Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 517.946

МНОГОМЕРНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А. А. Косов, Э. И. Семёнов

Аннотация. Изучается система двух уравнений параболического типа с двумя нелинейностями, зависящими от разности квадратов двух искомых функций. Найдены условия, при выполнении которых система редуцируется к одному уравнению. Указаны случаи, когда это уравнение сводится к линейному уравнению теплопроводности или к полулинейным уравнениям. Построены параметрические семейства точных решений, задаваемых элементарными функциями.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.408

Ключевые слова: параболические уравнения, нелинейные системы, многомерные точные решения.

1. Введение

Системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными используются при математическом моделировании технологических процессов с тепломассопереносом и химическими реакциями [1]. Отыскание их точных решений представляет собой весьма трудноразрешимую задачу. Поэтому обычно с помощью группового анализа или применения других методов исходную нелинейную систему стремятся свести к уравнению, для которого известны некоторые точные решения [2–4]. Представляет интерес выявление условий, при которых такая редукция задачи возможна, а также построение соответствующих преобразований и точных решений, что реально может быть выполнено только для отдельных классов нелинейных систем. В данной статье объектом исследования является система двух уравнений параболического типа с двумя нелинейностями, зависящими от разности квадратов искомых функций. Найдены условия, при выполнении которых система редуцируется к одному уравнению. Указаны случаи, когда это уравнение сводится к линейному уравнению теплопроводности или к полулинейным уравнениям. Построены параметрические семейства точных решений, задаваемых элементарными функциями. На важную роль точных решений при исследовании нелинейных систем уравнений в частных производных указывается в [1–13].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 15–08–06680), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–5007.2014.9) и междисциплинарного проекта № 80 СО РАН.

2. Постановка задачи и основные уравнения

В [5] рассмотрена система нелинейных параболических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi}{\partial t} &= \psi F(\psi^2 - a^2) + aG(\psi^2 - a^2), \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\partial a}{\partial t} &= aF(\psi^2 - a^2) + \psi G(\psi^2 - a^2), \end{aligned} \tag{1}$$

которая встречается при моделировании нестационарных процессов теории тепло- и массопереноса реагирующих систем, теории горения и математической биологии. Там же предлагается искать точное решение системы (1) в виде

$$\psi(x,t) = r(z)\,\mathrm{ch}(\theta(z) + C_1 t + C_2), \quad a(x,t) = r(z)\,\mathrm{sh}(\theta(z) + C_1 t + C_2), \tag{2}$$

где $z = x + \lambda t$, C_1, C_2 и λ — произвольные постоянные, а функции $r(z)$, $\theta(z)$ должны определяться из системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка.

Отметим, что в одномерном стационарном случае система (1) является системой нелинейных ОДУ и при

$$F(\psi^2 - a^2) \equiv \frac{j}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}, \ j = \mathrm{const}, \quad G(\psi^2 - a^2) \equiv 0$$

представляет модель магнитной изоляции вакуумного диода [14–16].

Цель нашей работы — построение точных решений более общей модели, а именно системы параболических уравнений

$$\begin{aligned} \Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t} &= \psi F(\mathbf{x}, t, W) + aG(\mathbf{x}, t, W), \\ \Delta a - \frac{\partial a}{\partial t} &= aF(\mathbf{x}, t, W) + \psi G(\mathbf{x}, t, W). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $W = \psi^2 - a^2$, $\psi \triangleq \psi(\mathbf{x}, t)$, $a \triangleq a(\mathbf{x}, t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Δ — n-мерный оператор Лапласа.

Воспользуемся структурой (2) и точные решения системы (3) будем искать в виде

$$\psi(\mathbf{x}, t) = f\,\mathrm{ch}(\omega), \quad a(\mathbf{x}, t) = f\,\mathrm{sh}(\omega), \tag{4}$$

где $f \triangleq f(\mathbf{x}, t)$, $\omega \triangleq \omega(\mathbf{x}, t)$ — пока произвольные дважды дифференцируемые по переменным $(x_1, \ldots, x_n)$ и аргументу t функции. После подстановки анзаца (4) в уравнения (3) соответственно получим

$$A\,\mathrm{ch}(\omega) + B\,\mathrm{sh}(\omega) = 0, \quad A\,\mathrm{sh}(\omega) + B\,\mathrm{ch}(\omega) = 0, \tag{5}$$

где приняты обозначения

$$A \triangleq \Delta f - \frac{\partial f}{\partial t} + f|\nabla\omega|^2 - fF(\mathbf{x}, t, f^2),$$

$$B \triangleq f\left(\Delta\omega - \frac{\partial\omega}{\partial t}\right) + 2\nabla f \cdot \nabla\omega - fG(\mathbf{x}, t, f^2).$$

Здесь и далее $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ — градиент, символ $\cdot$ означает скалярное произведение. Относительно переменных A и B система алгебраических уравнений (5) линейная и однородная, ее определитель равен единице, поэтому она имеет только тривиальное решение $A = 0$, $B = 0$. Следовательно, с учетом введенных обозначений система (3) сводится к следующим двум нелинейным уравнениям:

$$\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t} + f|\nabla\omega|^2 = fF(\mathbf{x}, t, f^2), \tag{6}$$

$$\Delta\omega - \frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{2}{f}\nabla f \cdot \nabla\omega = G(\mathbf{x}, t, f^2). \tag{7}$$

Систему уравнений в частных производных (6), (7) будем называть *разрешающей системой для исходных уравнений* (3) *в виде анзаца* (4).

3. Редукции разрешающей системы к одному уравнению

Основная цель данного раздела — сведение разрешающей системы уравнений (6), (7) при определенных предположениях к одному уравнению. Для этого будем рассматривать два случая: когда ω — функция от f и когда, наоборот, f — некоторая функция от ω.

