Сибирский математический журнал
Июль—август, 2015. Том 56, № 4

УДК 513.88 + 517.5

О КОМПАКТНОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Е. И. Бережной

Аннотация. Благодаря новому подходу показано, что для любого идеального пространства X с непустой правильной частью оператор максимальной функции $M_{\mathbf{B}}$, построенный по любому квазиплотностному дифференциальному базису $\mathbf{B}$, не компактен, если его рассматривать в паре весовых пространств (X_w, X_v), порожденных X. Для специальных дифференциальных базисов, включающих выпуклые квазиплотностные, доказано, что $M_{\mathbf{B}}$ не компактен в паре весовых пространств (X_w, X_v), порожденных произвольным идеальным пространством X. Приведен пример квазиплотностного дифференциального базиса такого, что оператор максимальной функции, построенный по этому базису, компактен, если его рассматривать в паре (L^∞, L^∞).

DOI 10.17377/smzh.2015.56.403

Ключевые слова: максимальный оператор, идеальное банахово пространство, симметричное пространство, компактность оператора, дифференциальный базис.

При исследовании классических операторов анализа, например оператора максимальной функции Харди — Литтльвуда, очень важно выбирать те пары пространств, в которых у этих операторов имеются различные улучшающие свойства, например компактность. В [1] (см. также [2]) показано, что оператор максимальной функции $M_{\mathbf{Q}}$, порожденный кубами в $\mathbf{R}^n$, не компактен в паре пространств Лебега с весом $\left(L^p_w, L^p_v\right)$, $1 \le p < \infty$. Позднее в [3] было доказано, что оператор максимальной функции $M_{\mathbf{B}}$, построенный по квазиплотностному выпуклому дифференциальному базису $\mathbf{B}$, не компактен в паре пространств (X_w, X_v), каждое из которых есть регулярное симметричное пространство X с весом. В настоящей работе благодаря новому подходу удалось получить широкое обобщение основных результатов из [1–3]. А именно, оказалось, что для любого идеального пространства X с непустой правильной частью оператор максимальной функции $M_{\mathbf{B}}$, построенный по любому квазиплотностному дифференциальному базису $\mathbf{B}$, не компактен, если его рассматривать в паре весовых пространств (X_w, X_v), порожденных X. Для специальных дифференциальных базисов, включающих выпуклые квазиплотностные, показано, что $M_{\mathbf{B}}$ не является компактным в паре весовых пространств (X_w, X_v), порожденных произвольным идеальным пространством X. С другой стороны, приведен пример квазиплотностного дифференциального базиса $\mathbf{B}$ такого, что оператор максимальной функции $M_{\mathbf{B}}$, построенный по $\mathbf{B}$, компактен, если его рассматривать в паре (L^∞, L^∞).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00417).

Пусть Q_0 — единичный куб в $\mathbf{R}^n$ с обычной мерой Лебега. Банахово пространство X, состоящее из измеримых функций, называется *идеальным* [4, 5], если из $g \in X$, измеримости f и выполнения п. в. неравенства $|f(t)| \leq |g(t)|$ следует, что $f \in X$ и $\|f|X\| \leq \|g|X\|$. Как обычно, через $\operatorname{supp} X$ обозначим носитель идеального пространства, т. е. $\operatorname{supp} X = \bigcup\limits_{x \in X} \operatorname{supp} x$. Ниже будем считать, что $\operatorname{supp} X = Q_0$. Отсюда следует [4], что найдется $x \in X$ такая, что $x(t) > 0$ п. в. на Q_0. Такие функции называются *единицами*. Пусть $\chi(D, \cdot)$ — характеристическая функция множества D. Идеальное пространство называется *правильным*, если норма любой функции из X абсолютно непрерывна, т. е.

$$\lim_{r \to 0} \sup_{\mu(D) \leq r} \|P(D)x|X\| = 0.$$

Здесь $P(D)$ — оператор умножения на $\chi(D, \cdot)$.

Если идеальное пространство X не правильное, то из него можно выделить замкнутое подпространство $X^\diamond$, состоящее из тех $f \in X$, нормы которых абсолютно непрерывны. Умножая $f \in X^\diamond$ на различные функции, принимающие значение $+1$, -1, 0, нетрудно заметить, что из $X^\diamond \neq \{0\}$ следует $\dim X^\diamond = \infty$. Если $X^\diamond = 0$, то X содержит подпространство, изоморфное L^∞.

Для $f : Q_0 \to \mathbf{R}$ через $\lambda(f, \gamma)$ обозначим функцию распределения функции $f : \lambda(f, \gamma) = \mu(\{\tau : |f(\tau)| > \gamma\})$, а через f^* — ее перестановку в невозрастающем порядке: $f^*(\tau) = \inf\{s > 0 : \lambda(f, s) < \tau\}$. Идеальное пространство называется *симметричным* [5], если для $f, g \in X$ из выполнения при всех $\gamma \in \mathbf{R}_+$ неравенства $\lambda(f, \gamma) \leq \lambda(g, \gamma)$ следует, что $\|f|X\| \leq \|g|X\|$.

