*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2015. Том 56, № 3*

*УДК 512.54*

# О КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ С АВТОМОРФИЗМАМИ НЕКОПРОСТОГО ПОРЯДКА ПОЧТИ БЕЗ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

**Е. И. Хухро**

**Аннотация.** Доказывается, что если конечная $p$-разрешимая группа $G$ допускает автоморфизм $\varphi$ порядка $p^n$, имеющий не более $m$ неподвижных точек на каждой $\varphi$-инвариантной элементарной абелевой $p'$-секции группы $G$, то $p$-длина группы $G$ ограничена сверху в терминах $p^n$ и $m$; если вдобавок группа $G$ разрешима, то высота Фиттинга группы $G$ ограничена сверху в терминах $p^n$ и $m$. Доказывается также, что если конечная разрешимая группа $G$ допускает автоморфизм $\psi$ порядка $p^a q^b$ для некоторых простых чисел $p, q$, то высота Фиттинга группы $G$ ограничена сверху в терминах $|\psi|$ и $|C_G(\psi)|$.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

**Ключевые слова:** конечная разрешимая группа, автоморфизм, $p$-длина, высота Фиттинга.

*Юрию Леонидовичу Ершову по случаю его 75-летия*

## 1. Введение

Изучение групп с автоморфизмами «почти без неподвижных точек» означает получение ограничений на строение групп в зависимости от их автоморфизмов и определенных ограничений, налагаемых на подгруппы неподвижных точек. В данной работе мы рассматриваем вопросы ограничения $p$-длины и высоты Фиттинга конечных $p$-разрешимых и разрешимых групп, допускающих автоморфизмы некопростого порядка почти без неподвижных точек.

Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut} G$ — автоморфизм конечной группы $G$. Изучение строения группы $G$ в зависимости от $\varphi$ и подгруппы неподвижных точек $C_G(\varphi)$ является одним из наиболее важных и плодотворных путей в теории конечных групп. Прославленные теорема Брауэра — Фаулера [1] (ограничивающая индекс разрешимого радикала в терминах порядка $|C_G(\varphi)|$ в случае $|\varphi| = 2$) и теорема Томпсона [2] (дающая нильпотентность группы $G$, когда $\varphi$ имеет простой порядок и действует без неподвижных точек, т. е. $C_G(\varphi) = 1$) лежат в основаниях классификации конечных простых групп. Классификация использовалась для получения дальнейших результатов о разрешимости группы $G$ или подходящей «большой» подгруппы. Например, используя классификацию, Хартли [3] обобщил теорему Брауэра — Фаулера на любой порядок автоморфизма $\varphi$: группа

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14–21–00065).

$G$ обладает разрешимой подгруппой индекса, ограниченного в терминах $|\varphi|$ и $|C_G(\varphi)|$.

Теперь предположим, что группа $G$ разрешима. Дальнейшая информация о строении группы $G$ ищется прежде всего в виде ограничений на высоту Фиттинга (нильпотентную длину). Ограничение высоты Фиттинга естественно сводит дальнейшие исследования к случаю нильпотентных групп с автоморфизмами (почти) без неподвижных точек, для которых, в свою очередь, возникают задачи ограничения ступени разрешимости или нильпотентности группы, или подходящей «большой» подгруппы. Такие ограничения для нильпотентных групп пока получены в случаях, когда $\varphi$ простого порядка или порядка 4, в [4–9]. Кроме того, общие результаты решающего значения получены в изучении $p$-автоморфизмов, действующих почти без неподвижных точек на конечных $p$-группах [10–15].

Особенно сильные результаты по ограничению высоты Фиттинга получены в случае разрешимых групп автоморфизмов $A \leq \operatorname{Aut} G$ копростого порядка. Томпсон [16] доказал, что если обе группы $G$ и $A$ разрешимы и имеют копростые порядки, то высота Фиттинга группы $G$ ограничена в терминах высоты Фиттинга подгруппы $C_G(A)$ и числа $\alpha(A)$ простых сомножителей в $|A|$ с учетом кратностей. Позднее оценки в теореме Томпсона улучшались в многочисленных работах и окончательные результаты были получены Туруллом [17] и Хартли и Айзексом [18].

Случай некопростых порядков групп $G$ и $A \leq \operatorname{Aut} G$ более трудный. Белл и Хартли [19] построили примеры, показывающие, что для любой ненильпотентной конечной группы $A$ имеются разрешимые группы $G$ произвольной высоты Фиттинга, допускающие $A$ в качестве группы автоморфизмов без неподвижных точек. Но если $A$ нильпотентна и $C_G(A) = 1$, то высота Фиттинга группы $G$ ограничена в терминах $\alpha(A)$ в силу частного случая теоремы Дэйда [20]. В ситуации почти без неподвижных точек даже для циклической группы автоморфизмов $\langle\varphi\rangle \leq \operatorname{Aut} G$ все еще открыта задача: получить ограничение для высоты Фиттинга конечной разрешимой группы $G$ в терминах $|\varphi|$ и $|C_G(\varphi)|$ (этот вопрос эквивалентен записанному Беляевым в «Коуровской тетради» [21] как задача Хартли 13.8(a)). Кроме случая без неподвижных точек теоремы Дэйда пока единственные случаи, где известно положительное решение, — это случай автоморфизмов примарного порядка $p^n$ (Хартли и Турау [22]) и случай бипримарного порядка $p^a q^b$ (обсуждаемый в настоящей работе).