А. Пусть для компонент решения системы (6), (7) имеет место функциональная связь $\omega(\mathbf{x}, t) \equiv u(f(\mathbf{x}, t))$, где $u(f)$ — некоторая дважды дифференцируемая функция скалярного аргумента. После подстановки $\omega(\mathbf{x}, t)$ в систему (6), (7) получим для искомых функций $u(f)$ и $f(\mathbf{x}, t)$ систему двух уравнений

$$\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t} + fu'^2(f)|\nabla f|^2 = fF(\mathbf{x}, t, f^2), \tag{8}$$

$$\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{fu''(f) + 2u'(f)}{fu'(f)}|\nabla f|^2 = \frac{G(\mathbf{x}, t, f^2)}{u'(f)}. \tag{9}$$

Чтобы эта система сводилась к одному уравнению, соотношения (8) и (9) должны совпадать. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $u \stackrel{\triangle}{=} u(f)$ удовлетворяла ОДУ

$$fu'' + 2u' - f^2u'^3 = 0, \tag{10}$$

а функции $F(\mathbf{x}, t, f^2)$ и $G(\mathbf{x}, t, f^2)$ были связаны на решениях $u(f)$ ОДУ (10) тождеством

$$G(\mathbf{x}, t, f^2) \equiv fu'(f)F(\mathbf{x}, t, f^2). \tag{11}$$

ОДУ (10) заменой $u'(f) = z(f)$ сводится к уравнению Бернулли

$$fz' + 2z - f^2z^3 = 0,$$

которое имеет общее решение $z(f) = \frac{\sigma}{f\sqrt{c_1f^2+1}}$ и при $c_1 = 0$ частное решение $z(f) = \frac{\sigma}{f}$, где $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$. Отсюда соответственно легко предъявить следующие решения ОДУ (10): $u(f) = c_2 - \frac{\sigma}{2}\ln\frac{\sqrt{c_1f^2+1}+1}{\sqrt{c_1f^2+1}-1}$ и $u(f) = c_3 + \sigma\ln(f)$, где $c_1 \neq 0$, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Тем самым доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть в системе* (3) *функции* $F(\mathbf{x}, t, W)$, $G(\mathbf{x}, t, W)$ *при некотором значении* $c_1 > 0$ *связаны тождеством*

$$G(\mathbf{x}, t, W) \equiv \sigma\frac{F(\mathbf{x}, t, W)}{\sqrt{c_1W + 1}}, \tag{12}$$

где $\sigma = 1$ *или* $\sigma = -1$. *Тогда система* (3) *обладает точным решением*

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{c_2^2 + 1}{2c_2\sqrt{c_1}}\sqrt{c_1 f^2(\mathbf{x}, t) + 1} - \sigma\frac{c_2^2 - 1}{2c_2\sqrt{c_1}}, \tag{13}$$

$$a(\mathbf{x}, t) = \frac{c_2^2 - 1}{2c_2\sqrt{c_1}}\sqrt{c_1 f^2(\mathbf{x}, t) + 1} - \sigma\frac{c_2^2 + 1}{2c_2\sqrt{c_1}}, \tag{14}$$

где $c_2 \neq 0$ — *произвольная постоянная, а функция* $f(\mathbf{x}, t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{|\nabla f|^2}{f(c_1 f^2 + 1)} = fF(\mathbf{x}, t, f^2). \tag{15}$$

Теорема 2. *Пусть в системе* (3) *функции* $F(\mathbf{x}, t, W)$, $G(\mathbf{x}, t, W)$ *связаны тождеством*

$$G(\mathbf{x}, t, W) \equiv \sigma F(\mathbf{x}, t, W), \tag{16}$$

где $\sigma = 1$ *или* $\sigma = -1$. *Тогда система* (3) *имеет точное решение*

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{c_3}{2} f^{1+\sigma}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2c_3} f^{1-\sigma}(\mathbf{x}, t), \tag{17}$$

$$a(\mathbf{x}, t) = \frac{c_3}{2} f^{1+\sigma}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2c_3} f^{1-\sigma}(\mathbf{x}, t), \tag{18}$$

где $c_3 \neq 0$ — *произвольная постоянная функция, а* $f(\mathbf{x}, t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{f}|\nabla f|^2 = fF(\mathbf{x}, t, f^2). \tag{19}$$

Отметим, что в справедливости теорем 1, 2 можно убедиться и непосредственной подстановкой функций (13), (14) и (17), (18) в уравнения (6), (7). Таким образом, выделены два класса правых частей системы уравнений (3), для которых точные решения выражаются формулами (13), (14) и (17), (18), причем присутствующая в них неизвестная функция $f(\mathbf{x}, t)$ определяется из уравнений (15) и (19) соответственно.

Замечание 1. Так как мы предъявили все решения ОДУ (10), формулы (12), (16) полностью охватывают все случаи выполнения связи (11) и тем самым теоремы 1 и 2 исчерпывающим образом описывают множество решений системы (6), (7) со свойством $\omega(\mathbf{x}, t) = u(f(\mathbf{x}, t))$, где $f(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнениям (15) и (19).

В. Предположим, что для компонент решения системы (6), (7) имеет место связь $f(\mathbf{x}) \equiv v(\omega(\mathbf{x}))$, где $v(\omega)$ есть некоторая дважды дифференцируемая функция скалярного аргумента ω. После подстановки $f(\mathbf{x}) \equiv v(\omega(\mathbf{x}))$ в систему (6), (7) придем к следующим формулам:

$$\Delta\omega - \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{v''(\omega) + v(\omega)}{v'(\omega)}|\nabla\omega|^2 = \frac{v(\omega)}{v'(\omega)}F(\mathbf{x}, t, v^2), \tag{20}$$

$$\Delta\omega - \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{2v'(\omega)}{v(\omega)}|\nabla\omega|^2 = G(\mathbf{x}, t, v^2). \tag{21}$$

Чтобы эта система сводилась к одному уравнению, соотношения (20) и (21) должны совпадать. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $v \stackrel{\triangle}{=} v(\omega)$ удовлетворяла ОДУ

$$vv'' - 2v'^2 + v^2 = 0, \tag{22}$$

а функции $F(\mathbf{x}, t, v^2)$ и $G(\mathbf{x}, t, v^2)$ были связаны на решениях $v(\omega)$ ОДУ (22) тождеством

$$G(\mathbf{x}, t, v^2) - \frac{v(\omega)}{v'(\omega)} F(\mathbf{x}, t, v^2) \equiv 0. \tag{23}$$

Интегрируя ОДУ (22), находим

$$v(\omega) = \frac{2e^{\omega}}{c_1 e^{2\omega} - c_2}, \tag{24}$$

где $c_1 \neq 0$, $c_2 > 0$ — произвольные постоянные. При этом из (23) следует, что связь между функциями $F(\mathbf{x}, t, v^2)$ и $G(\mathbf{x}, t, v^2)$ будет выражаться формулой

$$G(\mathbf{x}, t, v^2) + \frac{c_1 e^{2\omega} - c_2}{c_1 e^{2\omega} + c_2} F(\mathbf{x}, t, v^2) \equiv 0,$$

которую с учетом (24) можно переписать так:

$$G(\mathbf{x}, t, W) + \frac{\sigma}{\sqrt{1 + c_1 c_2 W}} F(\mathbf{x}, t, W) \equiv 0, \tag{25}$$

где $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$. Тем самым доказан следующий результат.