Классическими примерами симметричных пространств являются пространства Лебега L^p, Орлича L_h, Марцинкевича $M(\varphi)$, Лоренца $\Lambda(\varphi)$. Теория симметричных пространств функций подробно описана в [5, 6]. Для симметричных пространств важную роль играет фундаментальная функция, определяемая равенством $\varphi(X, t) = \{\|\chi(A, .)|X\| : \mu(A) = t\}$. Симметричное пространство называется *регулярным*, если $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(X, t) = 0$. Для регулярных пространств справедливо важное соотношение $X^\diamond \neq \{0\}$, так как $L^\infty \subseteq X^\diamond$.

Как обычно, через $S(t_0, r; X)$ обозначим шар радиуса r с центром в точке t_0 в пространстве X.

Напомним, что точка t_0 называется *точкой плотности* множества $U \subseteq Q_0$, если

$$\lim_{r \to 0} \sup_{\tau \leq r} \frac{\mu(S(t_0, \tau; \mathbf{R}^n) \cap U)}{\mu(S(t_0, \tau; \mathbf{R}^n))} = 1.$$

Пусть X — идеальное пространство. Говорят, что множество $W \subset X$ *равностепенно абсолютно непрерывно*, если

$$\lim_{\tau \to 0} \{ \sup_{\mu(D) \leq \tau} \sup_{x \in W} \|P(D)x|X\|\} = 0.$$

Замечание 1. Из идеальности пространства X следует, что $W \subset X$ равностепенно абсолютно непрерывно тогда и только тогда, когда множество $W_+ = \{x \in X_+ : \exists y_x \in W$ такой, что п. в. выполнено равенство$|y_x(t)| = x(t)\}$ равностепенно абсолютно непрерывно.

Замечание 2. Поскольку размерность любого идеального пространства X бесконечна, из теоремы Рисса вытекает, что множество $W = S(0, r; X)_+$ не является равностепенно абсолютно непрерывным.

Хорошо известен следующий факт (критерий компактности Забрейко — Красносельского).

Лемма Z–K. *Пусть X — идеальное пространство, $W \subset X$. Для того чтобы ограниченное множество W было предкомпактным, достаточно, чтобы оно было равностепенно абсолютно непрерывным. Для правильных идеальных пространств это условие и необходимо.*

Пусть X — идеальное пространство, $v \in S(\mu)$ — вес. Символом X_v будем обозначать новое идеальное пространство, норма в котором задается равенством $\|x|X_v\| = \|x \cdot v|X\|$.

Пусть заданы два банаховых пространства X, Y. Напомним, что оператор $A : X \to Y$ называется *квазилинейным*, если он положительно однороден и полуаддитивен. Для квазилинейного оператора обычным образом вводится норма $\|A : X \to Y\| = \sup\{\|Ax|Y\| : \|x|X\| \le 1\}$.

Следующая лемма, несмотря на простоту формулировки и очевидность доказательства, следующего из замечаний 1 и 2, важна при проверке компактности операторов.

Лемма 1. *Пусть X — правильное идеальное пространство, на котором заданы две эквивалентные нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, и пусть $T : X \to S(\mu)$ — квазилинейный оператор. Пусть для некоторой константы c для каждого $x \in X$ с $\|x|X\|_1 \le 1$ почти всюду выполняется неравенство $|Tx|(t) \ge c|x(t)|$.*

Тогда T не может быть компактным как оператор из $(X, \|\cdot\|_1)$ в $(X, \|\cdot\|_2)$.

Следствие 1. *Если заданы две функции $v : Q_0 \to R$, $w : Q_0 \to R$ такие, что их произведение $v(t) \cdot w(t)$ отлично от нуля на множестве положительной меры, то T не может быть компактным как оператор из X_v в X_w.*

Доказательство следствия. Действительно, положим

$$D_i = \{t \in Q_0 : i^{-1} \le \min\{|v(t)|, |w(t)|\},\ \max\{|v(t)|, |w(t)|\} \le i\}.$$

Тогда начиная с некоторого $i_0 \in N$ выполняется неравенство $\mu(D_i) > 0$ $(i \ge i_0)$. Образуем два новых правильных идеальных пространства:

$$Y_1 = \{y \in S(\mu) : y(t) = x(t) \cdot \chi(D_{i_0}, \cdot) \text{ для некоторого } x \in X\}, \quad \|y|Y_1\| = \|y|X_v\|,$$

$$Y_2 = \{y \in S(\mu) : y(t) = x(t) \cdot \chi(D_{i_0}, \cdot) \text{ для некоторого } x \in X\}, \quad \|y|Y_2\| = \|y|X_w\|.$$

В силу леммы 1 T не может быть компактным, если его рассматривать как оператор из Y_1 в Y_2 и, следовательно, не может быть компактным как оператор из X_v в X_w.