Другим обобщением автоморфизмов без неподвижных точек в некопростом случае является задача Томпсона об ограничении $p$-длины конечной $p$-разрешимой группы $G$, допускающей $p$-группу автоморфизмов $P$, действующую без неподвижных точек на каждой $P$-инвариантной $p'$-секции группы $G$. Раэ [23] и Хартли и Раэ [24] положительно решили эту задачу для $p \neq 2$, а также для циклической группы $P$ при любом $p$. Частным случаем этой задачи является случай, когда $p$-разрешимая группа $G$ допускает так называемый $p^n$-расщепляющий автоморфизм $\varphi$, что означает, что $xx^{\varphi}x^{\varphi^2}\cdots x^{\varphi^{p^n-1}} = 1$ для всех $x \in G$ (отсюда также следует $\varphi^{p^n} = 1$); тогда, конечно, $\varphi$ автоматически действует без неподвижных точек на $\varphi$-инвариантных $p'$-секциях. Этот случай рассматривался на самом деле ранее Курцвайлем [25], который получил оценки высоты Фиттинга разрешимой группы $G$, и эти оценки были улучшены до линейных Майкснером [26]. Если известно только, что $\varphi$ индуцирует $p^n$-расщепляющий автоморфизм на $\varphi$-инвариантной силовской $p$-подгруппе группы $G$, то уже получается ограничение в терминах $n$ на $p$-длину группы $G$: при $p \neq 2$ такое ограничение было получено Уилсоном [27], а для всех простых чисел $p$ в работе [28] — даже при более слабом условии.

В данной работе рассматриваем естественное обобщение задачи Томпсона для $p$-разрешимой группы $G$, допускающей автоморфизм $\varphi$ порядка $p^n$, в котором условие, что $\varphi$ действует без неподвижных точек на $\varphi$-инвариантных $p'$-секциях, заменяется тем, что $\varphi$ действует почти без неподвижных точек на этих секциях. На самом деле достаточно налагать ограничение на число неподвижных точек автоморфизма $\varphi$ только на элементарные абелевы $\varphi$-инвариантные $p'$-секции.

**Теорема 1.1.** *Если конечная $p$-разрешимая группа $G$ допускает автоморфизм $\varphi$ порядка $p^n$, имеющий не более $m$ неподвижных точек на каждой $\varphi$-инвариантной элементарной абелевой $p'$-секции группы $G$, то $p$-длина группы $G$ ограничена сверху в терминах $p^n$ и $m$.*

Было бы интересно получить оценку $p$-длины в терминах $n$ (или хотя бы в терминах $p^n$) для некоторой подгруппы индекса, ограниченного в терминах $p^n$ и $m$.

Замечание 1.2. Имеется определенная аналогия с описанной выше ситуацией для $p^n$-расщепляющего автоморфизма. А именно, если для $p$-разрешимой группы $G$ с автоморфизмом $\varphi$ порядка $p^n$ вместо ограничения на число неподвижных точек на $p'$-секциях имеется ограничение $|C_P(\varphi)| = p^m$ на число неподвижных точек автоморфизма $\varphi$ в $\varphi$-инвариантной силовской $p$-подгруппе $P$, то также получаем оценку $p$-длины группы $G$. В самом деле, тогда ступень разрешимости группы $P$ ограничена в терминах $p$, $n$ и $m$ по теореме Шалева [12], так что оценка на $p$-длину немедленно вытекает из теорем Холла — Хигмэна [29] при $p \neq 2$ и теорем Хоаре [30], Бергера и Гросса [31] и Е. Г. Брюхановой [32]. Более того, в силу [13] группа $P$ даже обладает (нормальной) подгруппой индекса, ограниченного в терминах $p$, $n$ и $m$, которая разрешима $p^n$-ограниченной ступени. Поэтому по теореме Холла — Хигмэна — Хартли 2.3 (см. ниже) имеется характеристическая подгруппа $H$ группы $G$ такая, что $p$-длина $H$ $p^n$-ограничена, а силовская $p$-подгруппа фактор-группы $G/H$ имеет порядок, ограниченный в терминах $p$, $n$ и $m$.

Для разрешимых групп теорема 1.1 в сочетании с известными результатами дает оценку высоты Фиттинга.

**Следствие 1.3.** *Если конечная разрешимая группа $G$ допускает автоморфизм $\varphi$ порядка $p^n$, имеющий не более $m$ неподвижных точек на каждой $\varphi$-инвариантной $p'$-секции группы $G$, то высота Фиттинга группы $G$ ограничена сверху в терминах $p^n$ и $m$.*

Техника, используемая в доказательстве теоремы 1.1, применяется также в доказательстве разрешимого случая следующей теоремы об автоморфизме бипримарного порядка почти без неподвижных точек; сведение же к разрешимому случаю дает теорема Хартли [3] (основанная на классификации конечных простых групп).

**Теорема 1.4.** *Если конечная группа $G$ допускает автоморфизм $\varphi$ порядка $p^a q^b$ для каких-то простых чисел $p, q$ и неотрицательных целых $a, b$, то она обладает разрешимой подгруппой, у которой индекс и высота Фиттинга ограничены сверху в терминах $p^a q^b$ и $|C_G(\varphi)|$.*

Стандартные рассуждения об обратном пределе дают следствие для локально конечных групп.

**Следствие 1.5.** *Если локально конечная группа $G$ содержит элемент $g$ порядка $p^a q^b$ для каких-то простых чисел $p, q$ и неотрицательных целых $a, b$ с конечным централизатором $C_G(g)$, то $G$ обладает подгруппой конечного индекса, у которой есть конечный нормальный ряд с локально нильпотентными факторами.*

Еще одно следствие более технического характера, но оно может быть полезным в дальнейших исследованиях.