Теорема 3. *Пусть при некоторых постоянных $c_1 \neq 0$, $c_2 > 0$ функции $F(\mathbf{x}, t, W)$, $G(\mathbf{x}, t, W)$ в системе* (3) *связаны тождеством* (25). *Тогда система* (3) *имеет точное решение*

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{2\omega(\mathbf{x},t)} + 1}{c_1 e^{2\omega(\mathbf{x},t)} - c_2}, \tag{26}$$

$$a(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{2\omega(\mathbf{x},t)} - 1}{c_1 e^{2\omega(\mathbf{x},t)} - c_2}, \tag{27}$$

где функция $\omega(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет нелинейному уравнению в частных производных

$$\Delta\omega - \frac{\partial \omega}{\partial t} - 2\frac{c_1 e^{2\omega} + c_2}{c_1 e^{2\omega} - c_2} |\nabla\omega|^2 = G\left(\mathbf{x}, t, \frac{4e^{2\omega}}{(c_1 e^{2\omega} - c_2)^2}\right). \tag{28}$$

Замечание 2. Так как мы предъявили общее решение ОДУ (22), формула (25) полностью охватывает все случаи выполнения связи (23) и тем самым теорема 3 исчерпывающим образом описывает множество решений системы (6), (7) со свойством $f(\mathbf{x}, t) = v(\omega(\mathbf{x}, t))$, где $\omega(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению (28).

Уравнения (15), (19) и (28) будем называть *разрешающими* для исходной системы (3). В заключение данного раздела отметим, что нахождение точных решений разрешающих уравнений представляет собой непростую задачу, которая может быть решена только при дополнительных условиях. Ниже будут приведены некоторые примеры решений такого рода. Однако редукция системы (3) к разрешающим уравнениям (15), (19) и (28) может оказаться полезной и для численного построения приближенных решений, поскольку она позволяет существенно понизить размерность возникающей при дискретизации системы уравнений.

4. Редукции разрешающих уравнений к линейному уравнению теплопроводности и к полулинейным параболическим уравнениям

Одной из основных задач нашего исследования является построение нетривиальных многомерных точных решений системы уравнений (3) для различных типов нелинейностей. Будем считать эту задачу выполненной, если удастся свести разрешающие соотношения к более простым уравнениям, точные многомерные решения которых хорошо известны. Поэтому в данном разделе мы рассмотрим редукции уравнений в частных производных (15), (19) и (28) при некоторых нелинейностях $F(\mathbf{x},t,W)$ и $G(\mathbf{x},t,W)$ к линейному уравнению теплопроводности как к наиболее простому и важному представителю класса параболических уравнений. Разрешающие уравнения (15), (19) и (28), полученные в разд. 3, для удобства перепишем в виде

$$f(c_1 f^2+1)\left(\Delta f-\frac{\partial f}{\partial t}\right)+|\nabla f|^2=f^2(c_1 f^2+1)F(\mathbf{x},t,W), \tag{29}$$

$$f\left(\Delta f-\frac{\partial f}{\partial t}\right)+|\nabla f|^2=f^2F(\mathbf{x},t,W), \tag{30}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{c_1e^{2\omega}-c_2}{c_1e^{2\omega}+c_2}\left(\Delta\omega-\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)+|\nabla\omega|^2=-\frac{1}{2}\frac{c_1e^{2\omega}-c_2}{c_1e^{2\omega}+c_2}G(\mathbf{x},t,W). \tag{31}$$

Напомним, что в функции $F(\mathbf{x},t,W)$, входящей в уравнения (29), (30), аргумент W есть квадрат искомой функции, т. е. $W=f^2$. В свою очередь, в нелинейности $G(\mathbf{x},t,W)$, входящей в уравнение (31), аргумент W выражается формулой $W=\frac{4e^{2\omega}}{(c_1e^{2\omega}-c_2)^2}$.

Структура уравнений (29)–(31) имеет вид

$$P(z)\left(\Delta z-\frac{\partial z}{\partial t}\right)+|\nabla z|^2=Q(\mathbf{x},t,z),\quad z=z(\mathbf{x},t). \tag{32}$$

Подстановкой $z=S(u,t)$, $u=u(\mathbf{x},t)$ уравнение (32) приводится к виду

$$P(S)\frac{\partial S}{\partial u}\left(\Delta u-\frac{\partial u}{\partial t}\right)-P(S)\frac{\partial S}{\partial t}+\left[P(S)\frac{\partial^2 S}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)^2\right]|\nabla u|^2=Q(\mathbf{x},t,S(u,t)). \tag{33}$$

Чтобы соотношение (33) сводилось к линейному уравнению в частных производных относительно новой функции $u(\mathbf{x},t)$, прежде всего надо потребовать тождественное равенство нулю выражения, стоящего в квадратных скобках, т. е.

$$P(S)\frac{\partial^2 S}{\partial u^2}+\left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)^2\equiv 0. \tag{34}$$

Так как функция $P(S)$ заданная, проинтегрировав выражение (34), определим функциональную зависимость подстановки $S(u,t)$ от переменной u. Заметим, что (34) является ОДУ относительно искомой подстановки $S(u,t)$ как функции u, которое интегрируется в квадратурах.

