Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 517.98

ПОЛУГРУППЫ ГИПЕРФУНКЦИЙ

М. Костич, С. Пилипович, Д. Велинов

Аннотация. Изучаются полугруппы гиперфункций и полугруппы гиперфункций Фурье с неплотно определенными генераторами и их связь с локально конволюционными C-полугруппами. Структурные теоремы и спектральные характеризации дают необходимые и достаточные условия существования таких полугрупп, порожденных замкнутым не обязательно плотно определенным оператором A.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.409

Ключевые слова: полугруппа гиперфункций Фурье, полугруппа гиперфункций, структурные теоремы.

1. Введение и предварительные результаты

Работы [1, 2] об ультрараспределениях полугрупп расширяют классическую теорию полугрупп (см. [3–8]). Оучи [9] впервые представил класс полугрупп гиперфункций, более общий, чем распределения и ультрараспределения полугрупп, а в [10] он рассмотрел абстрактную задачу Коши в пространстве гиперфункций. Генераторы полугрупп гиперфункций в смысле [9] не обязательно плотно определены. Неплотно определенные генераторы A приводят к более широкому понятию, чем плотно определенные генераторы полугрупп. В действительности, интерес к так называемым интегрируемым и, более общо, конволюционным полугруппам возникает благодаря анализу задач Коши с неплотно заданными операторами. А. Н. Кочубей [11] рассмотрел гиперфункциональные решения абстрактных дифференциальных уравнений высокого порядка. Мы проанализируем полугруппы гиперфункций Фурье с неплотно определенными генераторами, продолжая исследования ультрараспределений полугрупп типа Румье и построенных в [1] примеров умеренных ультрараспределений полугрупп [1], а также полугруппы гиперфункций Фурье с неплотно определенными генераторами. Анализ из [12, теорема $2'$] дает пример плотно определенного оператора A в пространстве Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$, который порождает полугруппу гиперфункций из [9], но не является генератором ни ультрараспределений полугрупп, ни (локально) интегрируемых C-полугрупп, $C \in L(H^2(\mathbb{C}_+))$. Заметим, что C представляет непрерывную шкалу для понимания того, насколько абстрактная задача Коши далека от корректности, т. е. возможности для A порождать C_0-полугруппу.

Нас, в основном, интересует существование фундаментальных решений задачи Коши с начальными данными в виде гиперфункции.

В определении инфинитезимальных генераторов для распределений и ультрараспределений полугрупп в неквазианалитическом случае все авторы используют пробные функции с носителем в $[0, \infty)$. Такой подход не может быть применен в случае полугрупп гиперфункций Фурье, поскольку в квазианалитическом случае только нулевая функция обладает этим свойством. Поэтому определим такие полугруппы на пробных пространствах $\mathscr{P}_*$ и $\mathscr{P}_{*,a}$ $(a > 0)$, однако аксиомы для них и определение инфинитезимального генератора даны на подпространствах указанных пространств, состоящих из функций ϕ таких, что $\phi(0) = 0$ и $\phi'(0) = 0$. Заметим, что то же самое можно сделать для распределений и ультрараспределений полугрупп (оставим это для другой статьи).

Разд. 2 посвящен полугруппам гиперфункций Фурье. Как отмечалось ранее, определение таких полугрупп существенно отличается от определения ультрараспределений полугрупп, поскольку не могут быть использованы пробные функции с носителем, ограниченным слева. Полугруппы гиперфункций Фурье с плотно определенными инфинитезимальными генераторами введены в [13] в связи с соответствующей задачей Коши [5]. Проведем структурные и спектральные характеризации полугрупп Фурье и экспоненциально ограниченных полугрупп гиперфункций Фурье с неплотными инфинитезимальными генераторами и опишем их связь с конволюционными полугруппами и соответствующими задачами Коши. Спектральные свойства полугрупп гиперфункций позволяют по-новому взглянуть на результаты Оучи.

1.1. Пространства гиперфункций и гиперфункций типа Фурье. Основные факты о гиперфункциях и гиперфункциях Фурье, полученные Сато, могут быть найдены в [14] (см. также [15–18]). Пусть E — банахово пространство, Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, содержащее открытое множество $I \subset \mathbb{R}$ как замкнутое подмножество, и пусть $\mathscr{O}(\Omega)$ — пространство E-значных голоморфных функций на Ω с топологией равномерной сходимости на компактах из Ω. Определим пространство E-значных гиперфункций на I следующим образом: $\mathscr{B}(I,E) := \mathscr{O}(\Omega \setminus I, E)/\mathscr{O}(\Omega, E)$. Представитель $f = [f(z)] \in \mathscr{B}(I,E)$, $f \in \mathscr{O}(\Omega \setminus I, E)$, называется *определяющей функцией для* f. Пространство гиперфункций с носителем в компактном множестве $K \subset I$ со значениями в E обозначим через $\Gamma_K(I, \mathscr{B}(E)) = \mathscr{B}(K,E)$. Это пространство непрерывных линейных отображений из $\mathscr{A}(K)$ в E, где $\mathscr{A}(K)$ — индуктивное пространство предельного типа аналитических функций в окрестностях K, снабженное соответствующей топологией [19]. Обозначим через $\mathscr{A}(\mathbb{R})$ пространство вещественных аналитических функций на $\mathbb{R}$: $\mathscr{A}(\mathbb{R}) = \operatorname{proj} \lim_{K \Subset \mathbb{R}} \mathscr{A}(K)$. Пространство непрерывных линейных отображений из $\mathscr{A}(\mathbb{R})$ в E, обозначаемое через $\mathscr{B}_c(\mathbb{R},E)$, состоит из элементов $\mathscr{B}(K,E)$ с компактным носителем, где K пробегает семейство всех компактных множеств в $\mathbb{R}$. Обозначим через $\mathscr{B}_+(\mathbb{R},E)$ пространство E-значных гиперфункций с носителями в $[0,\infty)$. Как и в скалярном случае $(E = \mathbb{R})$, если $f \in \mathscr{B}_c(\mathbb{R},E)$ и $\operatorname{supp} f \subset \{a\}$, то $f = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}(\cdot - a)x_n$, $x_n \in E$, где $\lim_{n\to\infty}(n!\|x_n\|)^{1/n} = 0$. Пусть $\mathbb{D} = \{-\infty, +\infty\} \cup \mathbb{R}$ — радиальная компактификация пространства $\mathbb{R}$. Положим $I_\nu = (-1/\nu, 1/\nu)$, $\nu > 0$. При $\delta > 0$ пространство $\widetilde{\mathscr{O}}^{-\delta}(\mathbb{D}+iI_\nu)$ определяется как подпространство $\mathscr{O}(\mathbb{R}+iI_\nu)$ со следующим свойством: для любых $K \Subset I_\nu$ и $\varepsilon > 0$ существует $C > 0$ такое, что $|F(z)| \le Ce^{-(\delta-\varepsilon)|\operatorname{Re} z|}$, $z \in \mathbb{R}+iK$. Тогда $\mathscr{P}_*(\mathbb{D}) := \operatorname{ind} \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathscr{O}}^{-1/n}(\mathbb{D}+iI_n)$ — пространство всех *быстро убывающих вещественных аналитических функций* (сравни [14, определение 8.2.1]), а пространство гиперфункций Фурье $\mathscr{Q}(\mathbb{D},E)$ — пространство непрерывных линейных отображений из $\mathscr{P}_*(\mathbb{D})$ в E, снабженное сильной топологией. Заметим, что гиперфункции Фурье были впервые введены Сато в [20] и назывались *медлен-*