**Следствие 1.6.** *Если конечная группа $G$ допускает автоморфизм $\varphi$, для которого имеется не более двух общих простых делителей чисел $|\varphi|$ и $|G|$, то группа $G$ обладает разрешимой подгруппой, у которой индекс и высота Фиттинга ограничены сверху в терминах $|\varphi|$ и $|C_G(\varphi)|$.*

Замечание 1.7. После того, как данная статья была подготовлена к публикации, автору стала известна неопубликованная рукопись Брайана Хартли, которая содержит результат теоремы 1.4; автор вместе с А. Боровиком и П. Шумяцким опубликовал эту рукопись как [33] на веб-сайте университета Манчестера.

## 2. Предварительные сведения

Индуцированные автоморфизмы инвариантных секций обозначаются теми же буквами. Следующая лемма хорошо известна.

**Лемма 2.1.** *Если $\varphi$ — автоморфизм конечной группы $G$, а $N$ — нормальная $\varphi$-инвариантная подгруппа, то $|C_{G/N}(\varphi)| \leq |C_G(\varphi)|$.*

Следующая лемма является также хорошо известным следствием рассмотрения жордановой формы линейного преобразования порядка $p^k$ в характеристике $p$.

**Лемма 2.2.** *Если элементарная абелева $p$-группа $P$ допускает автоморфизм $\varphi$ порядка $p^k$ такой, что $|C_P(\varphi)| = p^m$, то ранг группы $P$ ограничен в терминах $p^k$ и $m$.*

Мы используем следующее следствие теорем типа Холла — Хигмэна из работы Хартли [34].

**Теорема 2.3** (Холл, Хигмэн, Хартли). *Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа $p$-разрешимой группы $G$. Если $R$ — нормальная подгруппа группы $P$ и ступень разрешимости группы $R$ равна $d$, то $R \leq O_{p',p,p',\dots,p',p}(G)$, где $p$ встречается в правой части $d$ раз, если $p > 3$, $2d$ раз, если $p = 3$, и $3d$ раз, если $p = 2$.*

Доказательство. Уточняя некоторые теоремы Холла — Хигмэна [29], Хартли [34] доказал, что если $A$ — абелева нормальная подгруппа силовской $p$-подгруппы из $G$, то

$$A \leq O_{p',p}(G), \text{ если } p > 3, \quad A \leq O_{3',3,3',3}(G), \text{ если } p = 3,$$

$$A \leq O_{2',2,2',2,2'2}(G), \text{ если } p = 2.$$

Результат следует из этих включений для $A = R^{(d-1)}$ несложной индукцией по ступени разрешимости $d$. $\square$

Теперь напомним некоторые определения и обозначения из теории представлений. Если $V$ — $kG$-модуль для поля $k$ и группы $G$, используем правую операторную запись $vg$ для $v \in V$ и $g \in G$. Мы используем централизаторные обозначения для неподвижных точек типа $C_V(g) = \{v \in V \mid vg = v\}$. Также используем коммутаторные обозначения $[v, g] = -v + vg$ для $v \in V$ и $g \in G$. Коммутаторные подпространства определяются соответственно: если $B \leq G$, то $[V, B]$ натянуто на все коммутаторы $[v, b]$, где $v \in V$ и $b \in B$. Подпространство $[V, B]$ совпадает со взаимным коммутантом $[V, B]$ в естественном полупрямом произведении $VG$, когда $V$ рассматривается как аддитивная группа, на которой действует $G$. В частности, $[V, B]$ является $B$-инвариантным и потому может рассматриваться как $kB$-подмодуль.

Для группы $G$ и поля $k$ свободный $kG$-модуль ранга $n$ — это прямая сумма $n$ копий групповой алгебры $kG$, каждая из которых рассматривается как векторное пространство над $k$ размерности $|G|$ с базисом $\{b_g \mid g \in G\}$, помеченным элементами группы $G$, на котором $G$ действует в регулярном подстановочном представлении: $b_g h = b_{gh}$. Другими словами, свободный $kG$-модуль $V = \bigoplus\limits_{g\in G} V_g$ — это прямая сумма подпространств, регулярно переставляемых группой $G$ так, что $V_g h = V_{gh}$.

Следующая лемма известна в литературе (см., например, [22, лемма 4.5]), но мы приводим ее доказательство для полноты изложения.

**Лемма 2.4.** *Предположим, что на абелевой $p$-группе $M$ действует циклическая группа $\langle\varphi\rangle$ порядка $p^n$ и $V$ — $kM\langle\varphi\rangle$-модуль для поля $k$ характеристики $q$, отличной от $p$. Если подгруппа $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ действует нетривиально на $V$, то подпространство $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ является свободным $k\langle\varphi\rangle$-модулем.*

Здесь, конечно, $\varphi^{p^{n-1}} = \varphi$, если $n = 1$.

Доказательство. Ясно, что подпространство $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ $M\langle\varphi\rangle$-инвариантно, так что оно является $kM\langle\varphi\rangle$-модулем. Расширим основное поле до его алгебраического замыкания $\bar{k}$ и обозначим через $W = V \otimes_k \bar{k}$ получившийся $\bar{k}M\langle\varphi\rangle$-модуль. Тогда $[W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ есть $\bar{k}M\langle\varphi\rangle$-модуль, полученный из $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ расширением поля.

Так как характеристика $q$ основного поля взаимно проста с $|M\langle\varphi\rangle|$, по теореме Машке
$$W = C_W([M, \varphi^{p^{n-1}}]) \oplus [W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$$
является вполне приводимым $\bar{k}M\langle\varphi\rangle$-модулем. Пусть $U$ — неприводимый $\bar{k}M\langle\varphi\rangle$-подмодуль модуля $[W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$, на котором $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ действует нетривиально.