Если справедливо тождество (34), то соотношение (33) сводится к линейному однородному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u \tag{35}$$

при выполнении равенства

$$P(S)\frac{\partial S}{\partial t} + Q(\mathbf{x}, t, S(u,t)) = 0. \tag{36}$$

В свою очередь, если имеет место тождество (34), то соотношение (33) сводится к линейному неоднородному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \Theta(\mathbf{x}, t) \tag{37}$$

при выполнении равенства

$$P(S)\left[\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial u}\Theta(\mathbf{x}, t)\right] + Q(\mathbf{x}, t, S(u,t)) = 0. \tag{38}$$

Кроме того, при выполнении тождества (34) соотношение (33) сводится к линейному уравнению теплопроводности с линейным источником (стоком)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \gamma u, \tag{39}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, в случае равенства

$$P(S)\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \gamma\frac{\partial S}{\partial u}u\right) + Q(\mathbf{x}, t, S(u,t)) = 0. \tag{40}$$

Заметим, что уравнение (39) заменой $u(\mathbf{x}, t) = e^{\gamma t}v(\mathbf{x}, t)$ сводится к линейному однородному уравнению (35) для новой неизвестной функции $v(\mathbf{x}, t)$. Соотношение (36) является частным случаем равенства (40) при $\gamma = 0$. Поэтому в дальнейшем при редукции к линейному однородному уравнению вместо (36) будем использовать формулу (40).

В общем случае подстановка $z = S(u, t)$, удовлетворяющая (34), сводит (33) к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \Psi(\mathbf{x}, t, u), \tag{41}$$

где функция $\Psi(\mathbf{x}, t, u)$ задается следующим образом:

$$\Psi(\mathbf{x}, t, u) = -\frac{P(S)\frac{\partial S}{\partial t} + Q(\mathbf{x}, t, S(u,t))}{P(S)\frac{\partial S}{\partial u}}. \tag{42}$$

Если известно точное решение $u = \bar{u}(\mathbf{x}, t)$ уравнения (41), то точное решение уравнения (32) находится по формуле $z(\mathbf{x}, t) = S(\bar{u}(\mathbf{x}, t), t)$.

Заметим, что во всех трех случаях (29)–(31) функция $P(z)$ такова, что соотношение (34) интегрируется в элементарных функциях, поэтому (42) выражается через элементарную комбинацию исходных нелинейностей. Это позволяет явно указывать такие условия на исходные нелинейности, выполнение которых будет приводить к уравнению (41) с известными точными решениями. В результате расширяется класс исходных систем (3), для которого можно предъявить точные решения. Ниже приведем примеры такого рода.

Так для уравнений (29)–(31) функция $P(S)$ имеет соответственно вид

$$P(S) = S(c_1S^2 + 1), \quad P(S) = S, \quad P(S) = -\frac{1}{2}\frac{c_1e^{2S} - c_2}{c_1e^{2S} + c_2}.$$

Проинтегрировав выражение (34), с учетом последних формул определим вид подстановки $z = S(u,t)$ для каждого уравнения (29)–(31):

$$S(u,t) = \frac{1}{\sqrt{c_1}}([c_1c_3(t)u + c_4(t)]^2 - 1)^{1/2}, \tag{43}$$

$$S(u,t) = [c_5(t)u + c_6(t)]^{1/2}, \tag{44}$$

$$S(u,t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{c_1c_2(c_7(t)u + c_8(t)) - \frac{1}{2}}{c_1^2(c_7(t)u + c_8(t))}\right). \tag{45}$$

Здесь c_1, c_2 — постоянные, фигурирующие в теоремах 1–3, а $c_i(t)$, $i = \overline{3,8}$, — пока произвольные функции аргумента t.

4.1. Редукция разрешающих уравнений к линейному уравнению теплопроводности. При выполнении равенства (40) и выборе любой подстановки (43)–(45) соответствующее разрешающее уравнение (29)–(31) сводится к линейному однородному уравнению теплопроводности (35). Укажем вид нелинейностей $F(\mathbf{x},t,W)$, $G(\mathbf{x},t,W)$, при которых такая редукция возможна. Для этого подставим формулы (43)–(45) в равенство (40). После несложных преобразований соответственно находим

$$F(\mathbf{x},t,W) \equiv -\frac{\sqrt{c_1W+1}}{W}[\Phi_1(t)\sqrt{c_1W+1} + \Phi_2(t)], \quad F(\mathbf{x},t,W) \equiv \frac{\Phi_3(t)}{W} - \Phi_4(t),$$

$$G(\mathbf{x},t,W) \equiv \frac{\Phi_5(t)}{1+\sigma\sqrt{c_1c_2W+1}} + \frac{4\Phi_6(t)}{W}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Phi_1(t) = \frac{c_3'(t) + \gamma c_3(t)}{c_1c_3(t)}, \quad \Phi_2(t) = \frac{c_4'(t)c_3(t) - c_3'(t)c_4(t) - \gamma c_3(t)c_4(t)}{c_1c_3(t)}, \tag{46}$$

$$\Phi_3(t) = \frac{c_5'(t)c_6(t) - c_6'(t)c_5(t) + \gamma c_5(t)c_6(t)}{2c_5(t)}, \quad \Phi_4(t) = \frac{c_5'(t) + \gamma c_5(t)}{2c_5(t)}, \tag{47}$$

$$\Phi_5(t) = \frac{c_7'(t) + \gamma c_7(t)}{c_7(t)}, \quad \Phi_6(t) = \frac{c_7'(t)c_8(t) - c_7(t)c_8'(t) + \gamma c_7(t)c_8(t)}{c_7(t)}, \tag{48}$$

где $c_i(t)$ — произвольные дифференцируемые функции аргумента t, $c_i'(t) = \frac{d}{dt}c_i(t)$, $i = \overline{3,8}$, $c_1 > 0$, c_2, γ — произвольные постоянные.

Подставляя найденные функции $F(\mathbf{x},t,W)$, $G(\mathbf{x},t,W)$ в (29)–(31), получим конкретные виды уравнений, которые сводятся к линейному однородному уравнению теплопроводности. Окончательные результаты сформулируем в виде утверждений для каждого уравнения (29)–(31) в отдельности.

Утверждение 1. *Нелинейное уравнение в частных производных*

$$f(c_1f^2+1)\left(\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t}\right) + |\nabla f|^2 = -(c_1f^2+1)^{3/2}[\Phi_1(t)\sqrt{c_1f^2+1} + \Phi_2(t)],$$

где функции $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ *определяются формулами* (46), *подстановкой*

$$f(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\sqrt{c_1}}([c_1c_3(t)e^{\gamma t}u(\mathbf{x},t) + c_4(t)]^2 - 1)^{1/2}$$

сводится к линейному однородному уравнению теплопроводности (35) *относительно функции* $u(\mathbf{x},t)$.

