Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 512:57

О КВАЗИПОРЯДКЕ, ИНДУЦИРОВАННОМ ВНУТРЕННИМИ ГОМОМОРФИЗМАМИ, И ОБ ОПЕРАТОРЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ЗАМЫКАНИЯ

А. Г. Пинус

Аннотация. Изучаются квазипорядки на множествах, которые индуцируются внутренними гомоморфизмами алгебр с данным базисным множеством. Эти квазипорядки играют важную роль в изучении оператора алгебраического замыкания на множествах из универсальных алгебр.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: квазипорядок, алгебраическое множество, внутренний гомоморфизм.

К 75-летию моего учителя Юрия Леонидовича Ершова

Понятие алгебраического множества универсальной алгебры относится к числу основных понятий алгебраической геометрии этих алгебр, развитой в работах Б. И. Плоткина и группы В. Н. Ремесленникова (см., например, [1, 2]). Алгебраические множества суть решения систем термальных уравнений, и в связи с этим представляет интерес вопрос о строении алгебраических замыканий подмножеств декартовых степеней универсальных алгебр — наименьших алгебраических множеств, включающих в себя исходное подмножество. В настоящей работе приводится некое описание строения алгебраического замыкания на основе некоторого естественного квазипорядка на универсальных алгебрах, связанного с понятием внутреннего гомоморфизма алгебр. Существенную роль внутренние гомоморфизмы универсальных алгебр играют при работе с так называемыми позитивно условными термами (см., например, [3]). Таким образом, в работе устанавливается связь одного из основных понятий алгебраической геометрии универсальных алгебр с такими традиционными понятиями универсальной алгебры, как прямые и матричные степени алгебр, их подалгебры и гомоморфизмы одних подалгебр на другие. Отсюда, в частности, вытекает описание взаимосвязи между различными (в том числе и отличных друг от друга сигнатур) универсальными алгебрами с общим основным множеством, имеющими идентичные операторы алгебраического замыкания, что, в свою очередь, можно рассматривать в рамках естественного вопроса о различных универсальных алгебрах с общим основным множеством и идентичными теми или иными производными структурами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по государственному заданию № 2014/138 (проект 1052).

© **2015 Пинус А. Г.**

Напомним, что для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ при $n \in \omega$ подмножество $B \subseteq A^n$ называется *алгебраическим множеством алгебры* $\mathfrak{A}$, если B является совокупностью решений в $\mathfrak{A}$ некоторой системы (возможно, бесконечной) термальных уравнений, т. е. $B = \{\bar{a} \in A^n \mid \mathfrak{A} \vDash \mathfrak{T}(\bar{a})\}$, где $\mathfrak{T}(\bar{x}) = \{t_i^1(\bar{x}) = t_i^2(\bar{x}) \mid i \in I\}$, а $t_j^i(\bar{x})$ — некоторые термы сигнатуры σ. Подобное B будем называть *n-мерным алгебраическим множеством* алгебры $\mathfrak{A}$. Совокупность всех n-мерных алгебраических множеств алгебры $\mathfrak{A}$ образуют полную решетку относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$, обозначаемую далее через $\mathrm{Alg}_n\,\mathfrak{A}$. В [4] доказано, что для любой полной решетки L существует алгебра $\mathfrak{A}$ такая, что $L \cong \mathrm{Alg}_1\,\mathfrak{A}$. Вопрос абстрактного описания решеток $\mathrm{Alg}_n\,\mathfrak{A}$ (для $n > 1$) остается открытым.

В настоящей работе приводится некоторый подход к описанию оператора алгебраического замыкания на множествах из универсальных алгебр $\mathfrak{A}$ как порождению главных идеалов относительно некоторого естественного квазипорядка на некоем расширении алгебры $\mathfrak{A}$.

Напомним, что *внутренним гомоморфизмом* (*изоморфизмом*) универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ называется любой гомоморфизм (изоморфизм) между некоторыми подалгебрами алгебры $\mathfrak{A}$. Совокупность всех внутренних гомоморфизмов (изоморфизмов) алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ с добавленным при необходимости пустым отображением образует (относительно операции суперпозиции частичных отображений множества A в себя) полугруппу, обозначаемую далее через $\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$ ($\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$).