По теореме Клиффорда $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ разлагается на однородные $\bar{k}M$-подмодули $U_i$ (компоненты Веддерберна). Группа $\langle\varphi\rangle$ транзитивно переставляет подмодули $U_i$. Если ядро этого подстановочного действия было бы нетривиально, то $\varphi^{p^{n-1}}$ стабилизировал бы все $U_i$. Но абелева группа $M$ действует скалярными преобразованиями на каждой однородной компоненте $U_i$. Отсюда следует, что группа $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ действовала бы тривиально на каждой $U_i$ и потому на $U$ вопреки нашему предположению. Итак, $U$ — свободный $\bar{k}\langle\varphi\rangle$-модуль.

Поскольку $[W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ — прямая сумма таких $U$, то $[W, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ также является свободным $\bar{k}\langle\varphi\rangle$-модулем. Тогда $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ — свободный $k\langle\varphi\rangle$-модуль. Действительно, по теореме Дойринга — Нётер [35, теорема 29.7] два представления над меньшим полем эквивалентны, если они эквивалентны над бо̀льшим полем. Быть свободным $\bar{k}\langle\varphi\rangle$-модулем или свободным $k\langle\varphi\rangle$-модулем означает иметь базис как векторного пространства над соответствующим полем, элементы которого переставляются преобразованием $\varphi$ так, что все орбиты регулярны. В таком базисе $\langle\varphi\rangle$ представляется соответствующими подстановочными матрицами, которые все определены над $k$. $\square$

## 3. Автоморфизм порядка $p^n$

Сначала отдельно сформулируем следующее предложение, которое будет также использовано в § 4 в иной ситуации.

**Предложение 3.1.** *Предположим, что циклическая группа $\langle\varphi\rangle$ порядка $p^n$ действует автоморфизмами на конечной $p$-группе $P$ и $V$ — точный $\mathbb{F}_qP\langle\varphi\rangle$-модуль, где $\mathbb{F}_q$ — простое поле порядка $q \neq p$. Тогда ступень разрешимости группы $[P, \varphi^{p^{n-1}}]$ ограничена в терминах $|C_V(\varphi)|$ и $p^n$.*

Доказательство. Пусть $M$ — максимальная абелева нормальная подгруппа полупрямого произведения $P\langle\varphi\rangle$. Если $[M, \varphi^{p^{n-1}}] \neq 1$, то по лемме 2.4 $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ является свободным $\mathbb{F}_q\langle\varphi\rangle$-модулем. Очевидно, что в свободном $\mathbb{F}_q\langle\varphi\rangle$-модуле неподвижные точки преобразования $\varphi$ — это в точности «диагональные» элементы. Отсюда следует, что порядок $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$ равен

$$|C_{[V,[M,\varphi^{p^{n-1}}]]}(\varphi)|^{|\varphi|} = |C_{[V,[M,\varphi^{p^{n-1}}]]}(\varphi)|^{p^n}$$

и потому ограничен в терминах $|C_V(\varphi)|$ и $p^n$. Группа $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ точно действует на $V$, поэтому по теореме Машке она также действует точно на $[V, [M, \varphi^{p^{n-1}}]]$. Значит, порядок $[M, \varphi^{p^{n-1}}]$ ограничен в терминах $|C_V(\varphi)|$ и $p^n$. Это, конечно, верно, если $[M, \varphi^{p^{n-1}}] = 1$.

Отсюда следует, что индекс $|M : C_M(\varphi^{p^{n-1}})|$ ограничен в терминах $|C_V(\varphi)|$ и $p^n$, так как этот индекс равен числу различных коммутаторов $[m, \varphi^{p^{n-1}}]$ при $m \in M$.

Рассмотрим центральный ряд группы $P\langle\varphi\rangle$, соединяющий 1 и $M$. Так как $|M : C_M(\varphi^{p^{n-1}})|$ ограничен в терминах $|C_V(\varphi)|$ и $p^n$, количество факторов этого ряда, не накрываемых подгруппой $C_M(\varphi^{p^{n-1}})$, ограничено в терминах $|C_V(\varphi)|$ и $p^n$. Поэтому имеется нормальный ряд ограниченной длины, соединяющий 1 и $M$, каждый фактор которого либо централен в $P\langle\varphi\rangle$, либо накрывается подгруппой $C_M(\varphi^{p^{n-1}})$. Очевидно, что тогда $\varphi^{p^{n-1}}$ действует тривиально на каждом факторе этого ряда, а значит, $[P, \varphi^{p^{n-1}}]$ также действует тривиально на этих факторах. По теореме Калужнина группа автоморфизмов, индуцированная действием $[P, \varphi^{p^{a-1}}]$ на $M$, нильпотентна ограниченной ступени. Поскольку $M$ содержит свой централизатор в $P\langle\varphi\rangle$, получаем, что $[P, \varphi^{p^{n-1}}]$ разрешима ограниченной ступени, так как по доказанному $\gamma_s([P, \varphi^{p^{n-1}}]) \leq M \cap [P, \varphi^{p^{n-1}}]$ для некоторого числа $s$, ограниченного в терминах $|C_V(\varphi)|$ и $p^n$. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Напомним, что $G$ — конечная $p$-разрешимая группа, допускающая автоморфизм $\varphi$ порядка $p^n$, имеющий не более $m$ неподвижных точек в каждой $\varphi$-инвариантной элементарной абелевой $p'$-секции группы $G$. Нужно ограничить $p$-длину группы $G$ в терминах $p^n$ и $m$. Всюду далее в этом параграфе, говоря для краткости, что некоторый параметр просто «ограничен», будем иметь в виду, что этот параметр ограничен сверху в терминах $p^n$ и $m$.