но растущими гиперфункциями. Отметим также, что индекс $*$ в $\mathscr{P}_*(\mathbb{D})$ имеет не тот же смысл, что в случае ультрараспределений. Это часто используемое в литературе обозначение (сравни [14]). Напомним, что сужение отображения $\mathscr{Q}(\mathbb{D}, E) \to \mathscr{B}(\mathbb{R}, E)$ сюръективно (см. [14, теорема 8.4.1]). Об отношениях между пространствами $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ и $\mathscr{Q}(\mathbb{D})$ можно узнать из [14, гл. 8].

Напомним [14], что оператор вида

$$P(d/dx) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (d/dx)^k$$

называется *локальным оператором*, если $\lim\limits_{k\to\infty} (|b_k|k!)^{1/k} = 0$. Композиция и сумма локальных операторов снова является локальным оператором.

Главное структурное свойство $\mathscr{Q}(\mathbb{D})$ означает, что любой элемент $f \in \mathscr{Q}(\mathbb{D})$ имеет вид $f = P(d/dx)F$, где P — локальный оператор, F — непрерывная медленно растущая функция, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что $|F(x)| \le C_\varepsilon e^{\varepsilon|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Переформулируем следующую глобальную структурную теорему (сравни [14, предложение 8.1.6, лемма 8.1.7, теорема 8.4.9]) с участием последовательности $(L_p)_p$.

Определим оператор

$$P_{L_p}(d/dx) = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 + \frac{L_p^2}{p^2}\frac{d^2}{dx^2}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \frac{d^p}{dx^p}, \tag{1.1}$$

где $(L_p)_p$ — сходящаяся к 0 последовательность. Этот оператор локален. Назовем его *оператором гиперфункции.* Верно следующее

Утверждение [14]. *Пусть $T \in \mathscr{Q}(\mathbb{D}, E)$. Существуют локальный оператор $P_{L_p}(-id/dx)$ (с соответствующей последовательностью $(L_p)_p$) и непрерывная медленно возрастающая функция $f : \mathbb{R} \to E$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C_\varepsilon > 0$ такое, что $\|f(x)\| \le C_\varepsilon e^{\varepsilon|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, и $T = P_{L_p}(-id/dx)f$.*

Если носитель гиперфункции компактен, $\operatorname{supp} f \subset K$, $f \in \mathscr{B}(K, E)$, то имеет место указанное представление с соответствующим локальным оператором $P_{L_p}(-id/dx)$ и непрерывной E-значной функцией в окрестности K.

Пространства гиперфункций Фурье исследованы также в [21, 22]. В соответствии с таким подходом $\mathscr{P}_*(\mathbb{D})$ (топологически) равно пространству C^∞-функций ϕ, определенных на $\mathbb{R}$ свойством $(\exists h > 0)$ $(\|\phi\|_h < \infty)$, где нормы $\|\cdot\|_h$, $h > 0$, заданы формулами

$$\|\phi\|_h := \sup\{\|\phi^{(n)}(x)\| e^{|x|/h}/(h^n n!) : n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}\},$$

снабженному соответствующей индуктивной предельной топологией при $h \to +\infty$. Следующая лемма может быть доказана стандартными рассуждениями с участием норм $\|\phi\|_h$.

Лемма 1.1. *Если $\phi,\ \psi \in \mathscr{P}_*(\mathbb{D})$, то*

$$\phi *_0 \psi = \int\limits_0^x \phi(t)\psi(x-t)\,dt, \quad x > 0,$$

принадлежит $\mathscr{P}_*(\mathbb{D})$ и отображение $*_0 : \mathscr{P}_*(\mathbb{D}) \times \mathscr{P}_*(\mathbb{D}) \to \mathscr{P}_*(\mathbb{D})$ непрерывно.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и для $h_1 > 0$ верно $\|\phi\|_{h_1} < \infty$. Пусть $\|\psi\|_{\frac{h}{2}} < \infty$ для $h > 2h_1$, и положим $h_2 = \frac{hh_1}{h-h_1}$. Воспользуемся следующим неравенством, верным для всех t:

$$\frac{|x|}{h} \leq \frac{|x-t|}{h} + \frac{|t|}{h} \leq \frac{|x-t|}{h} + \frac{|t|}{h_1} - \frac{|t|}{h_2}.$$

Имеем

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0,\, x\in\mathbb{R}} \frac{e^{|x|/h}\left|\left(\int\limits_0^x \phi(t)\psi(x-t)\,dt\right)^{(n)}\right|}{h^n n!}$$
$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0,\, x\in\mathbb{R}} \frac{e^{|x|/h}\int\limits_0^x |\phi(t)\psi^{(n)}(x-t)|\,dt}{h^n n!}$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \sup_{n\in\mathbb{N},\, x\in\mathbb{R}} \frac{e^{|x|/h}|\phi^{(j)}(x)||\psi^{(n-1-j)}(0)|}{h^n n!} = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Оценим отдельно I и II:

$$\mathrm{I} \leq \sup_{t\in\mathbb{R}}(|\phi(t)|e^{\frac{|t|}{h_1}}) \left(\int\limits_0^x e^{-\frac{|t|}{h_2}}\,dt\right) \sup_{n\in\mathbb{N}_0,\, x,t\in\mathbb{R}} \frac{|\psi^{(n)}(x-t)|e^{|x-t|/h}}{h^n n!},$$

$$\mathrm{II} \leq \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n-1} \sup_{j\in\mathbb{N}_0,\, x\in\mathbb{R}} \frac{e^{|x|/h}|\phi^{(j)}(x)|}{(h/2)^j j!} \sup_{n-j\in\mathbb{N}_0} \frac{|\psi^{(n-1-j)}(0)|}{(h/2)^{n-j}(n-j)!}.$$

Отсюда $\phi *_0 \psi \in \mathscr{P}_*(\mathbb{D})$. Непрерывность отображения $*_0 : \mathscr{P}_*(\mathbb{D}) \times \mathscr{P}_*(\mathbb{D}) \to \mathscr{P}_*(\mathbb{D})$ доказывается аналогично. Лемма доказана. $\square$

Перенесем определения и утверждения для умеренных ультрараспределений Румье на гиперфункции Фурье.