На основном множестве A универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ введем отношение $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$ ($\sim_{\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}}$) следующим образом: $a \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}} b$ ($a \sim_{\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}} b$) для $a, b \in A$ тогда и только тогда, когда существует $\varphi \in \mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}$ ($\varphi \in \mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}$) такой, что $\varphi(b) = a$, или, иначе, когда существует внутренний гомоморфизм (изоморфизм) φ алгебры $\mathfrak{A}$, отображающий $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$ на $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$ и такой, что $\varphi(b) = a$. Здесь и далее $\langle C\rangle_{\mathfrak{A}}$ для любого $C \subseteq A$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная множеством C, а $\langle\{a\}\rangle_{\mathfrak{A}}$ обозначаем далее через $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$ для $a \in A$. Очевидно, что $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$ является отношением квазипорядка на множестве A, а роль отношения эквивалентности, порожденной этим квазипорядком, играет отношение $\sim_{\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}}$. Покажем, что этот квазипорядок, рассмотренный на некотором расширении алгебры $\mathfrak{A}$, позволяет в его терминах описать совокупность алгебраических множеств алгебры $\mathfrak{A}$.

Для любого $B \subseteq A^n$ через $\overline{B}_{\mathfrak{A}}$ будем обозначать алгебраическое замыкание множества B в алгебре $\mathfrak{A}$ — наименьшее n-мерное алгебраическое множество алгебры $\mathfrak{A}$, включающее в себя B. Таким образом, $\bar{c} \in \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ для $\bar{c} \in A^n$ тогда и только тогда, когда для любого термального уравнения $t^1(\bar{x}) = t^2(\bar{x})$, для которого любое $\bar{b} \in B$ является корнем, имеет место $\mathfrak{A} \vDash t^1(\bar{c}) = t^2(\bar{c})$.

Очевидным образом операция $B \to \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ на подмножествах множества A^n обладает основными свойствами операции замыкания:

$$(1)\ B \subseteq \overline{B}_{\mathfrak{A}}, \quad (2)\ \overline{(\overline{B}_{\mathfrak{A}})}_{\mathfrak{A}} = \overline{B}_{\mathfrak{A}}, \quad (3)\ B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow \overline{B}_{1\mathfrak{A}} \subseteq \overline{B}_{2\mathfrak{A}}.$$

В силу свойства (3) для любых $B_1, B_2 \subseteq A^n$ имеют место включения $\overline{B}_{1\mathfrak{A}} \cup \overline{B}_{2\mathfrak{A}} \subseteq \overline{(B_1 \cup B_2)}_{\mathfrak{A}}$ и $\overline{(B_1 \cap B_2)}_{\mathfrak{A}} \subseteq \overline{B}_{1\mathfrak{A}} \cap \overline{B}_{2\mathfrak{A}}$. Заметим, что эти включения могут быть и собственными. Действительно, пусть сигнатура σ состоит из одной единственной одноместной функции $f(x)$. Для любого натурального n через $\mathfrak{L}_n$ обозначим f-цикл длинны n, а через $\mathfrak{L}_\infty$ — алгебру $\langle Z; x+1\rangle$, где Z — совокупность всех целых чисел.

Пусть $\mathfrak{A}$ является дизъюнктным объединением алгебр $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_5$ и $\mathfrak{L}_{15}$. В случае, когда $B_1 = \mathfrak{L}_3$, $B_2 = \mathfrak{L}_5$, очевидным образом имеем равенства $\overline{B}_{1\mathfrak{A}} = B_1$,