Воспользуемся индукцией по $n$. Удобно рассмотреть случай $n = 0$ в качестве базы индукции, когда $|\varphi| = p^0 = 1$, т. е. $\varphi$ действует тривиально на $G$. Тогда условие означает, что каждая элементарная абелева $p'$-секция группы $G$ имеет ограниченный порядок. Покажем, что ступень нильпотентности силовской $p$-подгруппы $P$ группы $\widehat{G} = G/O_p(G)$ ограничена. Действительно, так как порядок $P$ взаимно прост с $|O_{p'}(\widehat{G})|$, для каждого простого числа $q$, делящего $|O_{p'}(\widehat{G})|$, найдется $P$-инвариантная силовская $q$-подгруппа $Q$ группы $O_{p'}(\widehat{G})$. Фактор-группа $P/C_P(Q)$ действует точно на фактор-группе по подгруппе Фраттини $Q/\Phi(Q)$, порядок которой не выше $m$ по предположению. Отсюда следует, что $P/C_P(Q)$ имеет ограниченный порядок, а потому и ограниченную ступень нильпотентности. Так как $P$ действует точно на $O_{p'}(\widehat{G})$, имеем $\bigcap C_P(Q_i) = 1$, где $Q_i$ пробегают все $P$-инвариантные силовские подгруппы группы $O_{p'}(\widehat{G})$. Значит, $P$ является подпрямым произведением групп ограниченной ступени нильпотентности и потому сама имеет ограниченную ступень нильпотентности. Теперь получаем, что $p$-длина группы $\widehat{G} = G/O_p(G)$ ограничена по теореме Холла — Хигмэна [29]. В результате $p$-длина группы $G$ ограничена.

Далее предполагаем, что $n \geq 1$.

Положим $\widehat{G} = G/O_p(G)$. Рассмотрим силовскую $p$-подгруппу полупрямого произведения $\widehat{G}\langle\varphi\rangle$, содержащую $\langle\varphi\rangle$, и пусть $P$ — ее пересечение с $\widehat{G}$, так что $P$ — $\varphi$-инвариантная силовская $p$-подгруппа группы $\widehat{G}$. Так как порядок $p$-группы $P\langle\varphi\rangle$ взаимно прост с $|O_{p'}(\widehat{G})|$, для каждого простого числа $q$, делящего $|O_{p'}(\widehat{G})|$, найдется $P\langle\varphi\rangle$-инвариантная силовская $q$-подгруппа $Q$ группы $O_{p'}(\widehat{G})$.

Фактор-группа $\overline{P} = P/C_P(Q)$ действует точно на фактор-группе по подгруппе Фраттини $V = Q/\Phi(Q)$, которую будем рассматривать как $\mathbb{F}_qP\langle\varphi\rangle$-модуль. По условию $|C_V(\varphi)| \leq m$, значит, в силу предложения 3.1 ступень разрешимости подгруппы $[\bar{P}, \varphi^{p^{n-1}}]$ ограничена. Другими словами, $[P, \varphi^{p^{n-1}}]^{(s)} \leq C_P(Q)$ для некоторого ограниченного числа $s$. Поскольку $P$ действует точно на $O_{p'}(\widehat{G})$, имеем $\bigcap C_P(Q_i) = 1$, где $Q_i$ пробегает все $P\langle\varphi\rangle$-инвариантные силовские подгруппы группы $O_{p'}(\widehat{G})$. Отсюда $[P, \varphi^{p^{n-1}}]^{(s)} = 1$.

По теореме 2.3 Холла — Хигмэна — Хартли получаем, что нормальная подгруппа $[P, \varphi^{p^{n-1}}]$ силовской $p$-подгруппы $P$ содержится в $H = O_{p',p,p',\dots,p',p}(\widehat{G})$, где $p$ встречается ограниченное число раз.

Рассмотрим действие $\varphi$ на фактор-группе $\widetilde{G} = \widehat{G}/H$. Так как $[P, \varphi^{p^{n-1}}] \leq H$, получаем, что $\varphi^{p^{n-1}}$ действует тривиально на образе $P$, который является силовской $p$-подгруппой группы $\widetilde{G}$. В частности, $\varphi^{p^{n-1}}$ действует тривиально на $O_{p',p}(\widetilde{G})/O_{p'}(\widetilde{G})$, и потому также тривиально действует $[\widetilde{G}, \varphi^{p^{n-1}}]$. Так как $O_{p',p}(\widetilde{G})/O_{p'}(\widetilde{G})$ содержит свой централизатор в $\widetilde{G}/O_{p'}(\widetilde{G})$, получаем, что $[\widetilde{G}, \varphi^{p^{n-1}}] \leq O_{p',p}(\widetilde{G})$. Другими словами, $\varphi^{p^{n-1}}$ действует тривиально на фактор-группе $\widetilde{G}/O_{p',p}(\widetilde{G})$. Поэтому порядок автоморфизма, индуцированного $\varphi$ на $\widetilde{G}/O_{p',p}(\widetilde{G})$, не превосходит $p^{n-1}$. По предположению индукции $p$-длина этой фактор-группы ограничена. Тогда $p$-длина группы $G/O_{p,p'}(G)$ ограничена, а потому и $p$-длина группы $G$ ограничена, как и требовалось. $\square$

Доказательство следствия 1.3. Здесь $G$ — конечная разрешимая группа, допускающая автоморфизм $\varphi$ порядка $p^n$, имеющий не более $m$ неподвижных точек в каждой $\varphi$-инвариантной элементарной абелевой $p'$-секции группы

$G$. По теореме 1.1 $p$-длина группы $G$ ограничена. Остается получить оценку высоты Фиттинга каждого $p'$-фактора $T$ верхнего $p$-ряда, состоящего из подгрупп $O_{p',p,p',p,\dots}$.