Определение 1.2. Пусть $a \geq 0$. Тогда

$$\mathscr{P}_{*,a}(\mathbb{D}) := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) : e^{a\cdot}\phi \in \mathscr{P}_*(\mathbb{D})\}.$$

Определим сходимость в этом пространстве:

$$\phi_n \to 0 \text{ в } \mathscr{P}_{*,a}(\mathbb{D}) \quad \text{тогда и только тогда, когда } e^{a\cdot}\phi_n \to 0 \text{ в } \mathscr{P}_*(\mathbb{D}).$$

Обозначим через $\mathscr{Q}_a(\mathbb{D}, E)$ пространство непрерывных линейных отображений из $\mathscr{P}_{*,a}(\mathbb{D})$ в E с сильной топологией.

Имеем

$$F \in \mathscr{Q}_a(\mathbb{D}, E) \text{ тогда и только тогда, когда } e^{-a\cdot}F \in \mathscr{Q}(\mathbb{D}, E). \tag{1.2}$$

Предложение 1.3. *Пусть $G \in \mathscr{Q}_a(\mathbb{D}, L(E))$. Тогда существуют локальный оператор P и функция $g \in C(\mathbb{R}, L(E))$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что*

$$e^{-ax}\|g(x)\| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|x|},\ x \in \mathbb{R}, \quad G = P(d/dx)g.$$

Доказательство. Поскольку $e^{-a\cdot}G \in \mathscr{Q}(\mathbb{D}, L(E))$, в силу структурной теоремы для пространства $\mathscr{Q}(\mathbb{D}, L(E))$ существуют локальный оператор P и функция g_1 такие, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $C_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\|g_1(x)\| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|x|},\ x \in \mathbb{R}, \quad G = e^{ax}P(d/dx)g_1.$$

Положим $g(x) = e^{ax}g_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$. По формуле Лейбница имеем

$$e^{ax}P(d/dx)g_1(x) = \sum_{t=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{t+k}{t}(-1)^k a^k b_{k+t}\right)(e^{ax}g_1(x))^{(t)}.$$

Утверждение будет доказано, если покажем, что $\lim\limits_{|t|\to\infty}(|c_t|t!)^{\frac{1}{t}} = 0$, где $c_t = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{k+t}{k}a^k b_{k+t}$. Используем неравенство

$$\binom{t+k}{k} \le (t+k)^k \le 2^k k^k + 2^k t^k \le 2^k(k^k + k^k e^t) = 2^k k^k(1+e^t),$$

где $t^k \le k^k e^t$, которое очевидно для $k \ge t$. При $k < t$ положим $k = \nu t$. Пусть сначала $\nu \ln \nu \in (-1, 0)$. Тогда $\nu t \ln t \le \nu t \ln t + \nu t \ln \nu + t$. Тем самым $t^k \le k^k e^t$. Далее,

$$c_t = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k k^k (1+e^t)a^k b_{k+t} = \sum_{k=0}^{\infty}(2a)^k k^k(1+e^t)b_{k+t}.$$

Коэффициенты b_{k+t} суть коэффициенты локального оператора, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $M \in \mathbb{N}$ такое, что $|b_{k+t}|(t+k)! < \varepsilon^{t+k}$ для всех $t+k > M$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
t!|c_t| &\le (1+e^t)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2a)^k k^k (t+k)!t!|b_{k+t}|}{(t+k)!}\\
&\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2a)^k(1+e)^t e^k k!t!(t+k)!|b_{t+k}|}{(t+k)!} \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2a)^k(1+e^t)e^k k!t!(t+k)!|b_{t+k}|}{t!k!}\\
&\le \sum_{k=0}^{\infty}(2ae)^k(1+e^t)\varepsilon^{t+k} = (1+e^t)\varepsilon^t\sum_{k=0}^{\infty}(2ae\varepsilon)^k,
\end{aligned}$$

откуда следует требуемое утверждение, поскольку можно выбрать ε сколь угодно малым. $\square$

Замечание 1.4. В силу леммы 1.1 легко показать, что если $\phi,\ \psi \in \mathscr{P}_{*,a}(\mathbb{D})$, то $\phi *_0 \psi \in \mathscr{P}_{*,a}(\mathbb{D})$ и отображение $*_0 : \mathscr{P}_{*,a}(\mathbb{D}) \times \mathscr{P}_{*,a}(\mathbb{D}) \to \mathscr{P}_{*,a}(\mathbb{D})$ непрерывно.

Для преобразования Лапласа определим пространство $\mathscr{P}_*([-r,\infty])$, $r > 0$. Заметим, что $[-r,\infty]$ компактно в $\mathbb{D}$.

Пространство $\mathscr{P}_*([-r,\infty],h)$ определим как пространство гладких функции ϕ на $(-r,\infty)$ со свойством $\|\phi\|_{*,-r,h} < \infty$, где

$$\|\phi\|_{*,-r,h} := \sup\left\{\frac{\|\phi^{(\alpha)}(x)\|e^{|x|/h}}{h^\alpha \alpha!} : \alpha \in \mathbb{N}_0,\ x \in (-r,\infty)\right\}.$$

Тогда

$$\mathscr{P}_*([-r,\infty]) := \operatorname{ind}\lim_{h\to+\infty}\mathscr{P}_*([-r,\infty],h).$$

Лемма 1.5. *Пространство $\mathscr{P}_*(\mathbb{D})$ плотно в $\mathscr{P}_*([-r,\infty])$.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 8.6.4 в [14]. $\square$

Для $a \geq 0$ определим пространство

$$\mathscr{P}_{*,a}([-r,\infty]) := \{\phi : e^{a\cdot}\phi \in \mathscr{P}_*([-r,\infty])\}.$$

Зададим топологию на $\mathscr{P}_{*,a}([-r,\infty])$:

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = 0 \text{ в } \mathscr{P}_{*,a}([-r,\infty]) \text{ тогда и только тогда,}$$
$$\text{когда } \lim_{n\to\infty} e^{a\cdot}\phi_n = 0 \text{ в } \mathscr{P}_*([-r,\infty]).$$

Если $a \geq 0$ и $e^{-a\cdot}G \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E))$, то G может быть продолжено на элементы пространства непрерывных линейных отображений из $\mathscr{P}_{*,a}([-r,\infty])$ в $L(E)$ с сильной топологией. Это продолжение единственно в силу леммы 1.5. Используем это для определения преобразования Лапласа G.

