа удовлетворяет условию min-sn тогда и только тогда, когда она является разрешимой черниковской группой, и что радикальная группа удовлетворяет условию max-sn тогда и только тогда, когда она полициклическая. Поэтому методом, аналогичным теоремам 3.1 и 3.2, можно доказать следующие теоремы для условий обрыва цепей на субнормальные подгруппы с использованием теорем 3.2 и 3.3 и того факта, что класс групп с условием min-sn или max-sn замкнут относительно образования субнормальных подгрупп.

Теорема 3.5. *FC_c-разрешимая группа удовлетворяет условию* min-sn *тогда и только тогда, когда она является черниковской группой.*

Теорема 3.6. *FC_c-разрешимая группа удовлетворяет условию* max-sn *тогда и только тогда, когда она является расширением полициклической группы с помощью конечной.*

Ввиду теорем 3.1 и 3.5 для FC_c-разрешимых групп условия min, min-sn и min-ab эквивалентны, а условия max, max-sn и max-ab равносильны в силу теорем 3.2 и 3.6.

§ 4. FC_c-группы с условиями обрыва цепей на субнормальные абелевы подгруппы

Следуя разд. 5.4 в [12], обозначим условия максимальности и минимальности на субнормальные абелевы подгруппы символами max-snab и min-snab соответственно. Ясно, что условие max-snab (или min-snab) эквивалентно свойству, что каждая субнормальная абелева подгруппа удовлетворяет условию max (или min). Известно, что субразрешимая группа, удовлетворяющая условию max-snab, полициклическая и что периодическая субразрешимая группа, удовлетворяющая min-snab, является разрешимой черниковской группой (см., например, [24, теорема E]), где группы, обладающие возрастающим субнормальным рядом с абелевыми факторами, называются *субразрешимыми.*

Здесь рассмотрим FC_c-группу, удовлетворяющую условиям max-snab и min-snab. Сначала сформулируем лемму, утверждения которой, в свою очередь, являются аналогами утверждений (i) из доказательств теорем 3.31 и 3.32 в [12]. Доказательство опускаем, поскольку оно полностью аналогично.

Лемма 4.1. (i) *Если G — группа. удовлетворяющая условию* max-snab *и N — нормальная подгруппа группы G, являющаяся расширением полициклической группы с помощью конечной, то группа G/N удовлетворяет условию* max-snab.

(ii) *Если G — группа, удовлетворяющая условию* min-snab, *и N — нормальная черниковская подгруппа в G, то G/N удовлетворяет условию* min-snab.

Теорема 4.2. *Пусть G — FC_c-группа и $\gamma_c G$ — бэровская группа* (*группа, в которой каждая циклическая подгруппа субнормальна*).

(i) *G удовлетворяет условию* min-snab *тогда и только тогда, когда она является черниковской CF_c-группой.*

(ii) *G удовлетворяет условию* max-snab *тогда и только тогда, когда она является конечно порожденной CF_c-группой.*

Доказательство. Пусть F — конечный остаток FC_c-группы G и $C = C_G(\gamma_c G)$. В силу теоремы 2.1 из [11] группа G/C финитно аппроксимируема и, стало быть, F содержится в C. Тогда группа C нильпотентна ступени $\leq c$, так что каждая подгруппа группы F субнормальна (см. [23, доказательство 5.2.4]). Следовательно, F удовлетворяет условию min-ab и является черниковской группой согласно теореме 3.45 из [12] и потому представляет собой прямое произведение конечного числа квазициклических подгрупп, поскольку в F нет собственных подгрупп конечного индекса. Значит, G/F удовлетворяет условию min-snab в силу утверждения (ii) леммы 4.1. Тем самым можно считать, что группа G финитно аппроксимируема; покажем, что тогда G удовлетворяет условию min. Конечно, сама группа $\gamma_c G$ является FC-группой и финитно аппроксимируема. Кроме того, она периодическая, потому что всякая циклическая подгруппа в ней субнормальна, и удовлетворяет условию min-snab. Если $\gamma_c G$ конечна, то $G/\gamma_c G$ есть нильпотентная группа, удовлетворяющая условию min-snab в силу п. (ii) леммы 4.1. Следовательно, эта группа удовлетворяет условию min-ab, так как всякая подгруппа нильпотентной группы субнормальна. Тем самым $G/\gamma_c G$ удовлетворяет условию min в силу теоремы 3.45 из [12] и G тоже удовлетворяет min. Поэтому можем предполагать, что группа $\gamma_c G$ бесконечна. Так как $\gamma_c G$ локально конечна, нормальна и финитно аппроксимируема, можно построить подгруппу в $\gamma_c G$, являющуюся прямым произведением бесконечного числа конечных нормальных подгрупп, n-порожденных нетривиальным элементом группы $\gamma_c G$ по индукции следующим образом. На первом шаге возьмем произвольный нетривиальный элемент a_1 из $\gamma_c G$; тогда $a_1^{\gamma_c G}$ — конечная нормальная подгруппа в $\gamma_c G$. Предположим, что уже есть конечная нормальная подгруппа $P = \mathrm{Dr}_{i=1}^{n} a_i^{\gamma_c G}$, где каждое a_i — нетривиальный элемент группы $\gamma_c G$. Замечая, что группа $\gamma_c G$ конечно аппроксимируема, заключаем, что существует нормальная подгруппа N конечного индекса в $\gamma_c G$ такая, что $P \cap N = 1$. Значит, $N \neq 1$, поскольку $\gamma_c G$ бесконечна. Выберем нетривиальный элемент a_{n+1} из N и заметим, что $P \cap a_{n+1}^{\gamma_c G} = 1$, ибо $a_{n+1}^{\gamma_c G} \leq N$. Таким образом, $\left[P, a_{n+1}^{\gamma_c G}\right] = 1$ и $\left\langle P, a_{n+1}^{\gamma_c G}\right\rangle = \mathrm{Dr}_{i=1}^{n+1} a_i^{\gamma_c G}$. По индукции $\gamma_c G$ содержит подгруппу $Dr_{i=1}^{\infty} a_i^{\gamma_c G}$, где каждое a_i — нетривиальный элемент группы $\gamma_c G$, что приводит к подгруппе $\mathrm{Dr}_{i=1}^{\infty}\langle a_i\rangle$ в $\gamma_c G$, являющейся прямым произведением бесконечного числа нетривиальных циклических подгрупп. Но $\gamma_c G$, будучи нильпотентной FC-группой, является гиперцентральной группой согласно результату Маклейна (см. [23, упражнения 14.5.6]) и потому субразрешимой группой. Следовательно, она удовлетворяет условию min согласно п. (ii) теоремы E из [24], что невозможно. Тем самым G удовлетворяет условию min. Стало быть, по теореме 2.3 она является черниковской CF_c-группой. Достаточность очевидна.