Такая оценка вытекает, например, из рангового аналога теоремы Хартли — Айзекса, доказанного в [36]. Более точно, теорема 5.1 из [36] утверждает, что если конечная разрешимая группа $K$ допускает разрешимую группу автоморфизмов $L$ копростого порядка, то $K$ обладает нормальной подгруппой $N$ высоты Фиттинга не более $4^{\alpha(L)}-1$, для которой (секционный) ранг фактор-группы $K/N$ ограничен в терминах $|L|$ и ранга подгруппы $C_K(L)$. Здесь по определению ранг группы — это наименьшее число $r$ такое, что каждая подгруппа может быть порождена $r$ элементами.

Применим эту теорему к $T$ и $\langle\varphi\rangle$. Известно, что ранг конечной группы ограничен в терминах рангов ее элементарных абелевых секций. Разумеется, каждая элементарная абелева секция группы $C_T(\varphi)$ является $\varphi$-инвариантной $p'$-секцией группы $G$ и потому имеет ограниченный порядок по условию. Таким образом, в силу [36, теорема 5.1] получаем нормальную подгруппу $T_1$ группы $T$, для которой и высота Фиттинга группы $T_1$, и ранг группы $T/T_1$ ограничены. Наконец, также известно, что высота Фиттинга разрешимой конечной группы ограничена в терминах ее ранга. В результате высота Фиттинга группы $T$ ограничена, как и высота Фиттинга группы $G$. $\square$

## 4. Автоморфизм порядка $p^aq^b$

Доказательство теоремы 1.4. Напомним, что $G$ — конечная группа, допускающая автоморфизм $\varphi$ порядка $p^aq^b$. По теореме Хартли [3] (основанной на классификации конечных простых групп) группа $G$ обладает разрешимой подгруппой индекса, ограниченного в терминах $p^aq^b$ и $|C_G(\varphi)|$. Поэтому можно с самого начала считать, что $G$ разрешима, так что нам нужно ограничить высоту Фиттинга группы $G$ в терминах $p^aq^b$ и $|C_G(\varphi)|$. Всюду далее будем для краткости говорить, что некоторый параметр ограничен, имея в виду, что этот параметр ограничен сверху в терминах $p^aq^b$ и $|C_G(\varphi)|$. Будем использовать без особых ссылок тот факт, что число неподвижных точек автоморфизма $\varphi$ в каждой $\varphi$-инвариантной секции группы $G$ не превосходит $|C_G(\varphi)|$ в силу леммы 2.1.

Воспользуемся индукцией по $a+b$. В качестве базы индукции рассмотрим случай, когда либо $a=0$, либо $b=0$. Тогда $|\varphi|$ — степень простого числа и по теореме Хартли — Турау [22] группа $G$ обладает подгруппой ограниченного индекса, у которой высота Фиттинга не превосходит $\alpha(\varphi)$. (В сущности, для нашей «слабой» оценки было бы достаточно более простого рассуждения: если, скажем, $|\varphi|=p^a$, то ранг фактор-группы группы $O_{p',p}(G)/O_{p'}(G)$ по ее подгруппе Фраттини ограничен по лемме 2.2, откуда следует ограничение на высоту Фиттинга группы $G/O_{p'}(G)$, а высота Фиттинга группы $O_{p'}(G)$ ограничена в терминах $a$ по теореме Томпсона [16].) Более того, выполняется следующее предложение, которое, по-видимому, было отмечено Хартли, но могло остаться неопубликованным. Сформулируем это предложение в более общем виде, не предполагая, что автоморфизм имеет бипримарный порядок.

**Предложение 4.1.** *Если конечная разрешимая группа $G$ допускает автоморфизм $\psi$ такой, что имеется не более одного общего простого делителя чисел $|\psi|$ и $|G|$, то высота Фиттинга группы $G$ ограничена сверху в терминах $|\psi|$ и $|C_G(\psi)|$.*

Доказательство. Если $(|\psi|, |G|) = 1$, то результат вытекает из более сильной теоремы Томпсона [16]. Пусть $\langle\psi\rangle = \langle\psi_r\rangle \times \langle\psi_{r'}\rangle$, где $\langle\psi_r\rangle$ — силовская $r$-подгруппа группы $\langle\psi\rangle$, а $r$ — единственный общий простой делитель чисел $|G|$ и $|\psi|$. Централизатор $C_G(\psi_{r'})$ допускает автоморфизм $\psi_r$, у которого порядок есть степень простого числа, а централизатор $C_{C_G(\psi_{r'})}(\psi_r)$ равен $C_G(\psi)$. По теореме Хартли — Турау [22] высота Фиттинга группы $C_G(\psi_{r'})$ ограничена. Применим теорему Томпсона к автоморфизму $\psi_{r'}$ группы $G$ копростого порядка и получим, что высота Фиттинга группы $G$ ограничена как требуется. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 1.4. Пусть $a \geq 1$ и $b \geq 1$. Пусть $\varphi_p = \varphi^{q^b}$ и $\varphi_q = \varphi^{p^a}$, так что $|\varphi_p| = p^a$ и $|\varphi_q| = q^b$, причем $\langle\varphi\rangle = \langle\varphi_p\rangle \times \langle\varphi_q\rangle$. Подгруппа $O_{q'}(G)$ допускает автоморфизм $\varphi$, порядок которого имеет не более одного общего простого делителя $p$ с порядком $|O_{q'}(G)|$. По предложению 4.1 высота Фиттинга группы $O_{q'}(G)$ ограничена.