Утверждение 2. *Нелинейное уравнение в частных производных*

$$f\left(\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t}\right) + |\nabla f|^2 = -\Phi_4(t) f^2 + \Phi_3(t),$$

где функции $\Phi_3(t)$, $\Phi_4(t)$ *определяются формулами* (47), *подстановкой*

$$f(\mathbf{x},t) = (c_5(t)e^{\gamma t}u(\mathbf{x},t) + c_6(t))^{1/2}$$

сводится к линейному однородному уравнению теплопроводности (35) *относительно функции* $u(\mathbf{x},t)$.

Утверждение 3. *Нелинейное уравнение в частных производных*

$$-\frac{1}{2}\frac{c_1e^{2\omega} - c_2}{c_1e^{2\omega} + c_2}\left(\Delta\omega - \frac{\partial\omega}{\partial t}\right) + |\nabla\omega|^2 = -\frac{(c_1e^{2\omega} - c_2)^2 e^{-2\omega}[2c_1\Phi_6(t)(c_1e^{2\omega} - c_2) + \Phi_5(t)]}{4c_1(c_1e^{2\omega} + c_2)},$$

где функции $\Phi_5(t)$, $\Phi_6(t)$ *определяются формулами* (48), *подстановкой*

$$\omega(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\ln\frac{c_1c_2(c_7(t)e^{\gamma t}u(\mathbf{x},t) + c_8(t)) - \frac{1}{2}}{c_1^2(c_7(t)e^{\gamma t}u(\mathbf{x},t) + c_8(t))}$$

сводится к линейному однородному уравнению теплопроводности (35) *относительно функции* $u(\mathbf{x},t)$.

Используя результаты теорем 1–3 и утверждений 1–3, выпишем примеры систем (3) с соответствующими правыми частями и приведем их точные решения.

Пример 1. Система нелинейных параболических уравнений вида

$$\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\psi + \frac{\sigma a}{\sqrt{c_1(\psi^2 - a^2) + 1}}\right)F_1(\psi, a, t),$$

$$\Delta a - \frac{\partial a}{\partial t} = \left(a + \frac{\sigma\psi}{\sqrt{c_1(\psi^2 - a^2) + 1}}\right)F_1(\psi, a, t),$$

где $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$ и принято обозначение

$$F_1(\psi, a, t) = -\frac{\sqrt{c_1(\psi^2 - a^2) + 1}}{\psi^2 - a^2}[\Phi_1(t)\sqrt{c_1(\psi^2 - a^2) + 1} + \Phi_2(t)],$$

имеет точное решение

$$\psi(\mathbf{x},t) = \frac{(c_2^2 + 1)}{2c_2\sqrt{c_1}}[c_1c_3(t)e^{\gamma t}u(\mathbf{x},t) + c_4(t)] - \sigma\frac{c_2^2 - 1}{2c_2\sqrt{c_1}},$$

$$a(\mathbf{x},t) = \frac{(c_2^2 - 1)}{2c_2\sqrt{c_1}}[c_1c_3(t)e^{\gamma t}u(\mathbf{x},t) + c_4(t)] - \sigma\frac{c_2^2 + 1}{2c_2\sqrt{c_1}},$$

причем функция $u(\mathbf{x},t)$ удовлетворяет линейному однородному уравнению теплопроводности (35).

Пример 2. Система нелинейных параболических уравнений вида

$$\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t} = (\psi + \sigma a)\left[\frac{\Phi_3(t)}{(\psi^2 - a^2)} - \Phi_4(t)\right],$$

$$\Delta a - \frac{\partial a}{\partial t} = (a + \sigma\psi)\left[\frac{\Phi_3(t)}{(\psi^2 - a^2)} - \Phi_4(t)\right],$$

где $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$, имеет точное решение

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{c_3}{2}[c_5(t)e^{\gamma t}u(\mathbf{x}, t) + c_6(t)]^{\frac{1+\sigma}{2}} + \frac{1}{2c_3}[c_5(t)e^{\gamma t}u(\mathbf{x}, t) + c_6(t)]^{\frac{1-\sigma}{2}},$$

$$a(\mathbf{x}, t) = \frac{c_3}{2}[c_5(t)e^{\gamma t}u(\mathbf{x}, t) + c_6(t)]^{\frac{1+\sigma}{2}} - \frac{1}{2c_3}[c_5(t)e^{\gamma t}u(\mathbf{x}, t) + c_6(t)]^{\frac{1-\sigma}{2}},$$

причем функция $u(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет линейному однородному уравнению теплопроводности (35).

Пример 3. Система нелинейных параболических уравнений вида

$$\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t} = (a + \psi\sqrt{c_1c_2(\psi^2 - a^2) + 1})G_1(\psi, a, t),$$

$$\Delta a - \frac{\partial a}{\partial t} = (\psi + a\sqrt{c_1c_2(\psi^2 - a^2) + 1})G_1(\psi, a, t),$$

где принято обозначение

$$G_1(\psi, a, t) = \frac{\Phi_5(t)}{1 - \sqrt{c_1c_2(\psi^2 - a^2) + 1}} + \frac{4\Phi_6(t)}{\psi^2 - a^2},$$

имеет точное решение

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c_1} - 2(c_1 + c_2)[c_7(t)e^{\gamma t}u(\mathbf{x}, t) + c_8(t)],$$

$$a(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c_1} + 2(c_1 - c_2)[c_7(t)e^{\gamma t}u(\mathbf{x}, t) + c_8(t)],$$

причем функция $u(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет линейному однородному уравнению теплопроводности (35).

В свою очередь, при выполнении равенства (38) и выборе подстановки (43)–(45) соответствующее разрешающее уравнение (29)–(31) сводится к линейному неоднородному уравнению теплопроводности (37). Укажем вид нелинейностей $F(\mathbf{x}, t, W)$, $G(\mathbf{x}, t, W)$, при которых имеет место такая редукция. Для этого подставим формулы (43)–(45) в равенство (38). После несложных вычислений соответственно получим

$$F(\mathbf{x}, t, W) \equiv -\frac{\sqrt{c_1W + 1}}{W}[\Pi_1(t)\sqrt{c_1W + 1} + \Pi_2(\mathbf{x}, t)],$$