$\overline{B}_{2\mathfrak{A}} = B_2$, $\overline{(B_1 \cup B_2)}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, т. е. $\overline{B}_{1\mathfrak{A}} \cup \overline{B}_{2\mathfrak{A}} \neq \overline{(B_1 \cup B_2)}_{\mathfrak{A}}$. Выбирая $\mathfrak{A}$ равным дизъюнктному объединению $\mathfrak{L}_{30}$, $\mathfrak{L}_{291}$ и $\mathfrak{L}_{385}$, а $B_1 = \mathfrak{L}_{30} \cup \mathfrak{L}_{291}$, $B_2 = \mathfrak{L}_{30} \cup \mathfrak{L}_{385}$ в силу числовых равенств $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, $291 = 3 \cdot 7 \cdot 11$, $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ получаем равенства $\overline{B}_{1\mathfrak{A}} \cap \overline{B}_{2\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$ и $\overline{(B_1 \cap B_2)}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{L}_{30}$, т. е. $\overline{(B_1 \cap B_2)}_{\mathfrak{A}} \neq \overline{B}_{1\mathfrak{A}} \cap \overline{B}_{2\mathfrak{A}}$.

Отметим также, что операция алгебраического замыкания не локальна, т. е. включение $\overline{B}_{\mathfrak{A}} \supseteq \bigcup\limits_{D \in P_\omega(B)} \overline{D}_{\mathfrak{A}}$ может быть собственным. Здесь $P_\omega(B)$ — совокупность всех конечных подмножеств множества B. Пусть p — некоторое натуральное простое число и алгебра $\mathfrak{A}$ является дизъюнктным объединением алгебр $\mathfrak{L}_{p^k}$ $(k \in \omega)$ и $\mathfrak{L}_\infty$. Пусть $B = \bigcup\limits_{k \in \omega} \mathfrak{L}_{p^k}$, тогда $\overline{B}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, но $\overline{D} \subseteq \bigcup\limits_{k \leq m} \mathfrak{L}_{p^k}$ для любого $D \in P_\omega(B)$, где $m = \max\{e \in \omega \mid D \cap \mathfrak{L}_{p^e} \neq \varnothing\}$, тем самым $\overline{B}_{\mathfrak{A}} \neq \bigcup\limits_{D \in P_\omega(B)} \overline{D}_{\mathfrak{A}}$ в этом случае.

В [5] отмечена связь совокупностей алгебраических множеств алгебры $\mathfrak{A}$ с полугруппой $\operatorname{End}\mathfrak{A}$ ее эндоморфизмов. В частности, доказано, что для любых универсальных алгебр $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1 \rangle$ и $\mathfrak{A}_2 = \langle A; \sigma_2 \rangle$ с одним и тем же основным множеством A, но, возможно, разных сигнатур из совпадения совокупностей алгебраических множеств этих алгебр $\operatorname{Alg}_n \mathfrak{A}_1 = \operatorname{Alg}_n \mathfrak{A}_2$ (для любого $n \in \omega$) вытекает равенство $\operatorname{End}\mathfrak{A}_1 = \operatorname{End}\mathfrak{A}_2$, т. е. совпадение полугрупп эндоморфизмов алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ является необходимым условием совпадения их алгебраических множеств. Там же показано, что это условие не является достаточным условием.

Далее, тем не менее будет в терминах преобразований алгебр (внутренних гомоморфизмов некоторых их расширений) указано необходимое и достаточное условие совпадения их алгебраических множеств.

Прежде всего для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ переформулируем описание отношения $\leq_{\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}}$ в терминах термальных уравнений: очевидным образом для $a, b \in A$ отношение $a \leq_{\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}} b$ имеет место тогда и только тогда, когда любое термальное уравнение $t^1(x) = t^2(x)$ сигнатуры σ, решением которого является элемент b, имеет в качестве решения элемент a, т. е. когда $a \in \overline{\{b\}}_{\mathfrak{A}}$.

Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ на A зафиксируем некоторое отношение $\leq$ вполне упорядочения этого множества. Традиционно через $P(A)$ будем обозначать совокупность всех подмножеств множества A. Для любого непустого $B \in P(A)$ пусть 0_B — наименьший относительно вполне упорядочения $\leq$ элемент из B. Рассмотрим прямую степень $\mathfrak{A}^A = \langle A^A; \sigma \rangle$ алгебры $\mathfrak{A}$. Традиционным образом отождествим элементы a из A с константными элементами a^A из A^A, где $\pi_b(a^A) = a$ для любого $b \in A$, а π_b — проектирование множества A^A на A по координате b. Подалгебру константных элементов $\{a^A \mid a \in A\}$ алгебры $\mathfrak{A}^A$ будем обозначать через $\overline{\mathfrak{A}}$ и называть *константной подалгеброй алгебры* $\mathfrak{A}^A$. Рассмотрим также следующее вложение φ непустых множеств из $P(A)$ в множество A^A: для $\varnothing \neq B \subseteq A$ при любом $b \in B$ пусть $\pi_b(\varphi(B)) = b$, если $b \in B$, и $\pi_b(\varphi(B)) = 0_B$, если $b \notin B$. Обозначим далее $\varphi(B)$ через d_B. В случае, когда $\varnothing \in \operatorname{Alg}_1 \mathfrak{A}$, добавим к квазиупорядоченному множеству $\langle A^A; \leq_{\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}^A} \rangle$ внешний нуль 0^A, считая его равным $\varphi(\varnothing)$ и обозначая через $d_\varnothing$. Соответствующее расширение множества $\langle A^A; \leq_{\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}^A} \rangle$ будем обозначать через $\left\langle A_0^A; \leq_{\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_0^A} \right\rangle$. Под *квазиупорядоченной оболочкой* $\langle 0b\mathfrak{A}; \leq_{0b} \rangle$ *алгебры* $\mathfrak{A}$ будем далее понимать множество $\langle A^A; \leq_{\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}^A} \rangle$, если $\varnothing \notin \operatorname{Alg}_1 \mathfrak{A}$, и соответственно множество $\left\langle A_0^A; \leq_{\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}_0^A} \right\rangle$, если $\varnothing \in \operatorname{Alg}_1 \mathfrak{A}$. Заметим, что ограничение квазипорядка $\leq_{0b}$ до подмножества $\overline{\mathfrak{A}}$ совпадает с отношением $\leq_{\operatorname{Ihm}\overline{\mathfrak{A}}}$

(с отношением $\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}$ при отождествлении $\overline{\mathfrak{A}}$ с $\mathfrak{A}$).

Квазиупорядоченное множество $\langle C; \leq\rangle$ назовем *квазирешеткой*, если решеточно упорядочен фактор $\langle C/\sim; \leq\rangle$ этого множества по отношению эквивалентности $\sim$, индуцированному на C квазипорядком $\leq$.

Подмножество D квазиупорядоченного множества $\langle C; \leq\rangle$ назовем *плотным в нем снизу*, если для любого $c \in C$ существует $d \in D$ такое, что $d \leq c$ и для любых $c_1, c_2 \in C$ таких, что $c_1 \not\sim c_2$ (здесь $\sim$ — эквивалентность на C, порожденная квазипорядком $\leq$), существует $d \in D$ такое, что либо $d \leq c_1$ и $d \nleq c_2$, либо $d \leq c_2$ и $d \nleq c_1$, т. е. идеалы множества $\langle C; \leq\rangle$, порожденные не $\sim$-эквивалентными элементами из C в пересечении с D, отличаются друг от друга.

Лемма 1. *Для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ ее квазиупорядоченная оболочка $\langle 0b\mathfrak{A}; \leq_{0b}\rangle$ является полной квазирешеткой, в которой константная подалгебра $\overline{\mathfrak{A}}$ плотная снизу.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что для любого $C \subseteq 0b\mathfrak{A}$ в $\langle 0b\mathfrak{A}; \leq_{0b}\rangle$ существует $\operatorname{Sup} C$. Прежде всего отметим, что для любых термов $t_1(x)$ и $t_2(x)$ сигнатуры σ и любого $e \in A^A$ истинность равенства $t_1(e) = t_2(e)$ на $\mathfrak{A}^A$ равносильна истинности равенств $t_1(\pi_b(e)) = t_2(\pi_b(e))$ на алгебре $\mathfrak{A}$ для любого $b \in A$. Выберем элемент $d_C \in A^A$ таким, что