2. Полугруппы гиперфункций Фурье

Определение полугрупп (экспоненциальных) гиперфункций Фурье с плотно определенными инфинитезимальными генераторами (см. [13, определение 2.1]) дано в базисе пространства $\mathscr{P}_0$, структура которого недостаточно ясна. Дадим другое определение, связанное с неплотно определенными инфинитезимальными генераторами.

Далее обозначим через $\mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E))$ пространство операторнозначных гиперфункций Фурье с носителем в $[0,\infty]$. А именно, если $f \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E))$ представима в виде $f(t,\cdot) = F_+(t+i0,\cdot) - F_-(t-i0,\cdot)$, где F_+ и F_- — определяющие функции для f (см. [14, определения 1.3.6, 8.3.1]), γ_+ и γ_- — кусочно гладкие пути, соединяющие точки $-a$ ($a > 0$) и ∞, такие, что γ_+ и γ_- лежат в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, а также в полосе вокруг $\mathbb{R}$, зависящей от f, то для любого $\psi \in \mathscr{P}_*(\mathbb{D})$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\psi(t)\,dt = \int_0^\infty f(t)\psi(t)\,dt := \int_{\gamma_+} F_+(z)\psi(z)\,dz - \int_{\gamma_-} F_-(z)\psi(z)\,dz.$$

Для этого выражения будем использовать обозначение $\langle f,\psi\rangle$, поскольку придерживаемся дуального подхода Чонга и Кима.

Пусть $\varphi \in \mathscr{P}_*$ и $f(t,\cdot) = F_+(t+i0,\cdot) - F_-(t-i0,\cdot)$ — элемент $\mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E))$. Тогда

$$\varphi(t)f(t,\cdot) := \varphi(t)F_+(t+i0,\cdot) - \varphi(t)F_-(t-i0,\cdot).$$

Обозначим через $\mathscr{P}_*^0$ подпространство $\mathscr{P}_*$, состоящее из функций ϕ таких, что $\phi(0) = 0$. Рассмотрим также $\mathscr{P}_*^{00}$ — подпространство $\mathscr{P}_*$, состоящее из функций ψ таких, что $\psi(0) = 0$ и $\psi'(0) = 0$. Любая $\psi \in \mathscr{P}_*$ может быть записана в виде

$$\psi(t) = \psi(0)\phi_0(t) + \theta(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

$$\psi(t) = \psi(0)\phi_0(t) + \psi'(0)\phi_1(t) + \tilde{\theta}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

где ϕ_0, ϕ_1 — фиксированные элементы $\mathscr{P}_*$ такие, что $\phi_0(0) = 1$, $\phi_0'(0) = 0$, $\phi_1(0) = 0$, $\phi_1'(0) = 1$ и θ изменяется на $\mathscr{P}_*^0$, а $\tilde{\theta}$ — на $\mathscr{P}_*^{00}$. Определим $\mathscr{P}_{*a}^0$ как пространство функций $\phi \in \mathscr{P}_{*,a}$ таких, что $\phi(0) = 0$, а $\mathscr{P}_{*,a}^{00}$ — как пространство функций $\phi \in \mathscr{P}_{*,a}$ таких, что $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 0$. Заметим, что разложения, аналогичные (2.1) и (2.2), имеют место для элементов $\mathscr{P}_{*,a}^0$ и $\mathscr{P}_{*,a}^{00}$ соответственно.

Определение 2.1. Элемент $G \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E))$ называется *полугруппой гиперфункций pre-Фурье*, если выполнено следующее условие:

(H.1) $G(\phi *_0 \psi) = G(\phi)G(\psi), \quad \phi, \psi \in \mathscr{P}_*(\mathbb{D})$.

Полугруппа гиперфункций pre-Фурье G называется *полугруппой гиперфункций Фурье* (кратко FHSG), если в дополнение выполнено условие

(H.2) $\mathscr{N}(G) := \bigcap\limits_{\phi \in \mathscr{P}^{00}_*(\mathbb{D})} N(G(\phi)) = \{0\}$.

Если верно условие

(H.3) $\mathscr{R}(G) := \bigcup\limits_{\phi \in \mathscr{P}^{00}_*(\mathbb{D})} R(G(\phi))$ плотно в E,

то G называется *плотной* (FHSG).

Если $e^{-a\cdot}G \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E))$ для некоторого $a > 0$ и имеет место (H.1) при $\phi, \psi \in \mathscr{P}_{*,a}(\mathbb{D})$, то G называется *экспоненциально ограниченной полугруппой гиперфункций pre-Фурье*. Если (H.2) и (H.3) выполнены для $\phi \in \mathscr{P}^{00}_{*,a}(\mathbb{D})$, то G называется *плотно экспоненциальной полугруппой гиперфункций Фурье* (кратко EFHSG).

Пусть A — замкнутый оператор. Обозначим через $[D(A)]$ банахово пространство $D(A)$ с нормой графика $\|x\|_{[D(A)]} = \|x\| + \|Ax\|$, $x \in D(A)$. Аналогично [5, определения 2.1, 3.1] дадим

Определение 2.2. Пусть A — замкнутый оператор. Тогда гиперфункция Фурье $G \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E, [D(A)]))$ — *фундаментальное решение для* A, если $P*G = \delta \otimes I_E$ и $G*P = \delta \otimes I_{[D(A)]}$, где $P := \delta' \otimes I_{D(A)} - \delta \otimes A \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L([D(A)], E))$; гиперфункцию Фурье G называют *экспоненциальным фундаментальным решением для* A, если при этом

$$e^{-a\cdot}G \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E, [D(A)])) \ \text{ для некоторого } a > 0.$$

Аналогично если экспоненциальная гиперфункция Фурье G — фундаментальное решение для A, удовлетворяющее условию (H.3), то экспоненциальная гиперфункция Фурье G называется *плотным фундаментальным решением для* A.

Пусть $a \geq 0$ и $\alpha \in \mathscr{P}_{*a}$ — четная функция такая, что $\int \alpha(t)\,dt = 1$. Пусть $\operatorname{sgn}(x) := 1$, $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) := -1$, $x < 0$, и $\operatorname{sgn}(0) := 0$. Сеть вида $\delta_\varepsilon = \alpha(\cdot/\varepsilon)/\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, называется *дельта-сетью* в $\mathscr{P}_{*a}$. Беря разные α с указанными свойствами, получим множество дельта-сетей в $\mathscr{P}_{*a}$. Ясно, что всякая дельта-сеть сходится к δ при $\varepsilon \to 0$ в $\mathscr{Q}(\mathbb{D})$. Для $x \in \mathbb{R}$ определим

$$\delta *_0 \phi(x) := 2\operatorname{sgn}(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon *_0 \phi(x) = \phi(x), \quad \phi \in \mathscr{P}^0_{*,a},$$

$$\delta' *_0 \phi(x) := 2\operatorname{sgn}(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \delta'_\varepsilon *_0 \phi(x) = \phi'(x), \quad \phi \in \mathscr{P}^{00}_{*,a}.$$

Определение 2.3. Пусть $a \geq 0$ и G — (EFHSG). Тогда

1. $G(\delta)x := y$ в том и только в том случае, если $G(\delta *_0 \phi)x = G(\phi)y$ для любого $\phi \in \mathscr{P}^0_{*,a}(\mathbb{D})$.