Следствие доказано.

Дифференциальным базисом $B(t)$ в точке $t \in Q_0$ называется [7, 8] семейство содержащих t ограниченных измеримых множеств положительной меры таких, что найдется по крайней мере одна последовательность $\{B_k \in B(t)\}$, удовлетворяющая условию $\operatorname{diam} B_k \to 0$. *Дифференциальным базисом в Q_0* называется объединение указанных семейств $\mathbf{B} = \{\bigcup B(t) : t \in Q_0\}$.

Верхняя и нижняя производные интеграла от локально интегрируемой функции f в точке $t \in Q_0$ относительно базиса $\mathbf{B}$ определяются с помощью равенств

$$\overline{D_{\mathbf{B}}(f,t)} = \sup\left\{ \varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{\mu(B_k)} \int\limits_{B_k} f\,d\tau : B_k \in B(t),\ \operatorname{diam} B_k \to 0 \right\},$$

$$\underline{D_{\mathbf{B}}(f,t)} = \inf\left\{ \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{\mu(B_k)} \int\limits_{B_k} f\,d\tau : B_k \in B(t),\ \operatorname{diam} B_k \to 0 \right\}.$$

Отметим, что эти операторы квазилинейны.

Говорят, что базис $\mathbf{B}$ *дифференцирует интеграл от* f, если почти всюду выполнены равенства

$$\overline{D_{\mathbf{B}}(f,t)} = \underline{D_{\mathbf{B}}(f,t)} = f(t).$$

Если $\mathbf{B}$ дифференцирует интеграл от любой функции f из пространства X, то говорят, что базис $\mathbf{B}$ *дифференцирует пространство* X. Если базис $\mathbf{B}$ дифференцирует L^∞, то он называется *плотностным.* Если базис $\mathbf{B}$ содержит подбазис, который дифференцирует L^∞, то он называется *квазиплотностным.*

Пусть $\mathbf{B}$ — дифференциальный базис. Важнейшую роль в теории дифференцирования интегралов дифференциальными базисами играют операторы максимальной функции, определяемые равенством

$$M_{\mathbf{B}}f(t) = \sup\left\{\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B |f(\tau)|\,d\tau : t \in B \in B(t)\right\},$$

$$M_{\mathbf{B},\delta}f(t) = \sup\left\{\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B |f(\tau)|\,d\tau : t \in B \in B(t);\ \operatorname{diam}(B) < \delta\right\}.$$

Следующая теорема является одним из основных результатов работы.

Теорема 1. *Пусть задан квазиплотностной дифференциальный базис* $\mathbf{B}$. *Пусть X — идеальное пространство на Q_0, для которого $X^\diamond \neq 0$. Зафиксируем $\delta > 0$. Тогда оператор максимальной функции $M_{\mathbf{B},\delta}$, порожденный дифференциальным базисом* $\mathbf{B}$, *не может быть компактным, если его рассматривать как $M_{\mathbf{B},\delta} : X \to X$.*

Более того, если заданы две функции $v : Q_0 \to R_+$, $w : Q_0 \to R_+$ такие, что $\mu\{t \in \operatorname{supp} X^\diamond : v(t)\cdot w(t) \neq 0\} > 0$, то $M_{\mathbf{B},\delta}$ не может быть компактным как оператор из X_v в X_w.

Доказательство. Достаточно рассмотреть лишь случай, когда оператор $M_{\mathbf{B},\delta}$ ограниченно действует из X в X.

Итак, пусть $X^\diamond \neq \varnothing$. Положим $D_0 = \operatorname{supp} X^\diamond$ и выберем единицу $e_0 \in X^\diamond$, т. е. $e_0(t) > 0$ п. в. на D_0. Положим $D_k = \{t \in D_0 : M_{\mathbf{B},\delta}e_0(t) \le ke_0(t)\}$. Тогда $D_k \subseteq D_{k+1}$ и из непрерывности меры следует равенство $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(D_k) = \mu(D_0)$. Выберем k_0 так, что $\mu(D_{k_0}) > \frac{1}{2}\mu(D_0)$. Зафиксируем набор дизъюнктных множеств положительной меры $\{U_i \subset D_{k_0}\}_1^\infty$, по которому построим систему функций $\left\{x_i = \frac{P(U_i)e_0}{\|P(U_i)e_0|X\|}\right\}_1^\infty$ и множество $W = \bigcup\limits_{i=1}^\infty x_i$. Поскольку e_0 — единица, все элементы x_i, а с ними и множество $W \subseteq S(0,1;X)$ определены корректно. Так как $e_0 \in X^\diamond$, то $W \subset X^\diamond$. В силу того, что множества $\{U_i\}_1^\infty$ дизъюнктны, из определения $\{x_i\}_1^\infty$ видно, что $\|x_i - x_j|X\| \ge 1$ при $i \neq j$ и, значит, W не предкомпактно.