Поэтому можно считать, что $O_{q'}(G) = 1$. Тогда фактор-группа $\overline{G} = G/O_q(G)$ действует точно на фактор-группе по подгруппе Фраттини $V = O_q(G)/\Phi(O_q(G))$, которую будем считать $\mathbb{F}_q\overline{G}\langle\varphi\rangle$-модулем. Подпространство неподвижных точек $C_V(\varphi_p)$ имеет ограниченный порядок. Это вытекает из леммы 2.2, примененной к действию линейного преобразования $\varphi_q$ порядка $q^b$ на $C_V(\varphi_p)$, так как неподвижные точки преобразования $\varphi_q$ в $C_V(\varphi_p)$ содержатся в подпространстве неподвижных точек $C_V(\varphi)$ ограниченного порядка.

Выберем силовскую $p$-подгруппу группы $\overline{G}\langle\varphi_p\rangle$, содержащую $\langle\varphi_p\rangle$, и пусть $P$ — ее пересечение с $\overline{G}$, так что $P$ — $\varphi_p$-инвариантная силовская $p$-подгруппа группы $\overline{G}$. В силу предложения 3.1 подгруппа $\left[P, \varphi_p^{p^{a-1}}\right]$ разрешима ограниченной ступени.

Отсюда по теореме 2.3 Холла — Хигмэна — Хартли следует, что нормальная подгруппа $\left[P, \varphi_p^{p^{a-1}}\right]$ силовской $p$-подгруппы $P$ содержится в $H = O_{p',p,p',\dots,p',p}(\overline{G})$, где $p$ встречается ограниченное число раз.

Рассмотрим действие автоморфизма $\varphi$ на фактор-группе $\widetilde{G} = \overline{G}/H$. Так как $\left[P, \varphi_p^{p^{a-1}}\right] \leq H$, получаем, что $\varphi_p^{p^{a-1}}$ действует тривиально на образе подгруппы $P$, который является силовской $p$-подгруппой группы $\widetilde{G}$. В частности, $\varphi_p^{p^{a-1}}$ действует тривиально на $O_{p',p}(\widetilde{G})/O_{p'}(\widetilde{G})$, и потому также тривиально действует $\left[\widetilde{G}, \varphi_p^{p^{a-1}}\right]$. Так как $O_{p',p}(\widetilde{G})/O_{p'}(\widetilde{G})$ содержит свой централизатор в $\widetilde{G}/O_{p'}(\widetilde{G})$, получаем, что $[\widetilde{G}, \varphi_p^{p^{a-1}}] \leq O_{p',p}(\widetilde{G})$. Другими словами, $\varphi_p^{p^{a-1}}$ действует тривиально на фактор-группе $\widetilde{G}/O_{p',p}(\widetilde{G})$. Поэтому порядок автоморфизма, индуцированного $\varphi$ на $\widetilde{G}/O_{p',p}(\widetilde{G})$, делит $p^{a-1}q^b$. По индукции высота Фиттинга этой фактор-группы ограничена.

Остается получить оценку высоты Фиттинга каждого из $\varphi$-инвариантных нормальных $p'$-факторов, которые появляются в ограниченном количестве в верхнем $p$-ряду групп $H$ и $O_{p',p}(\widetilde{G})$. Такая оценка следует из предложения 4.1. $\square$

Доказательство следствия 1.5. Это следствие для локально конечных групп вытекает из теоремы 1.4 в силу стандартных рассуждений об обратном пределе. $\square$

Доказательство следствия 1.6. Здесь конечная группа $G$ допускает автоморфизм $\varphi$ такой, что имеется не более двух общих простых делителей чисел $|\varphi|$ и $|G|$. Снова по теореме Хартли [3] можно с самого начала считать, что группа $G$ разрешима. Если $(|\varphi|, |G|)$ равно 1 или степени простого числа, то результат вытекает из предложения 4.1. Пусть $\langle\varphi\rangle = \langle\varphi_{pq}\rangle \times \langle\psi\rangle$, где $\langle\varphi_{pq}\rangle$

— холлова $\{p, q\}$-подгруппа группы $\langle\varphi\rangle$, а $p, q$ — единственные общие простые делители $|G|$ и $|\varphi|$. Централизатор $C_G(\psi)$ допускает автоморфизм $\varphi_{pq}$ бипримарного порядка, централизатор которого $C_{C_G(\psi)}(\varphi_{pq})$ равен $C_G(\varphi)$. По теореме 1.4 высота Фиттинга группы $C_G(\psi)$ ограничена в терминах $|\varphi_{pq}|$ и $|C_G(\varphi)|$. Применим теорему Томпсона [16] к автоморфизму $\psi$ группы $G$ копростого порядка и получим, что высота Фиттинга группы $G$ ограничена в терминах $|\varphi|$ и $|C_G(\varphi)|$. $\square$

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Brauer R., Fowler K. A.* On groups of even order // Ann. Math. (2). 1955. V. 62. P. 565–583.

**2.** *Thompson J.* Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1959. V. 45. P. 578–581.

**3.** *Hartley B.* A general Brauer–Fowler theorem and centralizers in locally finite groups // Pacific J. Math. 1992. V. 152. P. 101–117.