2. $G(-\delta')x := y$, если $G(-\delta' *_0 \phi)x = G(\phi)y$ для любого $\phi \in \mathscr{P}^{00}_{*,a}(\mathbb{D})$.

$A = G(-\delta')$ называется *инфинитезимальным генератором* G.

Таким образом, $G(\delta)$ — тождественный оператор. Для доказательства однозначности функции $G(-\delta')$ надо убедиться в том, что $G(-\delta')x = y_1$ для любого $x \in E$ и $G(-\delta')x = y_2$ влечет $y_1 = y_2$. Тем самым надо показать, что

$$G(\phi')x = G(\phi)y_1, \ G(\phi')x = G(\phi)y_2, \ \phi \in \mathscr{P}^{00}_* \Longrightarrow y_1 = y_2.$$

Предложение 2.4. *Если $G(\phi')x = 0$ для любого $\phi \in \mathscr{P}^{00}_{*,a}$, то $x = 0$.*

Доказательство. Покажем, что предположение $G(\phi)y = 0$ для любого $\phi \in \mathscr{P}^{0}_{*,a}$ влечет $y = 0$. В силу (2.1) для любой $\phi_0 \in \mathscr{P}_{*,a}$ такой, что $\phi_0(0) = c \neq 0$, имеем
$$G(\psi)y = \frac{\psi(0)}{c} G(\phi_0)y, \quad \psi \in \mathscr{P}_{*,a}.$$
Пусть ϕ, ψ — произвольные элементы $\mathscr{P}_{*,a}$. Так как $G(\phi *_0 \psi)y = G(\phi)G(\psi)y$ и $\phi *_0 \psi(0) = 0$, для $z = G(\psi)y$ получаем
$$G(\phi *_0 \psi)y = G(\phi)z = 0,\ \phi \in \mathscr{P}_{*,a} \Longrightarrow z = 0.$$
Значит, $G(\psi)y = 0$ для любой $\psi \in \mathscr{P}_{*,a}$, откуда $y = 0$.

Ввиду (2.2) для любой $\psi \in \mathscr{P}_{*,a}$ имеем
$$G(\psi')x = \psi(0)G(\phi_0')x + \psi'(0)G(\phi_1')x = 0.$$
Обозначим через P_{10} множество $\phi_0 \in \mathscr{P}_*$ таких, что $\phi_1(0) = c \neq 0$, $\phi_1'(0) = 0$, а через P_{01} — множество всех $\phi_1 \in \mathscr{P}_*$ таких, что $\phi_0(0) = 0$, $\phi_0'(0) = c \neq 0$.

Имеем следующие случаи:
$$(\forall \phi_0 \in P_{10})\,(\forall \phi_1 \in P_{01})\,(G(\phi_0)x = 0,\ G(\phi_1)x = 0),$$
$$(\forall \phi_0 \in P_{10})\,(\exists \phi_1 \in P_{01})\,(G(\phi_0)x = 0,\ G(\phi_1)x \neq 0),$$
$$(\exists \phi_0 \in P_{10})\,(\forall \phi_1 \in P_{01})\,(G(\phi_0)x \neq 0,\ G(\phi_1)x = 0),$$
$$(\exists \phi_0 \in P_{10})\,(\exists \phi_1 \in P_{01})\,(G(\phi_0)x \neq 0,\ G(\phi_1)x \neq 0).$$
В первом случае в силу (2.2) имеем $G(-\psi')x = 0$, $\psi \in \mathscr{P}_{*,a}$. Отсюда стандартными рассуждениями получаем
$$G(\psi)x = C \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,dt\,x = 0, \quad \psi \in \mathscr{P}_{*,a},$$
что верно при $C = 0$.

Рассмотрим четвертый случай. Имеем
$$G(\psi')x = C_1\langle \delta, \psi\rangle x + C_2\langle \delta', \psi\rangle x,$$
значит,
$$G(\psi')x = C_1\langle \delta, \psi\rangle x + C_2\langle \delta', \psi\rangle x + C_3\langle \mathbf{1}, \psi\rangle x,$$
где $\langle \mathbf{1}, \psi\rangle x = \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\,dt\,x$. По свойству полугруппы $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, откуда заключаем, что $x = 0$. Второй и третий случаи рассматриваются аналогично. Предложение доказано. □

2.1. Преобразование Лапласа и характеризации полугрупп гиперфункций Фурье. Представленные в этом пункте утверждения относительно преобразования Лапласа новые, но доказательства их довольно просты. Они основаны на технике, развитой Комацу [23–25].

Для любого $r > 0$ имеем $E_\lambda = e^{-\lambda\cdot} \in \mathscr{P}_*((-r, \infty])$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Определим преобразование Лапласа $G \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E))$ следующим образом:
$$\mathscr{L}G(\lambda) = \widehat{G}(\lambda) := G(E_\lambda), \quad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Предложение 2.5. *Существует локальный оператор P такой, что*

$$\|\widehat{G}(\lambda)\| \le |P(\lambda)|, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Доказательство этого утверждения проще, чем в случае ультрараспределений Румье.

Если $e^{-a\cdot}G \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E))$, то определим преобразование Лапласа G так:

$$\mathscr{L}(G)(\lambda) = \widehat{G}(\lambda) := G(E_\lambda), \quad \operatorname{Re}\lambda > a.$$

Это аналитическая функция, определенная на $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > a\}$, и существует локальный оператор P такой, что $\|\widehat{G}(\lambda)\| \le |P(\lambda)|$, $\operatorname{Re}\lambda > a$.

Замечание 2.6. Аналогично случаю Румье можно доказать следующее

Утверждение. *Если гиперфункция Фурье $G \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E, [D(A)]))$ — фундаментальное решение для A, то G — полугруппа гиперфункций pre-Фурье.*

Как и в случае ультрараспределений, G не должно быть (FHSG).

Структурные свойства полугрупп гиперфункций Фурье аналогичны свойствам полугрупп ультрараспределений класса Румье. Для существенно отличающихся доказательств соответствующих результатов используем следующую лемму, где снова используем преобразование Фурье вместо преобразования Лапласа.