$$F(\mathbf{x}, t, W) \equiv \frac{\Pi_3(\mathbf{x}, t)}{W} - \Pi_4(t),$$

$$G(\mathbf{x}, t, W) \equiv \frac{\Pi_5(t)}{1 + \sigma\sqrt{c_1c_2W + 1}} + \frac{\Pi_6(\mathbf{x}, t)}{W}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Pi_1(t) = \frac{c_3'(t)}{c_1c_3(t)}, \quad \Pi_2(\mathbf{x}, t) = \frac{c_4'(t)c_3(t) - c_3'(t)c_4(t)}{c_1c_3(t)} + c_3(t)\Theta(\mathbf{x}, t), \tag{49}$$

$$\Pi_3(\mathbf{x}, t) = \frac{c_5'(t)c_6(t) - c_6'(t)c_5(t) - c_5^2(t)\Theta(\mathbf{x}, t)}{2c_5(t)}, \quad \Pi_4(t) = \frac{c_5'(t)}{2c_5(t)}, \tag{50}$$

$$\Pi_5(t) = \frac{c_7'(t)}{c_7(t)}, \quad \Pi_6(\mathbf{x}, t) = \frac{c_7'(t)c_8(t) - c_7(t)c_8'(t) - c_7^2(t)\Theta(\mathbf{x}, t)}{c_7(t)}, \tag{51}$$

где $c_i(t)$ — произвольные дифференцируемые функции аргумента t, $c_i'(t) = \frac{d}{dt}c_i(t)$, $i = \overline{3,8}$, $c_1 > 0$, c_2, γ — произвольные постоянные.

Подставляя найденные функции в (29)–(31), получим конкретные виды уравнений, которые сводятся к линейному неоднородному уравнению теплопроводности. Итоговые результаты сформулируем в виде утверждений для каждого уравнения (29)–(31) в отдельности.

Утверждение 4. *Нелинейное уравнение в частных производных*

$$f(c_1 f^2 + 1)\left(\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t}\right) + |\nabla f|^2 = -(c_1 f^2 + 1)^{3/2}[\Pi_1(t)\sqrt{c_1 f^2 + 1} + \Pi_2(\mathbf{x}, t)],$$

где функции $\Pi_1(t)$, $\Pi_2(\mathbf{x}, t)$ *определяются формулами* (49), *подстановкой*

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{c_1}}([c_1 c_3(t) u(\mathbf{x}, t) + c_4(t)]^2 - 1)^{1/2}$$

сводится к линейному неоднородному уравнению теплопроводности (37) *относительно функции* $u(\mathbf{x}, t)$.

Утверждение 5. *Нелинейное уравнение в частных производных*

$$f\left(\Delta f - \frac{\partial f}{\partial t}\right) + |\nabla f|^2 = \Pi_3(\mathbf{x}, t) - \Pi_4(t) f^2,$$

где функции $\Pi_3(\mathbf{x}, t)$, $\Pi_4(t)$ *определяются формулами* (50), *подстановкой*

$$f(\mathbf{x}, t) = \sqrt{c_5(t) u(\mathbf{x}, t) + c_6(t)}$$

сводится к линейному неоднородному уравнению теплопроводности (37) *относительно функции* $u(\mathbf{x}, t)$.

Утверждение 6. *Нелинейное уравнение в частных производных*

$$-\frac{1}{2}\frac{c_1 e^{2\omega} - c_2}{c_1 e^{2\omega} + c_2}\left(\Delta\omega - \frac{\partial\omega}{\partial t}\right) + |\nabla\omega|^2 = -\frac{(c_1 e^{2\omega} - c_2)^2 e^{-2\omega}[2c_1 \Pi_6(\mathbf{x}, t)(c_1 e^{2\omega} - c_2) + \Pi_5(t)]}{4c_1(c_1 e^{2\omega} + c_2)},$$

где функции $\Pi_5(t)$, $\Pi_6(\mathbf{x}, t)$ *определяются формулами* (51), *подстановкой*

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\ln\frac{c_1 c_2(c_7(t) u(\mathbf{x}, t) + c_8(t)) - \frac{1}{2}}{c_1^2(c_7(t) u(\mathbf{x}, t) + c_8(t))}$$

сводится к линейному неоднородному уравнению теплопроводности (37) *относительно функции* $u(\mathbf{x}, t)$.

Используя результаты теорем 1–3 и утверждений 4–6, выпишем примеры систем (3) с соответствующими правыми частями и приведем их точные решения.

Пример 4. Система нелинейных параболических уравнений вида

$$\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\psi + \frac{\sigma a}{\sqrt{c_1(\psi^2 - a^2) + 1}}\right) F_2(\psi, a, t),$$

$$\Delta a - \frac{\partial a}{\partial t} = \left(a + \frac{\sigma\psi}{\sqrt{c_1(\psi^2 - a^2) + 1}}\right) F_2(\psi, a, t),$$

где принято обозначение

$$F_2(\psi, a, t) = -\frac{\sqrt{c_1(\psi^2 - a^2) + 1}}{\psi^2 - a^2}\left[\Pi_1(t)\sqrt{c_1(\psi^2 - a^2) + 1} + \Pi_2(\mathbf{x}, t)\right],$$

имеет точное решение

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\left(c_2^2 + 1\right)}{2c_2\sqrt{c_1}}[c_1 c_3(t) u(\mathbf{x}, t) + c_4(t)] - \sigma\frac{c_2^2 - 1}{2c_2\sqrt{c_1}},$$

$$a(\mathbf{x}, t) = \frac{\left(c_2^2 - 1\right)}{2c_2\sqrt{c_1}}[c_1 c_3(t) u(\mathbf{x}, t) + c_4(t)] - \sigma\frac{c_2^2 + 1}{2c_2\sqrt{c_1}},$$

причем функция $u(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет линейному неоднородному уравнению теплопроводности (37).

Пример 5. Система нелинейных параболических уравнений вида

$$\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t} = (\psi + \sigma a)\left[\frac{\Pi_3(\mathbf{x}, t)}{(\psi^2 - a^2)} - \Pi_4(t)\right],$$

$$\Delta a - \frac{\partial a}{\partial t} = (a + \sigma\psi)\left[\frac{\Pi_3(\mathbf{x}, t)}{(\psi^2 - a^2)} - \Pi_4(t)\right]$$

имеет точное решение

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{c_3}{2}[c_5(t)u(\mathbf{x}, t) + c_6(t)]^{\frac{1+\sigma}{2}} + \frac{1}{2c_3}[c_5(t)u(\mathbf{x}, t) + c_6(t)]^{\frac{1-\sigma}{2}},$$

$$a(\mathbf{x}, t) = \frac{c_3}{2}[c_5(t)u(\mathbf{x}, t) + c_6(t)]^{\frac{1+\sigma}{2}} - \frac{1}{2c_3}[c_5(t)u(\mathbf{x}, t) + c_6(t)]^{\frac{1-\sigma}{2}},$$

причем функция $u(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет линейному однородному уравнению теплопроводности (35).