С помощью равенства $Af(t) = P(D_{k_0})M_{\mathbf{B},\delta}f(t)$ введем новый оператор. Поскольку оператор умножения на характеристическую функцию линеен и ограничен в любом идеальном пространстве, для доказательства некомпактности оператора $M_{\mathbf{B},\delta}$ достаточно доказать некомпактность оператора A.

Из определения следует, что п. в. выполнено неравенство

$$Ax_i(t) \le \frac{k_0}{\|\chi(U_i)e_0|X\|}e_0(t),$$

поэтому $A(W) \subset X^{\diamond}$. Следовательно, для проверки компактности $A(W)$ можно применить критерий Z–K. Поскольку базис $\mathbf{B}$ квазиплотностной, для любой функции $x_i \in W$ почти всюду справедливо неравенство

$$Ax_i(t) \geq P(D_{k_0})x_i(t) = x_i(t).$$

С другой стороны, как указано выше, множество $W \subset X^{\diamond}$ не предкомпактно. Поэтому из критерия Z–K следует, что

$$\lim_{\tau \to 0} \{ \sup_{\mu(D) \leq \tau} \sup_{x \in W} \|P(D)x|X\| \} > 0.$$

Стало быть,

$$\lim_{\tau \to 0} \{ \sup_{\mu(D) \leq \tau} \sup_{x \in AW} \|P(D)x|X\| \} \geq \lim_{\tau \to 0} \{ \sup_{\mu(D) \leq \tau} \sup_{x \in W} \|P(D)x|X\| \} > 0.$$

Тем самым множество $A(W) \subset X^{\diamond}$ не является равностепенно абсолютно непрерывным, а следовательно, и множество $M_{\mathbf{B},\delta}S(0,1;X)$ не может быть предкомпактным.

Вторая часть теоремы получается применением следствия 1 леммы 1.

Теорема доказана.

Отметим, что теорема 1 содержит основной результат из [3]. Это следует из того, что, как указано выше, для регулярных симметричных пространств $X^{\diamond} \neq 0$.

Разберем случай идеального пространства X с $X^{\diamond} = \{0\}$.

Введем новую характеристику дифференциального базиса $\mathbf{B}$.

Определение. Будем говорить, что t_0 *принадлежит* $\gamma(\mathbf{B}) \subseteq Q_0$, если для каждого $r > 0$ выполняется равенство

$$\lim_{\tau \to +0} \sup_{\{t: |t - t_0| \geq r\}} \sup_{\{B \in B(t)\}} \frac{\mu(B \cap S(t_0, \tau; \mathbf{R}^n))}{\mu(B)} = 0.$$

Если множество, по которому вычисляется предел, пусто, то полагаем значение предела равным нулю.

Будем говорить, что дифференциальный базис *обладает свойством* E ($\mathbf{B} \in E$), если мера $\gamma(\mathbf{B})$ положительна.

E-условие означает, что если считать $B \setminus S(t_0, \tau; \mathbf{R}^n)$ «солнцем», а $B \cap S(t_0, \tau; \mathbf{R}^n)$ «лучом», то «лучи» тонкие.

Отметим, что классические дифференциальные базисы из квадратов и прямоугольников обладают свойством E. Простые геометрические рассмотрения показывают, что базисы, состоящие из выпуклых множеств, также обладают свойством E. Свойство E сохраняется при переходе к эквивалентному базису. С другой стороны, если дифференциальный базис содержит подбазис, не обладающий свойством E, то и исходный базис этим свойством не обладает.

Теорема 2. *Пусть задан квазиплотностной дифференциальный базис* $\mathbf{B}$, $\mathbf{B} \in E$. *Пусть для идеального пространства* X *выполняется равенство* $X^{\diamond} = \{0\}$. *Зафиксируем* $\delta > 0$. *Тогда оператор максимальной функции* $M_{\mathbf{B},\delta}$, *порожденный дифференциальным базисом* $\mathbf{B}$, *не может быть компактным, если его рассматривать как* $M_{\mathbf{B},\delta} : X \to X$.

Более того, если заданы две функции $v : Q \to R$, $w : Q \to R$ такие, что $\mu\{t \in \operatorname{supp} X : v(t) \cdot w(t) \neq 0\} > 0$, то $M_{\mathbf{B},\delta}$ не может быть компактным как оператор из X_v в X_w.