Лемма 2.7. *Пусть P_{L_p} имеет вид* (1.1). *Отображение*

$$P_{L_p}(id/dt) : \mathscr{P}_*(\mathbb{D}) \to \mathscr{P}_*(\mathbb{D}), \quad \phi \mapsto P_{L_p}(id/dt)\phi$$

является непрерывной линейной биекцией.

Доказательство. В силу [14, предложение 8.2.2] из $\phi \in \mathscr{P}_*(\mathbb{D})$ следует, что $\mathscr{F}(\phi) \in \mathscr{P}_*(\mathbb{D})$. Значит, $|\mathscr{F}(\phi)(z)| \le C_\varepsilon e^{(-1/n-\varepsilon)|\operatorname{Re} z|}$, $z \in \mathbb{R} + I_n$, для некоторого $n \in \mathbb{N}$, любого $\varepsilon > 0$ и соответствующего $C_\varepsilon > 0$. Из [14, предложение 8.1.6, лемма 8.1.7, теорема 8.4.9] простыми преобразованиями получаем

$$Ce^{\frac{A|\zeta|}{r(|\zeta|+1)}} \le |P_{L_p}(\zeta)|, \quad |\eta| \le \frac{|\xi|}{2} + \frac{1}{L_1}, \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{2.3}$$

для некоторых $C, A > 0$ и монотонно возрастающей функции r такой, что $r(0) = 1$, $r(\infty) = \infty$. Тем самым существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mathscr{F}(\phi)/P_{L_p} \in \widetilde{\mathscr{O}}^{-1/n_0}(\mathbb{R} + iI_{n_0}).$$

Значит, его обратное преобразование Фурье $\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(\phi)/P_{L_p})$ является элементом $\mathscr{P}_*(\mathbb{D})$. $\square$

С помощью свойств локальных операторов и норм $\|\cdot\|_h$, как и в случае умеренных ультрараспределений Румье, получается

Теорема 2.8. *Пусть $f : \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > a\} \to E$ — аналитическая функция такая, что*

$$\|f(\lambda)\| \le C|P(\lambda)|, \quad \operatorname{Re}\lambda > a,$$

для некоторых $C > 0$ и локального оператора P, $|P(\lambda)| > 0$, $\operatorname{Re}\lambda > a$. Пусть локальный оператор $\widetilde{P}$ удовлетворяет (2.3). *Тогда*

$$(\exists M > 0)\,(\exists h \in C^\infty([0,\infty); E))\,(\forall j \in \mathbb{N}_0) \quad (h^{(j)}(0) = 0),\ \|h(t)\| \le Me^{at},\ t \ge 0,$$

и

$$f(\lambda) = P(\lambda)\widetilde{P}(\lambda) \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(t)\,dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > a.$$

Теорема 2.9. *Пусть A замкнутый и плотно определенный. Тогда A порождает плотную* (EFHSG) *в том и только том случае, когда выполнены следующие условия:*

(i) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > a\} \subset \rho(A)$;

(ii) *существуют локальный оператор P такой, что $|P(\lambda)| > 0$, $\operatorname{Re}\lambda > a$, локальный оператор $\widetilde{P}$ со свойствами из теоремы* 2.8 *и $C > 0$ такое, что*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq C|P(\lambda)\widetilde{P}(\lambda)|, \quad \operatorname{Re}\lambda > a;$$

(iii) $R(\lambda : A)$ — *преобразование Лапласа G, удовлетворяющего* (H.2).

Доказательство. Докажем теорему при $a = 0$. ($\Leftarrow$) Теорема 2.8 влечет, что $R(\lambda : A)$ имеет вид

$$R(\lambda : A) = P(\lambda)\widetilde{P}(\lambda)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

где $S \in C^\infty([0,\infty), L(E))$, $S^{(j)}(0) = 0$, $j \in \mathbb{N}_0$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует $M > 0$ такое, что $\|S(t)\| \leq Me^{at}$, $t \geq 0$. Отсюда $R(\lambda : A) = \mathscr{L}(G)(\lambda)$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, где $G = P(-d/dt)\widetilde{P}(-d/dt)S$, и $G \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E))$. Поскольку

$$(\delta' \otimes I_{D(A)} - \delta \otimes A) * G = \delta \otimes I_E, \quad G * (\delta' \otimes I_{D(A)} - \delta \otimes A) = \delta \otimes I_{D(A)}$$

и выполнено (iii), G — полугруппа гиперфункций Фурье.

($\Rightarrow$) Положим $E_\lambda^+ = E_\lambda H$, $R_\lambda^+ = R_\lambda H$, где H — функция Хевисайда. Пусть фиксированы $G \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E, D(A)))$ и $\lambda \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > a\} \subset \rho(A)$. Тогда $(\delta' + \lambda\delta) * E_\lambda^+ = \delta$. Пусть $\phi \in \mathscr{P}_*(\mathbb{D})$ и $x \in E$. Тогда

$$G((\delta' + \lambda\delta) *_0 E_\lambda^+ *_0 \phi) = G(\phi)x,$$

$$G(\delta' *_0 R_\lambda^+ *_0 \phi)x + \lambda G(\delta *_0 E_\lambda^+ *_0 \phi)x = G(\delta')G(E_\lambda^+ *_0 \phi)x + \lambda\widehat{G}(\lambda)G(\phi)x.$$

Значит,

$$-A(\widehat{G}(\lambda)G(\phi)x) + \lambda\widehat{G}(\lambda)G(\phi)x = G(\phi)x.$$

В силу (H.3) $(-A + \lambda)\widehat{G}(\lambda) = I$, так что $\|\widehat{G}(\lambda)\| \leq C|P(\lambda)|$, $\operatorname{Re}\lambda > a$, где P — подходящий локальный оператор. $\square$

Следствие 2.10. *Пусть A — замкнутый линейный оператор. Если A порождает* (EFHSG), *то выполнены пп.* (i)–(iii) *из теоремы* 2.9.

Если выполнены пп. (i), (ii) *теоремы* 2.9, *то гиперфункция Фурье G, определенная, как выше, является фундаментальным решением для A. Если имеет место п.* (iii), *то G —* (EFHSG), *порожденная A.*

Заметим, что в следствии 2.10 оператор A неплотно определен.

Докажем теоремы, связанные с полугруппами гиперфункций Фурье. Как и в случае ультрараспределений, теорема может быть доказана и для (EFHSG), но для простоты доказательства примем $a = 0$.