Пример 6. Система нелинейных параболических уравнений вида

$$\Delta\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(a + \psi\sqrt{c_1 c_2(\psi^2 - a^2) + 1}\right) G_2(\psi, a, t),$$

$$\Delta a - \frac{\partial a}{\partial t} = \left(\psi + a\sqrt{c_1 c_2(\psi^2 - a^2) + 1}\right) G_2(\psi, a, t),$$

где принято обозначение

$$G_2(\psi, a, t) = \frac{\Pi_5(t)}{1 - \sqrt{c_1 c_2(\psi^2 - a^2) + 1}} + \frac{4\Pi_6(\mathbf{x}, t)}{\psi^2 - a^2},$$

имеет точное решение

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c_1} - 2(c_1 + c_2)[c_7(t)u(\mathbf{x}, t) + c_8(t)],$$

$$a(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c_1} + 2(c_1 - c_2)[c_7(t)u(\mathbf{x}, t) + c_8(t)],$$

причем функция $u(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет линейному однородному уравнению теплопроводности (35).

4.2. Редукция разрешающих уравнений к полулинейному уравнению теплопроводности. Также представляют интерес случаи, когда разрешающие уравнения (29)–(31) сводятся не только к линейным уравнениям, но и к полулинейным параболическим уравнениям вида (41), точные многомерные решения которых хорошо известны. Подобную редукцию можно осуществить для каждого уравнения (29)–(31). Покажем это на примере уравнения (30).

Утверждение 7. *Уравнение в частных производных* (30) *функциональной заменой* (44) *сводится к полулинейному параболическому уравнению вида*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - 2\left(u + \frac{c_6(t)}{c_5(t)}\right)F(\mathbf{x}, t, \eta) - \frac{c_5'(t)}{c_5(t)}u - \frac{c_6'(t)}{c_5(t)}, \tag{52}$$

где $\eta = c_5(t)u + c_6(t)$, $c_5(t)$, $c_6(t)$ — *произвольные дифференцируемые функции аргумента* t, $c_5'(t) = \frac{d}{dt}c_5(t)$, $c_6'(t) = \frac{d}{dt}c_6(t)$.

Доказательство. Чтобы в уравнении (41) определить тип получающейся нелинейности $\Psi(\mathbf{x}, t, u)$, подставим (44) в формулу (42), в которой функция $Q(\mathbf{x}, t, S(u, t))$ для нашего уравнения имеет следующий вид:

$$Q(\mathbf{x}, t, S(u, t)) = \eta F(\mathbf{x}, t, \eta), \quad S^2(u, t) = \eta.$$

После вычисления необходимых частных производных и несложных преобразований получим

$$\Psi(\mathbf{x}, t, u) = -2\left(u + \frac{c_6(t)}{c_5(t)}\right)F(\mathbf{x}, t, \eta) - \frac{c_5'(t)}{c_5(t)}u - \frac{c_6'(t)}{c_5(t)}.$$

Подставляя это выражение в (41), приходим к уравнению (52), что и требовалось доказать. $\square$

В зависимости от выбора функций $F(\mathbf{x}, t, \eta)$ уравнение (52) будет давать различные виды, включая известные и часто встречающиеся на практике, полулинейных параболических уравнений. Так, при $c_5(t) \equiv 1$, $c_6(t) \equiv 0$, $F(\mathbf{x}, t, u) \equiv -\frac{1}{2}\ln u$ уравнение (52) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u \ln u. \tag{53}$$

Это известное полулинейное параболическое уравнение с источником логарифмического типа встречается в нестационарной теории горения. При пространственных размерностях $n = 2$ и $n = 3$ в [8, 11] изучена его групповая классификация, а в [8–10, 12, 13, 17] построены различные параметрические семейства точных инвариантных решений.

Приведем примеры новых четырехпараметрических, анизотропных по пространственным переменным, точных решений уравнения (53) для случая $n = 2$:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, t) = \exp\bigg\{ &- \frac{e^t}{2\varphi(t)}\left[\left(\theta(t) - \sqrt{c_1 - c_3^2}\right)x_1^2 + \left(\theta(t) + \sqrt{c_1 - c_3^2}\right)x_2^2\right] \\ &+ 2c_3x_1x_2 + p(t)x_1 + q(t)x_2 + \int e^t[p^2(t) + q^2(t)]\,dt \\ &+ \frac{e^t}{\sqrt{c_1}(c_1 - c_2^2)}\left[2c_1 \operatorname{artanh}\left(\frac{\theta(t)}{\sqrt{c_1}}\right) - c_2\sqrt{c_1}\ln\varphi(t) + 2c_2\sqrt{c_1}t\right] + c_4e^t\bigg\}, \end{aligned}$$

где

$$p(t) = \frac{\sqrt{c_1}[c_5\theta(t) - c_6\sqrt{c_1}]e^t}{\varphi(t)}, \quad \theta(t) = 2e^t + c_2, \quad \varphi(t) = \theta^2(t) - c_1,$$

$$q(t) = -\frac{\sqrt{c_1}\left(\sqrt{c_1 - c_3^3}[c_5\theta(t) - c_6\sqrt{c_1}] - c_6\sqrt{c_1}\theta(t) + c_1c_5\right)e^t}{c_3\varphi(t)},$$

$c_1 > 0$, c_2, $(c_1 - c_2^2 \neq 0)$, $c_3 \neq 0$ $(c_1 - c_3^2 \geq 0)$, c_4, c_5, c_6 — произвольные постоянные,

$$u_2(x_1, x_2, t) = \exp\Big\{-\frac{1-k^2}{4}x_1^2 + \frac{k\sqrt{1-k^2}}{2}x_1x_2 - \frac{k^2}{4}x_2^2 + (c_4e^t - c_5)x_1 + \left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}c_4e^t + \frac{kc_5}{\sqrt{1-k^2}}\right)x_2 + \frac{c_4^2}{k^2}e^{2t} + c_6e^t - \frac{c_5^2}{1-k^2} + \frac{1}{2}\Big\}. \quad (54)$$