**4.** *Higman G.* Groups and rings which have automorphisms without non-trivial fixed elements // J. London Math. Soc. (2). 1957. V. 32, N 2. P. 321–334.

**5.** *Крекнин В. А.* Разрешимость алгебр Ли с регулярными автоморфизмами конечного периода // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150. С. 467–469.

**6.** *Крекнин В. А., Кострикин А. И.* Алгебры Ли с регулярными автоморфизмами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. С. 249–251.

**7.** *Хухро Е. И.* Кольца Ли и группы, допускающие почти регулярный автоморфизм простого порядка // Мат. сб. 1990. Т. 181. С. 1207–1219.

**8.** *Kovács L. G.* Groups with regular automorphisms of order four // Math. Z. 1960/61. Bd 75. S. 277–294.

**9.** *Макаренко Н. Ю., Хухро Е. И.* Конечные группы с почти регулярным автоморфизмом порядка четыре // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 5. С. 575–602.

**10.** *Alperin J. L.* Automorphisms of solvable groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 175–180.

**11.** *Хухро Е. И.* Конечные $p$-группы, допускающие автоморфизм порядка $p$ с малым числом неподвижных точек // Мат. заметки. 1985. Т. 38, № 5. С. 652–657.

**12.** *Shalev A.* On almost fixed point free automorphisms // J. Algebra. 1993. V. 157. P. 271–282.

**13.** *Хухро Е. И.* Конечные $p$-группы, допускающие $p$-автоморфизмы с малым числом неподвижных точек // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 12. С. 5–64.

**14.** *Medvedev Yu.* $p$-Divided Lie rings and $p$-groups // J. London Math. Soc. (2). 1999. V. 59. P. 787–798.

**15.** *Jaikin-Zapirain A.* On almost regular automorphisms of finite $p$-groups // Adv. Math. 2000. V. 153. P. 391–402.

**16.** *Thompson J.* Automorphisms of solvable groups // J. Algebra. 1964. V. 1. P. 259–267.

**17.** *Turull A.* Fitting height of groups and of fixed points // J. Algebra. 1984. V. 86. P. 555–566.

**18.** *Hartley B., Isaacs I. M.* On characters and fixed points of coprime operator groups // J. Algebra. 1990. V. 131. P. 342–358.

**19.** *Bell S. D., Hartley B.* A note on fixed-point-free actions of finite groups // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1990. V. 41, N 162. P. 127–130.

**20.** *Dade E. C.* Carter subgroups and Fitting heights of finite solvable groups // Illinois J. Math. 1969. V. 13. P. 449–514.

**21.** *Нерешенные задачи теории групп.* Коуровская тетрадь. 18-е изд. Новосибирск: Ин-т математики им. Соболева СО РАН, 2014. http://math.nsc.ru/ alglog/18kt.pdf.

**22.** *Hartley B., Turau V.* Finite soluble groups admitting an automorphism of prime power order with few fixed points // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1987. V. 102. P. 431–441.

**23.** *Rae A.* Sylow $p$-subgroups of finite $p$-soluble groups // J. London Math. Soc. (2). 1973. V. 71. P. 117–123.

**24.** *Hartley B., Rae A.* Finite $p$-groups acting on $p$-soluble groups // Bull. London Math. Soc. 1973. V. 5. P. 197–198.

**25.** *Kurzweil H.* Eine Verallgemeinerung von fixpunktfreien Automorphismen endlicher Gruppen // Arch. Math. (Basel). 1971. Bd 22. S. 136–145.

**26.** *Meixner T.* The Fitting length of solvable $H_{p^n}$-groups // Israel J. Math. 1985. V. 51, N 1–2. P. 68–78.

**27.** *Wilson J. S.* On the structure of compact torsion groups // Monatsh. Math. 1983. V. 96, N 1. P. 57–66.

**28.** *Khukhro E. I., Shumyatsky P.* Words and pronilpotent subgroups in profinite groups // Austral. Math. Soc. J. 2014. V. 97, N 3. P. 343–364.

**29.** *Hall P., Higman G.* The $p$-length of a $p$-soluble group and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. (3). 1956. V. 6. P. 1–42.

**30.** *Hoare A. H. M.* A note on 2-soluble groups // J. London Math. Soc. 1960. V. 35. P. 193–199.

**31.** *Berger T. R., Gross F.* 2-length and the derived length of a Sylow 2-subgroup // Proc. London Math. Soc. (3). 1977. V. 34. P. 520–534.

**32.** *Брюханова Е. Г.* Связь между 2-длиной и производной длиной силовской 2-подгруппы конечной разрешимой группы // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 2. С. 161–170.

**33.** *Hartley B.* Automorphisms of finite soluble groups. Preliminary version, MIMS EPrint: 2014.52. http://eprints.ma.man.ac.uk/2188/01/covered/MIMS_ep2014_52.pdf.

**34.** *Hartley B.* Some theorems of Hall–Higman type for small primes // Proc. London Math. Soc. (3). 1980. V. 41. P. 340–362.

**35.** *Curtis C. W., Reiner I.* Representation theory of finite groups and associative algebras. New York; London: Interscience, 1962.

**36.** *Khukhro E., Mazurov V.* Automorphisms with centralizers of small rank // Groups St. Andrews 2005. V. II. Selected papers of the conference, St. Andrews, UK, July 30–August 6, 2005. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007. P. 564–585. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; V. 340).


*Статья поступила 8 января 2015 г.*

Хухро Евгений Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Университет Линкольна,
г. Линкольн, Великобритания
khukhro@yahoo.co.uk