Доказательство. Снова достаточно рассмотреть лишь случай, когда оператор $M_{\mathbf{B},\delta}$ ограниченно действует из X в X. Пусть $e_0 \in X$ — единица, т. е. $e_0(t) > 0$ п. в. на Q_0. Введем множества $F_l = \{t \in Q_0 : l^{-1} \leq e_0(t) \leq l\}$, $l = 1, 2, \dots$. Тогда $F_l \subseteq F_{l+1}$ и $\lim\limits_{l\to\infty} \mu(F_l) = \mu(Q_0)$. Выберем l_0 так, что $\mu(F_{l_0} \cap \gamma(\mathbf{B})) = d > 0$. Образуем множества

$$D_0 = \{t \in F_{l_0} \cap \gamma(\mathbf{B}) : \lim_{\tau\to 0} \|e_0\chi(S(t,\tau;\mathbf{R}^n))|X\|\} > 0;$$

$$D_k = \{t \in F_{l_0} \cap \gamma(\mathbf{B}) : \lim_{\tau\to 0} \|e_0\chi(S(t,\tau;\mathbf{R}^n))|X\|\} \geq \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Из $X^\diamond = \{0\}$ следует, что $\mu(D_0) = d$. С другой стороны, $D_k \subset D_{k+1}$, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(D_k) = d$. Выберем k_0 так, что $\mu(D_{k_0}) > \frac{d}{2}$.

Без ограничения общности можно считать, что D_{k_0} состоит только из точек плотности. Для каждого $m \in N$ выберем m различных точек z_k из множества D_{k_0} и положим $d_m = \min\{|z_k - z_l| : 1 \leq k, l \leq m,\ k \neq l\}$, $r_m = \frac{d_m}{2}$. Так как z_k из множества $D_{k_0} \subset \gamma(\mathbf{B})$, для выбранного нами r_m найдется число $\tau_k > 0$ такое, что для всех $\{t : |t - z_k| \geq r_m\}$ выполняются неравенства

$$\sup\left\{\frac{\mu(B \cap S(z_k,\tau_k;\mathbf{R}^n))}{\mu(B)} : B \in B(t)\right\} \leq \frac{1}{2l_0^2 k_0 \|e_0|X\|}. \tag{1}$$

Положим $\mu_m = \min\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}$ и образуем функции $f_k(t) = P(S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0})e_0(t)$. Поскольку базис $\mathbf{B}$ квазиплотностной, справедливо неравенство $M_{\mathbf{B},\delta} f_k(t) \geq f_k(t)$. С другой стороны, $D_{k_0} \subseteq F_{l_0}$, откуда следует, что для всех $t \in Q_0$ верно соотношение $f_k(t) \leq l_0\chi(S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0}, t)$. Поэтому справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
&\|M_{\mathbf{B},\delta} f_k - M_{\mathbf{B},\delta} f_l|X\| \\
&\quad\geq \|P(S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0})M_{\mathbf{B},\delta} f_k - P(S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0})M_{\mathbf{B},\delta} f_l|X\| \\
&\quad\geq \|P(S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0}) f_k|X\| - \|P(S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0})M_{\mathbf{B},\delta} f_l|X\| \\
&\quad= \|f_k|X\| - \|P(S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0})M_{\mathbf{B},\delta} f_l|X\| \\
&\quad\geq \|f_k|X\| - l_0\|P(S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0})M_{\mathbf{B},\delta}\chi(S(z_l,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0}, .)|X\|.
\end{aligned} \tag{2}$$

Из условия

$$\operatorname{supp} P(S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0})M_{\mathbf{B},\delta}\chi(S(z_l,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0}, .) \subseteq S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n)$$

и (1) получим, что для всех $t \in S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0}$ выполняется соотношение

$$P(S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0})M_{\mathbf{B},\delta}\chi(S(z_l,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0}, .) \leq \frac{1}{2l_0^2 k_0 \|e_0|X\|}.$$

Из последнего неравенства и того факта, что $S(z_l,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0} \subseteq F_{l_0}$, следует неравенство

$$\begin{aligned}
&\|P(S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0})M_{\mathbf{B},\delta}\chi(S(z_l,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0}, .)|X\| \\
&\qquad\leq \frac{1}{2l_0^2 k_0 \|e_0|X\|}\|\chi(S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0}, .)|X\| \\
&\qquad\leq \frac{1}{2k_0 l_0 \|e_0|X\|}\|\chi(S(z_k,\mu_m;\mathbf{R}^n) \cap D_{k_0}, .)e_0|X\| \leq \frac{1}{2l_0 k_0}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Так как $z_k \in D_{k_0}$, выполняется неравенство $\|f_k|X\| \geq \frac{1}{k_0}$, из которого с учетом (2), (3) следует, что для всех $1 \leq k \neq l \leq m$ справедливы неравенства

$$\|M_{\mathbf{B},\delta} f_k(\tau_m, z_k) - M_{\mathbf{B},\delta} f_l(\tau_m, z_l)|X\| \geq \frac{1}{2k_0}.$$

Поскольку такую конструкцию можно реализовать для любого $m \in N$, оператор максимальной функции, порожденный дифференциальным базисом $\mathbf{B}$, не может быть компактным, если его рассматривать как $M_{\mathbf{B},\delta} : X \to X$.

Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть X — идеальное пространство, и пусть задан квазиплотностной дифференциальный базис $\mathbf{B}$, $\mathbf{B} \in E$. Зафиксируем $\delta > 0$. Тогда оператор максимальной функции $M_{\mathbf{B},\delta}$, порожденный дифференциальным базисом $\mathbf{B}$, не может быть компактным, если его рассматривать как $M_{\mathbf{B},\delta} : X \to X$.*

Более того, если заданы две функции $v : Q \to R$, $w : Q \to R$ такие, что $\mu\{t \in \operatorname{supp} X : v(t) \cdot w(t) \neq 0\} > 0$, то $M_{\mathbf{B},\delta}$ не может быть компактным как оператор из X_v в X_w.

Покажем, что найдется квазиплотностной дифференциальный базис $\mathbf{B}_0$, такой, что максимальный оператор $M_{\mathbf{B}}$, если его рассматривать в пространстве L^∞, компактен. Это означает, что теорема 2 носит в каком-то смысле окончательный характер.

Базис $\mathbf{B}_0$, каждый элемент которого состоит не более чем из двух квадратов, строится конструктивно, при этом используются некоторые идеи из [9–11]. Для простоты и наглядности продемонстрируем конструкцию в случае плоскости, т. е. для $\mathbf{R}^2$.

Разобьем исходный квадрат Q_0 на $m_k = 4^k$ равных квадратов $Q_{1,j}$, $j = \overline{1, m_k}$, и будем их называть *квадратами k-го уровня.* Выберем последовательность $\{l_k\}_1^\infty$ так, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{l_k}{k} = \infty. \tag{4}$$

Зафиксируем квадрат k-го уровня $Q_{k,j}$ и построим множества $U_{k,j;i}$, полагая $U_{k,j;l,i} = Q_{k,j} \cup Q_{l_k,i}$. Если внутренности квадратов $Q_{k,j}, Q_{l_k,i}$ пересекаются, то $U_{k,j;i} = Q_{k,j}$, в противном случае множество $U_{k,j;i}$ есть просто объединение двух квадратов $Q_{k,j}$ $Q_{l_k,i}$. По множествам $U_{k,j;i}$ построим дифференциальный базис, полагая, что $U_{k,j;i} \in B_0(t)$, если $t \in U_{k,j;i}$. Если взять объединение наборов $B_0(t)$ по всем $t \in Q_0$, то получим искомый базис $\mathbf{B}_0$. Этот дифференциальный базис состоит из двух подбазисов. В первый базис $\mathbf{B}_1$ входят такие множества $U_{k,j;i}$, которые состоят только из одного квадрата, а во второй базис $\mathbf{B}_2$ — такие множества $U_{k,j;i}$, каждое из которых состоит из двух квадратов.

Из построения следует, что базис $\mathbf{B}_2$ и базис $\mathbf{B}_0$, содержащий подбазис $\mathbf{B}_2$, не обладают свойством E.

Нетрудно видеть, что базис $\mathbf{B}_1$ порождает дифференциальный базис с очень хорошими свойствами, в частности, для максимального оператора $M_{\mathbf{B}_1}$ справедлива классическая оценка слабого типа: $\mu\{t : M_{\mathbf{B}_1} f(t) \geq \lambda\} \leq \frac{c}{\lambda} \int\limits_{Q_0} |f(\tau)|\, d\tau$, следовательно, $\mathbf{B}_1$ дифференцирует L^1. Дифференциальные свойства базиса $\mathbf{B}_2$, порожденного набором $\mathbf{B}_2$, гораздо хуже.

Сначала отметим два важных неравенства.