Здесь $|k| < 1$, $k \neq 0$, $k \neq \pm\frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2}$, $c_i = \overline{1,6}$, — произвольные параметры. Отметим, что при

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_1 = c_2 = 0 = c_4 = c_5 = 0$$

из формулы (54) получается автомодельное решение, приведенное в [12]. Уравнение (53) имеет также трех- и двупараметрические, анизотропные по пространственным переменным, точные решения

$$u_3(x_1, x_2, t) = \exp\Big\{-\frac{1+\sqrt{3}}{16}x_1^2 - \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{8}x_1x_2 - \frac{3-\sqrt{3}}{16}x_2^2 + (s_1e^t - s_2)x_1 - \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}((1+\sqrt{3})s_1e^t + (3-\sqrt{3})s_2)x_2 + \frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}s_1^2e^{2t} + s_3e^t - \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}s_2^2 + \frac{1}{2}\Big\},$$

$$u_4(x_1, x_2, t) = \exp\Big\{-\frac{1+\sqrt{3}}{16}x_1^2 + \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{8}x_1x_2 - \frac{3-\sqrt{3}}{16}x_2^2 + (s_1e^t - s_2)x_1 - \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}((1+\sqrt{3})s_1e^t + (3-\sqrt{3})s_2)x_2 + \frac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}s_1^2e^{2t} + s_3e^t - \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}s_2^2 + \frac{1}{2}\Big\},$$

$$u_5(x_1, x_2, t) = \exp\left\{-\frac{x_2^2}{4} + s_4e^tx_1 + s_4^2e^{2t} + s_5e^t + \frac{1}{2}\right\},$$

$$u_6(x_1, x_2, t) = \exp\left\{-\frac{x_1^2}{4} + s_6e^tx_1 + s_6^2e^{2t} + s_7e^t + \frac{1}{2}\right\},$$

где s_i, $i = \overline{1,7}$, — произвольные постоянные.

Используя результаты теоремы 2 и утверждения 7, выпишем конкретный вид системы (3) с соответствующими нелинейностями и укажем для нее точные решения.

Пример 7. Система нелинейных параболических уравнений вида

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\psi + \frac{1}{2}(\psi + \sigma a)\ln|\psi^2 - a^2|,$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \Delta a + \frac{1}{2}(a + \sigma\psi)\ln|\psi^2 - a^2|$$

имеет точное решение

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{c_3}{2}u^{\frac{1+\sigma}{2}}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2c_3}u^{\frac{1-\sigma}{2}}(\mathbf{x}, t),$$

$$a(\mathbf{x}, t) = \frac{c_3}{2}u^{\frac{1+\sigma}{2}}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2c_3}u^{\frac{1-\sigma}{2}}(\mathbf{x}, t),$$

где $c_3 \neq 0$ — произвольная постоянная, $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$, а функция $u(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет полулинейному параболическому уравнению (53). В частном случае $n = 2$ система уравнений

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2}(\psi + \sigma a) \ln |\psi^2 - a^2|,$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2}(a + \sigma \psi) \ln |\psi^2 - a^2|$$

обладает точными решениями

$$\psi_i(x_1, x_2, t) = \frac{c_3}{2} u_i^{\frac{1+\sigma}{2}}(x_1, x_2, t) + \frac{1}{2c_3} u_i^{\frac{1-\sigma}{2}}(x_1, x_2, t),$$

$$a_i(x_1, x_2, t) = \frac{c_3}{2} u_i^{\frac{1+\sigma}{2}}(x_1, x_2, t) - \frac{1}{2c_3} u_i^{\frac{1-\sigma}{2}}(x_1, x_2, t),$$

где $c_3 \neq 0$ — произвольная постоянная, $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$, а функции $u_i(x_1, x_2, t)$, $i = \overline{1, 6}$, приведены выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полянин А. Д.* Точные решения нелинейных систем уравнений диффузии реагирующих сред и математической биологии // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 5. С. 606–611.
2. *Полянин А. Д., Зайцев В. Ф.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
3. *Galaktionov V. A, Svirshchevskii S. R.* Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics. Boca Raton; London; New York: Taylor & Francis Group, 2007.
4. *Пухначев В. В.* Точные решения уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Прикл. механика и техн. физика. 2009. Т. 50, № 2. С. 16–23.
5. *Полянин А. Д.* Нелинейные системы двух уравнений параболического типа. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/syspde/spde2118.pdf.
6. *Galaktionov V. A., Mitidieri E., Pohozaev S. I.* Classification of global and blow-up sign-changing solutions of a semilinear heat equation in the subcritical fujita range: Second-order diffusion // Adv. Nonlinear Stud. 2014. V. 14, N 1. P. 1–29.
7. *Rodrigo M. R., Miura R. M.* Exact and approximate traveling waves of reaction-diffusion systems via a variational approach // Anal. Appl. 2011. V. 9, N 2. P. 187–199.
8. *Дородницын В. А.* Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником или стоком. М., 1979. 31 с. (Препринт/ИПМ АН СССР; № 57).
9. *Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П.* О некоторых инвариантных решениях уравнения теплопроводности с источником. М., 1980. 24 с. (Препринт/ИПМ АН СССР; № 31).
10. *Дородницын В. А.* Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 22, № 6. С. 1393–1400.
11. *Дородницын В. А., Князева И. В., Свирщевский С. Р.* Групповые свойства уравнения теплопроводности в двумерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 7. С. 1215–1223.
12. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
13. *Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.
14. *Ben Abdallah N., Degond P., Mehats F.* Mathematical model of magnetic insulation // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. P. 1522–1534.
15. *Семенов Э. И., Синицын А. В.* Математическая модель магнитной изоляции вакуумного диода и ее точные решения // Изв. ИрГУ. Сер. Математика. 2010. № 1. С. 78–91.

16. *Косов А. А., Семенов Э. И., Синицын А. В.* Интегрируемость модели магнитной изоляции и ее точные радиально-симметричные решения // Изв. ИрГУ. Сер. Математика. 2013. Т. 6, № 1. С. 45–56.

17. *Семенов Э. И.* Существование и построение точных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 2000. 152 с.

Статья поступила 7 июля 2014 г.

Косов Александр Аркадьевич, Семёнов Эдуард Иванович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
aakosov@yandex.ru, semenov@icc.ru