(ii) Пусть G — FC_c-группа, удовлетворяющая условию max-snab. Тогда $C = C_G(\gamma_c G)$, являясь нильпотентной группой с условием max-ab, полициклическая ввиду теоремы 3.31 из [12]. Поэтому в силу п. (i) леммы 4.1 группа G/C удовлетворяет условию max-snab. Но группа G/C периодическая и потому удовлетворяет min-snab. Следовательно, G/C — черниковская группа в силу п. (ii) теоремы E из [24] и является конечной группой в силу свойства max-snab. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall P.* Finite-by-nilpotent groups // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1956. V. 52. P. 611–616.
2. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate elements // Proc. London Math. Soc. 1951. V. 1, N 3. P. 178–187.
3. *Neumann B. H.* Groups with finite classes of conjugate subgroups // Math. Z. 1955. Bd 63. S. 76–96.
4. *Tomkinson M. J.* FC-groups. Boston: Pitman, 1984.
5. *Cutolo G., Simith H., Wielgold J.* Finiteness conditions on characteristic closures and cores of subgroups // J. Group Theory. 2009. V. 12. P. 591–610.
6. *Duguid A. M., McLain D. H.* FC-nilpotent and FC-soluble groups // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1956. V. 52. P. 391–398.
7. *Giovanni F. de, Russo A., Vincenzi G.* Groups with restricted conjugate classes // Serdica Math. J. 2002. V. 28. P. 241–254.
8. *Imperatore D., Russo A., Vincenzi G.* Groups whose proper subgroups are generalized FC-groups // J. Algebra Appl. 2011. V. 10, N 6. P. 1301–1308.
9. *Robinson D. J. S., Russo A., Vincenzi G.* On the theory of generalized FC-groups // J. Algebra. 2011. V. 326. P. 218–226.

10. *Romano E., Vincenzi G.* Pronormality in generalized FC-groups // Bull. Aust. Math. Soc. 2011. V. 83. P. 220–230.
11. *Zhang Z. R.* Finite-by-nilpotent groups and generalized FC-groups // Algebra Colloq. 1994. V. 1, N 4. P. 369–374.
12. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. I. Berlin: Springer-Verl., 1972.
13. *Мальцев А. И.* О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Мат. сб. 1951. Т. 28, № 3. С. 567–588.
14. *Шмидт О. Ю.* Бесконечные разрешимые группы // Мат. сб. 1945. Т. 17, № 2. С. 145–160.
15. *Черников С. Н.* К теории локально разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп // Докл. АН СССР. 1949. Т. 65, № 1. С. 21–24.
16. *Черников С. Н.* О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп // Мат. сб. 1951. Т. 28, № 1. С. 119–129.
17. *Hall P., Kulatilake C. R.* A property of locally finite groups // J. London Math. Soc. 1964. V. 39. P. 235–239.
18. *Каргаполов М. И.* О проблеме О. Ю. Шмидта // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 1. С. 232–235.
19. *Baer R.* Finite extensions of abelian groups with minimum condition // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. V. 79. P. 521–540.
20. *Шунков В. П.* О проблеме минимальности для локально конечных групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 2. С. 220–248.
21. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. Amsterdam: North-Holland, 1973.
22. *Wilson J. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math. Z. 1978. Bd 114. S. 19–21.
23. *Robinson D. J. S.* A Course in the theory of groups. 2nd ed. New York: Springer-Verl., 1996.
24. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions for subnormal and ascendant abelian subgroups // J. Algebra. 1968. V. 10. P. 333–359.

Статья поступила 17 октября 2014 г.

Zhirang Zhang (Чжан Чжижан), Shengsheng Chen (Чень Шэншэн)
School of Applied Mathematics,
Chengdu University of Information Technology,
Chengdu, Sichuan 610225, P. R. China
`zrzhang46@126.com`, `changda06@163.com`