Теорема 2.11. *Пусть A — замкнутый оператор в E. Если A порождает* (FHSG) *G, то гиперфункция Фурье G является фундаментальным решением для*

$$P := \delta' \otimes I_{D(A)} - \delta \otimes A \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L([D(A)], E)).$$

В частности, если $T \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, E)$, то $u = G * T$ — единственное решение

$$-Au + \frac{\partial}{\partial t}u = T, \quad u \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, [D(A)]). \tag{2.4}$$

Если $\operatorname{supp} T \subset [\alpha, \infty)$, *то* $\operatorname{supp} u \subset [\alpha, \infty)$.

Обратно, если гиперфункция Фурье $G \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E, [D(A)]))$ — фундаментальное решение для P и $\mathscr{N}(G) = \{0\}$, то G — (FHSG) *в E.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Легко проверить, что $(G(\psi)x, G(-\psi')x - \psi(0)x) \in G(-\delta')$ и G — фундаментальное решение для P. Единственность $u = G * T$ — решения (2.4) — очевидна так же, как свойство носителя решения u, если $\operatorname{supp} T \subset [\alpha, \infty)$.

Импликация ($\Leftarrow$) может быть доказана, как (d)$\Rightarrow$(a) в [2, теорема 2.7]. □

Теорема 2.12. *Для следующих утверждений:*

(1) *A порождает* (FHSG) *G;*

(2) *A порождает* (FHSG) *вида $G = P_{L_p}(-id/dt)S_{a,K}$, где $S_K : \mathbb{R} \to L(E)$ — экспоненциально медленно возрастающая непрерывная функция и $S_K(t) = 0$, $t \le 0$;*

(3) *A — генератор глобальной K-конволюционной полугруппы $(S_K(t))_{t\ge 0}$, где $K = \mathscr{L}^{-1}\big(\frac{1}{P_{L_p}(-i\lambda)}\big)$;*

(4) *задача*

$$(\delta \otimes (-A) + \delta' \otimes I_E) * G = \delta \otimes I_E, \quad G * (\delta \otimes (-A) + \delta' \otimes I_{D(A)}) = \delta \otimes I_{D(A)}$$

имеет единственное решение $G \in \mathscr{Q}_+(\mathbb{D}, L(E, [D(A)]))$, где $\mathscr{N}(G) = \{0\}$;

(5) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $K_\varepsilon > 0$ такое, что*

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\}, \quad \|R(\lambda : A)\| \le K_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

справедливы такие импликации:

$$(1) \Leftrightarrow (4), \quad (1) \Rightarrow (3), \quad (3) \Rightarrow (4), \quad (4) \Rightarrow (5).$$

Доказательство. Эквивалентность (1) и (4) может быть доказана, как и в случае полугрупп ультрараспределений [2, теорема 2.7].

Для доказательства (1) $\Rightarrow$ (3) используется лемма 2.7 (см. (a)$'$ $\Rightarrow$ (c)$'$ в [2, теорема 2.7]). Импликация (4) $\Rightarrow$ (5) получается из теоремы 2.9 и следствия 2.10. В случае, когда инфинитезимальный генератор плотно определен, Ито доказал [5] эквивалентность (5) и немного отличающегося от (4) утверждения (без предположения $\mathscr{N}(G) = \{0\}$). Наше утверждение сильнее, поскольку основано на структурных результатах теоремы 2.9. □

Операторы, удовлетворяющие (5), могут быть заданы согласно [26, пример 1.6] с соответственно подобранной последовательностью $(M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$.

Определение фундаментального решения G как гиперфункции для замкнутого линейного оператора A можно найти в [9]. Для простоты будем говорить, что в этом случае *A порождает полугруппу гиперфункций* G. Следующее утверждение доказано в [9].

Замкнутый линейный оператор A порождает полугруппу гиперфункций тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют C_ε, $K_\varepsilon > 0$ такие, что

$$\rho(A) \supset \Omega_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \ge \varepsilon|\lambda| + C_\varepsilon\}, \quad \|R(\lambda : A)\| \le K_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon.$$

Приведем некоторые результаты относительно гиперфункций и конволюционных полугрупп в терминах спектральных условий и асимптотического поведения $\widetilde{K}$. Схожие результаты относительно n раз интегрируемых полугрупп, $n \in \mathbb{N}_0$, см. в [27], относительно α раз интегрируемых полугрупп, $\alpha > 0$, — в [28], относительно конволюционных полугрупп — [29, теорема 1.3.1]. Поскольку нас интересует связь конволюционных полугрупп с полугруппами гиперфункций, используем следующие условия на K:

(P1) K экспоненциально ограничено, т. е. существуют $\beta \in \mathbb{R}$ и $M > 0$ такие, что $|K(t)| \leq Me^{\beta t}$ для п. в. $t \geq 0$;

(P2) $\widetilde{K}(\lambda) \neq 0$, $\operatorname{Re}\lambda > \beta$.

В общем случае второе условие не выполняется для экспоненциально ограниченных функций (ср. [30, теорема 1.11.1; 31]). Принимая во внимание [32; 33, теоремы 2.7.1, 2.7.2], сформулируем следующие утверждения.

Теорема 2.13. 1. *Пусть K удовлетворяет условиям* (P1), (P2) *и* $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$, $0 < \tau \leq \infty$, — *K-конволюционная полугруппа, порожденная A. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\varepsilon_0 \in (0, \tau\varepsilon)$ и $T_\varepsilon > 0$ такие, что*

$$\frac{1}{|\widetilde{K}(\lambda)|} \leq T_\varepsilon e^{\varepsilon_0|\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \beta\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\overline{C}_\varepsilon > 0$ и $\overline{K}_\varepsilon > 0$ такие, что

$$\Omega^1_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geq \varepsilon|\lambda| + \overline{C}_\varepsilon\} \subset \rho(A), \quad \|R(\lambda : A)\| \leq \overline{K}_\varepsilon e^{\varepsilon_0|\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega^1_\varepsilon.$$

2. *Пусть $K \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\tau))$ для некоторого $0 < \tau \leq 1$ и A порождает K-конволюционную полугруппу $(S_K(t))_{t\in[0,\tau)}$. Если K может быть продолжено на функцию K_1 из $L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$, удовлетворяющую условию* (P1), *так, что ее преобразование Лапласа имеет оценки, как в теореме 2.12, то A порождает полугруппу гиперфункций Оучи.*

3. *Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существуют $C_\varepsilon > 0$ и $M_\varepsilon > 0$ такие, что $\Omega_\varepsilon \subset \rho(A)$ и $\|R(\lambda : A)\| \leq M_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}$, $\lambda \in \Omega_\varepsilon$.*

(a) *Предположим, что K — экспоненциально ограниченная функция, преобразование Лапласа которой обладает следующим свойством: существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_\varepsilon > 0$, для которого*

$$|\widetilde{K}(\lambda)| \leq T_\varepsilon e^{-\varepsilon_0|\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon. \tag{2.5}$$

Если $\tau > 0$ и $K|_{[0,\tau)} \neq 0$ ($K|_{[0,\tau)}$ — сужение K на $[0,\tau)$), то A порождает локальную K-полугруппу на $[0,\tau)$.