Пусть $f \in L^\infty$ с $\|f| \in L^\infty\| = a$ и $U_{k,j;i} = Q_{k,j} \cup Q_{l_k,i} \in \mathbf{B}_2$. Тогда выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|U_{k,j;i}|}\int\limits_{U_{k,j;i}} f(t)\,dt \\
&\qquad\le \frac{1}{|Q_{k,j}|(1+4^{k-l_k})}\biggl(\int\limits_{Q_{k,j}} f(t)\,dt + |Q_{l_k,i}|\frac{1}{|Q_{l_k,i}|}\int\limits_{Q_{l_k,i}} |f(t)|\,dt\biggr)\\
&\qquad\qquad\le \frac{1}{|Q_{k,j}|(1+4^{k-l_k})}\biggl(\int\limits_{Q_{k,j}} f(t)\,dt + |Q_{l_k,i}|\biggr)\\
&\qquad\qquad\qquad= \frac{1}{|Q_{k,j}|(1+4^{k-l_k})}\int\limits_{Q_{k,j}} f(t)\,dt + a\frac{4^{k-l_k}}{1+4^{k-l_k}}, \qquad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|U_{k,j;i}|}\int\limits_{U_{k,j;i}} f(t)\,dt \ge \frac{1}{|Q_{k,j}|(1+4^{k-l_k})}\biggl(\int\limits_{Q_{k,j}} f(t)\,dt - \int\limits_{Q_{l_k,i}} |f(t)|\,dt\biggr)\\
&\qquad\ge \frac{1}{|Q_{k,j}|(1+m_l/m_k)}\biggl(\int\limits_{Q_{k,j}} f(t)\,dt - |Q_{l_k,i}|\frac{1}{|Q_{l_k,i}|}\int\limits_{Q_{l_k,i}} |f(t)|\,dt\biggr)\\
&\qquad\qquad\ge \frac{1}{|Q_{k,j}|(1+4^{k-l_k})}\biggl(\int\limits_{Q_{k,j}} f(t)\,dt - |Q_{l_k,i}|\biggr)\\
&\qquad\qquad\qquad= \frac{1}{|Q_{k,j}|(1+4^{k-l_k})}\int\limits_{Q_{k,j}} f(t)\,dt - a\frac{4^{k-l_k}}{1+4^{k-l_k}}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Следующая лемма показывает, что базис $\mathbf{B}_2$ обладает очень плохими дифференциальными свойствами.

Лемма 2. *Пусть $f : S(t_0,\delta_0;\mathbf{R}^2) \to \mathbf{R}$ — измеримая функция. Для каждого $\delta \in (0,\delta_0)$ положим*

$$a(\delta) = \operatorname{ess\,sup}\{f(t) : t \in S(t_0,\delta;\mathbf{R}^2)\}, \quad b(\delta) = \operatorname{ess\,inf}\{f(t) : t \in S(t_0,\delta;\mathbf{R}^2)\}.$$

Для монотонных функций $a(\cdot) : (0,\delta_0) \to \mathbf{R}_+$, $b(\cdot) : (0,\delta_0) \to \mathbf{R}_+$ положим $a = \lim\limits_{\delta\to 0} a(\delta)$, $\lim\limits_{\delta\to 0} b(\delta) = b$. Тогда

$$\overline{D_{\mathbf{B}}(f,t_0)} = a, \quad \underline{D_{\mathbf{B}}(f,t_0)} = b. \qquad (7)$$

В частности, если выполнено неравенство $a > b$, то дифференциальный базис $\mathbf{B}_2$ не дифференцирует f в точке t_0.

Доказательство. Разберем случай $a < \infty$, для $a = \infty$ рассуждения аналогичны. Зафиксируем $\delta \in (0,\delta_0)$ и $q \in (0,1)$. Положим $A(\delta) = \{t \in S(t_0,\delta;\mathbf{R}^2) : f(t) \ge (1-q)a(\delta)\}$, $B(\delta) = \{t \in S(t_0,\delta;\mathbf{R}^2) : f(t) \le (1+q)b(\delta)\}$. Выберем в множестве $A(\delta)$ точку плотности $t_a(\delta)$ и в множестве $B(\delta)$ — точку плотности $t_b(\delta)$. Без ограничения общности можно считать, что $t_a(\delta) \ne t_0$ и $t_b(\delta) \ne t_0$ и каждая из этих точек не лежит на границах квадратов, из которых построен базис.

Так как $t_a(\delta)$ — точка плотности $A(\delta)$, можно выбрать содержащий эту точку квадрат $Q_{k,j} \subset S(t_0, \delta; \mathbf{R}^2)$ так, что $t_0 \notin Q_{k,j}$ и выполняется неравенство

$$\frac{1}{|Q_{k,j}|} \int\limits_{Q_{k,j}} f(t)\,dt \geq (1-2q)a(\delta).$$

Выберем содержащий точку t_0 квадрат $Q_{l_k,i} \subset S(t_0, \delta; \mathbf{R}^2)$ так, что $Q_{k,j} \cap Q_{l_k,i} = \varnothing$. Тогда из (8), (9) получим

$$\frac{1}{|U_{k,j;i}|} \int\limits_{U_{k,j;i}} f(t)\,dt \geq \frac{1}{|Q_{k,j}|(1+4^{k-l_k})} \Bigg(\int\limits_{Q_{k,j}} f(t)\,dt - \int\limits_{Q_{l_k,i}} |f(t)|\,dt \Bigg)$$
$$\geq a(\delta) \left\{ \frac{1}{1+4^{k-l_k}}(1-2q) - \frac{4^{k-l_k}}{1+4^{k-l_k}} \right\},$$

что согласно (4) доказывает первое равенство в (7).

Аналогично доказывается второе равенство в (7).

Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что даже характеристические функции не всегда дифференцируются базисом $\mathbf{B}_2$.

В частности, для того чтобы базис $\mathbf{B}_2$ дифференцировал характеристическую функцию открытого множества U, необходимо и достаточно, чтобы граница U имела меру нуль.

Продемонстрируем, что оператор максимальной функции, построенный по дифференциальному базису, может быть компактным.

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{B}_0$ — квазиплотностной дифференциальный базис, построенный выше. Тогда оператор максимальной функции, порожденный дифференциальным базисом $\mathbf{B}_0$, компактен, если его рассматривать как $M_{\mathbf{B}_0} : L^\infty \to L^\infty$. Более того, для каждой $f \in L^\infty$ справедливо равенство $M_{\mathbf{B}_0} f(\cdot) = \|f|L^\infty\|$.*

Доказательство. Покажем, что для максимального оператора $M_{\mathbf{B}_0}$ верно равенство $M_{\mathbf{B}_0} f(t) = \operatorname{ess\,sup} |f(\tau)|$.

Пусть $f \in L^\infty$ с $\|f| \in L^\infty\| = 1$. Зафиксируем $q \in (0,1)$ и положим $U(q) = \{t \in Q_0 : |f(t)| \geq (1-q)\}$. Тогда $\mu(U(q)) > 0$. Выберем точку плотности $t_0 \in U(q)$ так, чтобы эта точка не принадлежала границе ни одного из квадратов, участвующих в конструкции базиса $\mathbf{B}_0$.

Пусть куб $Q_{k,j}$ содержит t_0. Тогда из (7) для $U_{k,j;i} = Q_{k,j} \cup Q_{l_k,i} \in \mathbf{B}_2(t)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{|U_{k,j;i}|} \int\limits_{U_{k,j;i}} |f(t)|\,dt \geq \frac{1}{|Q_{k,j}|(1+4^{k-l_k})} \Bigg(\int\limits_{Q_{k,j}} |f(t)|\,dt - \frac{4^{k-l_k}}{1+4^{k-l_k}} \Bigg).$$

Из того, что t_0 — точка плотности $U(q)$, получим

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{1}{|U_{k,j;i}|} \int\limits_{U_{k,j;i}} |f(t)|\,dt \geq (1-q). \tag{8}$$

Поскольку $\bigcup\limits_{i=1}^{4^{l_k}} U_{k,j;i} = Q_0$, из (8) следует, что для каждой точки $t \in Q_0$, не принадлежащей границе ни одного из квадратов, участвующих в конструкции базиса $\mathbf{B}_0$, выполняются неравенства

$$1 \geq M_{\mathbf{B}_0} f(t) \geq (1-q).$$

Так как q можно выбрать сколь угодно малым, для всех точек $t \in Q_0$, за исключением границ квадратов, участвующих в конструкции базиса $\mathbf{B}_0$, выполняется равенство

$$M_{\mathbf{B}_0} f(t) = 1.$$

Поэтому образ единичного шара пространства под действием оператора $M_{\mathbf{B}_0}$ одномерен и, значит, $M_{\mathbf{B}_0}$, если его рассматривать как $M_{\mathbf{B}_0} : L^\infty \to L^\infty$, компактен.

Теорема доказана.

Предложенную выше схему можно использовать для других классических операторов, например, для дробной максимальной функции, операторов риссовых и бесселевых потенциалов и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Edmunds D. E., Meskhi A.* On a measure of non-compactness for maximal operators // Math. Nachr. 2003. V. 254–255, N 6. P. 97–106.

2. *Meskhi A.* Measure of non-compactness for integral operators in weighted Lebesgue spaces. New York: Nova Sci. Publ., Inc., 2009.

3. *Oniani G. G.* On the non-compactness of maximal operators // Real Anal. Exch. 2002/2003. V. 28, N 2. P. 139–146.

4. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

5. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1977.

6. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. I, II. Berlin: Springer, 1979.

7. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.

8. *de Guzman M.* Real variable methods in Fourier analysis. Amsterdam: Elsevier Sci., 1981. (North-Holland Math. Stud.; V. 46).

9. *Бережной Е. И.* О дифференцировании интегралов от функций из симметричных пространств дифференциальными базисами // Anal. Math. 1996. V. 22. P. 267–288.

10. *Бережной Е. И., Перфильев А. А.* Различение симметричных пространств и L^∞ с помощью дифференциального базиса // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 4. С. 515–523.

11. *Бережной Е. И., Новиков А. В.* О проблеме окаймления из теории дифференцирования интегралов // Изв. АН. Сер. Мат. 2002. Т. 66, № 4. С. 3–26.

Статья поступила 8 сентября 2014 г.

Бережной Евгений Иванович
Ярославский гос. университет им. П. Г. Демидова,
ул. Советская, 14, Ярославль 150000
ber@uniyar.ac.ru