$$\{\pi_b(d_C) \mid b \in A\} = \bigcup_{a \in C} \{\pi_b(a) \mid b \in A\}.$$

В силу отмеченного выше если $\mathfrak{A} \vDash t_1(d_C) = t_2(d_C)$, то $\mathfrak{A} \vDash t_1(\pi_b(d_C)) = t_2(\pi_b(d_C))$ для любого $b \in A$ и, значит, $\mathfrak{A} \vDash t_1(\pi_b(a)) = t_2(\pi_b(a))$ для любых a из C и b из A, т. е. $\mathfrak{A}^A \vDash t_1(a) = t_2(a)$ и $a \leq_{0b} d_C$. Заметим, что если $a \leq_{0b} e$ для некоторого $e \in A^A$ и любого $a \in C$, то и $d_C \leq_{0b} e$, т. е. $d_C = \operatorname{Sup} C$ в квазиупорядоченном множестве $\langle 0b\mathfrak{A}; \leq_{0b}\rangle$. Как известно, если существуют супремумы любых подмножеств упорядоченного множества, то оно является полной решеткой. Таким образом, $\langle 0b\mathfrak{A}; \leq_{0b}\rangle$ является полной квазирешеткой, и первое утверждение леммы доказано.

Покажем, что $\overline{\mathfrak{A}}$ плотно снизу в $\langle 0b\mathfrak{A}; \leq_{0b}\rangle$. Пусть $c_1, c_2 \in 0b\mathfrak{A}$ и $c_1 \not\sim c_2$ (здесь $\sim$ — эквивалентность на $0b\mathfrak{A}$, порожденная квазипорядком $\leq_{0b}$). Будем считать, что $c_1, c_2 \in A^A$ (случай, когда $c_1 = d_\varnothing$ либо $c_2 = d_\varnothing$, рассматривается аналогично), отношение $c_1 \not\sim c_2$ влечет то, что либо $c_1 \nleq_{0b} c_2$, либо $c_2 \nleq_{0b} c_1$. Допустим первое (вторая ситуация рассматривается аналогично). Тогда для некоторых термов $t_1(x)$, $t_2(x)$ сигнатуры σ имеем $\mathfrak{A}^A \vDash t_1(c_2) = t_2(c_2)$, но $\mathfrak{A}^A \vDash t_1(c_1) \neq t_2(c_1)$. Таким образом, найдется $b_0 \in A$ такой, что $\mathfrak{A} \vDash t_1(\pi_{b_0}(c_1)) \neq t_2(\pi_{b_0}(c_1))$, в то время как $\mathfrak{A} \vDash t_1(\pi_b(c_2)) = t_2(\pi_b(c_2))$ для любого $b \in A$. Тем самым $\pi_{b_0}(c_1)^A \leq c_1$, но $\pi_{b_0}(c_1)^A \nleq c_2$, т. е. действительно $\overline{\mathfrak{A}}$ плотно снизу в $\langle 0b\mathfrak{A}; \leq_{0b}\rangle$.

Заметим также, что $e \sim_{\mathrm{Iso}\,\mathfrak{A}^A} d_E$ для любого $e \in A^A$, где $E = \{\pi_b(e) \mid b \in A\}$.

Лемма 2. *Для любого $B \subseteq A$ имеет место равенство*

$$\{a^A \mid a \in \overline{B}_{\mathfrak{A}}\} = \{a^A \mid a^A \leq_{0b} d_B\}.$$

Утверждение леммы непосредственно следует из определения множества $\overline{B}_{\mathfrak{A}}$, элементов a^A, d_B и отношения $\leq_{0b}$.

Из утверждения леммы 2 и замечания перед ней вытекает

Теорема 1. *Пересечения главных идеалов квазиупорядоченного множества* $\langle 0b\mathfrak{A}; \leq_{0b}\rangle$ *с множеством* $\overline{\mathfrak{A}}$ *совпадает с совокупностью одномерных алгебраических множеств алгебры* $\mathfrak{A}$.