(b) *Пусть K — экспоненциально ограниченная функция, $\tau > 0$ и $K|_{[0,\tau)} \neq 0$. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существуют $T_\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_0 \in (\varepsilon(1+\tau), \infty)$ такие, что выполнено* (2.5). *Тогда A порождает локальную K-полугруппу на $[0,\tau)$.*

Связь полугрупп гиперфункций и ультрараспределений с (локально интегрируемыми) регуляризованными полугруппами представляется более сложной. В этой связи есть пример (см. [12]), показывающий, что существует плотно определенный оператор A на пространстве Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$, обладающий следующими свойствами.

1. A — генератор полугруппы гиперфункций Оучи.

2. A не является субгенератором локальной α раз интегрируемой C-полугруппы для любых инъективной $C \in L(H^2(\mathbb{C}_+))$ и $\alpha > 0$.

Ясно, что существует оператор A, порождающий всю C-регуляризованную группу, но не полугруппу гиперфункций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костич М., Пилипович С.* Ультрараспределения полугрупп // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 291–305.

2. *Костич М., Пилипович С., Велинов Д.* Структурные теоремы для ультрараспределений полугрупп // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 100–110.

3. *Lions J. L.* Semi-groupes distributions // Portugal. Math. 1960. V. 19. P. 141–164.

4. *Chazarain J.* Problémes de Cauchy abstraites et applications á quelques problémes mixtes // J. Funct. Anal. 1971. V. 7. P. 386–446.

5. *Ito Y.* On the abstract Cauchy problems in the sense of Fourier hyperfunctions // J. Math. Tokushima Univ. 1982. V. 16. P. 25–31.

6. *Kisyński J.* Distribution semigroups and one parameter semigroups // Bull. Polish Acad. Sci. 2002. V. 50. P. 189–216.

7. *Kostić M.* C-distribution semigroups // Stud. Math. 2008. V. 185. P. 201–217.

8. *Kunstmann P. C.* Distribution semigroups and abstract Cauchy problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. V. 351. P. 837–856.

9. *Ōuchi S.* Hyperfunction solutions of the abstract Cauchy problems // Proc. Japan Acad. 1971. V. 47. P. 541–544.

10. *Ōuchi S.* On abstract Cauchy problems in the sense of hyperfunctions in hyperfunctions and pseudo-differential equations // Proc. Katata, 1971 (ed. H. Komatsu). Berlin: Springer-Verl., 1973. P. 135–152. (Lect. Notes Math.; V. 287).

11. *Кочубей А. Н.* Гиперфункции-решения дифференциально-операторных уравнений // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 4. С. 778–791.

12. *Beals R.* On the abstract Cauchy problem // J. Funct. Anal. 1972. V. 10. P. 281–299.

13. *Ito Y.* Fourier hyperfunction semigroups // J. Math. Tokushima Univ. 1982. V. 16. P. 33–53.

14. *Kaneko A.* Introduction to hyperfunctions. Dordercht; Boston; London: Kluwer, 1982.

15. *Morimoto M.* An introduction to Sato's hyperfunctions. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. (Transl. Math. Monogr.; V. 129).

16. *Hörmander L.* Between distributions and hyperfunctions / Colloq. Honneur L. Schwartz, Ec. Polytech., 1983. V. 1 // Astérisque. 1985. V. 131. P. 89–106.

17. *Kawai T.* The theory of Fourier transformations in the theory of hyperfunctions and its applications // Sūrikaiseki Kenkyusho Kokyuroku, R. I. M. S., Kyoto Univ. 1969. V. 108. P. 84–288 (in Japanese).

18. *Kawai T.* On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA. 1970. V. 17. P. 465–517.

19. *Komatsu H.* An introduction to the theory of generalized functions. Tokyo: Iwanami Shoten, 1978.

20. *Sato M.* Theory of hyperfunctions // Sûgaku. 1958. V. 10. P. 1–27.

21. *Chung J., Chung S.-Y., Kim D.* Characterization of the Gelfand–Shilov spaces via Fourier transforms // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. V. 124. P. 2101–2108.

22. *Chung J., Chung S.-Y., Kim D.* A characterization for Fourier hyperfunctions // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1994. V. 30. P. 203–208.

23. *Komatsu H.* Ultradistributions. I. Structure theorems and a characterization // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math. 1973. V. 20. P. 25–105.

24. *Komatsu H.* Ultradistributions. III. Vector valued ultradistributions and the theory of kernels // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math. 1982. V. 29. P. 653–718.

25. *Komatsu H.* Operational calculus and semi-groups of operators // Functional analysis and related topics (Kioto). Berlin: Springer-Verl., 1991. P. 213–234.

26. *Kunstmann P. C.* Stationary dense operators and generation of non-dense distribution semigroups // J. Operator Theory. 1997. V. 37. P. 111–120.

27. *Arendt W., El-Mennaoui O., Keyantuo V.* Local integrated semigroups: evolution with jumps of regularity // J. Math. Anal. Appl. 1994. V. 186. P. 572–595.

28. *Hieber M.* Integrated semigroups and differential operators on L^p spaces // Math. Ann. 1991. V. 29. P. 1–16.

29. *Melnikova I. V., Filinkov A. I.* Abstract Cauchy problems: three approaches. Boca Raton, Fl: Chapman & Hall/CRC, 2001.

30. *Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel: Birkhäuser-Verl., 2001.

31. *Kostić M., Pilipović S.* Global convoluted semigroups // Math. Nachr. 2007. V. 280, N 15. P. 1727–1743.
32. *Ciorănescu I., Lumer G.* Problèmes d'évolution régularisés par un noyan général $K(t)$. Formule de Duhamel, prolongements, théorèmes de génération // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. 1995. V. 319. P. 1273–1278.
33. *Kostić M.* Generalized semigroups and cosine functions. Belgrade: Math. Inst., 2011.

Статья поступила 2 февраля 2014 г.

Marko Kostić (Костич Марко)
Faculty of Technical sciences,
Trg D. Obradovića, 6, Novi Sad, Serbia 21125
marko.s@verat.net

Stevan Pilipović (Пилипович Стеван)
University of Novi Sad,
Trg D. Obradovića, 4, Novi Sad, Serbia 21125
pilipovic@dmi.uns.ac.rs

Daniel Velinov (Велинов Даниел)
Department for Mathematics,
Faculty of Civil Engineering-Skopje,
Partizanski Odredi, 24, P.O. box 560, Skopje, Macedonia 1000
velinovd@gf.ukim.edu.mk