Для перехода к произвольным n-мерным алгебраическим множествам алгебры $\mathfrak{A}$ понадобится понятие *матричной степени* $\mathfrak{A}^{[n]}$ *алгебры* $\mathfrak{A}$ ($n \in \omega$). Напомним, что основным множеством ее служит множество A^n, а ее сигнатура $\sigma^{[n]}$ состоит из любых k-местных символов m_t, где t — любая последовательность $\langle t_1(\bar{x}), \ldots, t_n(\bar{x})\rangle$ kn-местных термов сигнатуры алгебры $\mathfrak{A}$, при этом $m_t(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k) = \langle t_1(\bar{a}), \ldots, t_n(\bar{a})\rangle$ для любого $\bar{a} \in A^{kn}$ (при отождествлении A^{kn} с $(A^n)^k$, считая $\bar{a} = \langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k\rangle$, где $\bar{a}_i \in A^n$). Через $\mathfrak{A}^{[n]*}$ обозначим обеднение алгебры $\mathfrak{A}^{[n]}$ до части $\sigma^{[n]*}$ сигнатуры $\sigma^{[n]}$, состоящей из всех унарных символов последней. Тем самым для любых последовательностей $t^1 = \left\langle t_1^1(\bar{x}), \ldots, t_n^1(\bar{x})\right\rangle$, $t^2 = \left\langle t_1^2(\bar{x}), \ldots, t_n^2(\bar{x})\right\rangle$ n-местных термов сигнатуры алгебры $\mathfrak{A}$ и любого $\bar{a} \in A^n$

$$\mathfrak{A}^{[n]*} \models m_{t^1}(\bar{a}) = m_{t^2}(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathop{\&}_{i=1}^{n} \mathfrak{A} \models t_i^1(\bar{a}) = t_i^2(\bar{a}).$$

В силу этого для любых $B \subseteq A^n$ и $\bar{c} \in A^n$ включение $\bar{c} \in \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ равносильно включению $\bar{c} \in \overline{B}_{\mathfrak{A}^{[n]*}}$, т. е., в частности, имеет место

Лемма 3. *Для любой алгебры* $\mathfrak{A}$ *и любого* $n \in \omega$ *имеет место равенство* $\mathrm{Alg}_n \mathfrak{A} = \mathrm{Alg}_1 \mathfrak{A}^{[n]*}$.

Из леммы 3 и теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пересечение главных идеалов квазиупорядоченного множества* $\langle 0b\mathfrak{A}; \leq_{0b}\rangle$ *с множеством* $\overline{\mathfrak{A}^{[n]*}}$ *совпадает с совокупностью* n*-мерных алгебраических множеств алгебры* $\mathfrak{A}$.

Таким образом, оператор алгебраического замыкания $B \to \overline{B}_{\mathfrak{A}}$ (для $B \subseteq A^n$) состоит в цепочке переходов $B \to d_B \in (\mathfrak{A}^{[n]*})^{A^n}$, $d_B \to \{\bar{a} \in A \mid \bar{a}^{A^n} \in (A^n)^{A^n}, \bar{a}^{A^n} \leq_{\mathrm{Ihm}(\mathfrak{A}^{[n]*})^{A^n}} d_B\}$.

Значительную роль в алгебраической геометрии универсальных алгебр играет понятие *нётеровости их по уравнениям*: алгебра $\mathfrak{A}$ называется *нётеровой по уравнениям*, если любая система ее термальных уравнений равносильна на $\mathfrak{A}$ некоторой конечной своей подсистеме.

В терминах квазипорядков $\langle \mathfrak{A}^{[n]*}; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}^{[n]*}}\rangle$ (для $n \in \omega$) можно сформулировать достаточные условия нётеровости по уравнениям алгебры $\mathfrak{A}$. Напомним, что квазипорядок $\langle C; \leq\rangle$ называется *вполне квазиупорядоченным*, если в нем не существует ни бесконечных строго убывающих последовательностей, ни бесконечного числа попарно не сравнимых элементов.

Отметим, что если $\langle \mathfrak{A}^{[n]*}; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}^{[n]*}}\rangle$ — вполне квазиупорядоченные множества, то алгебра $\mathfrak{A}$ нётерова по уравнениям. Действительно, предположив противное, рассмотрим бесконечную строго убывающую относительно теоретико-множественного включения последовательность алгебраических множеств алгебры $\mathfrak{A}$ (для некоторого $n \in \omega$):

$$A^n \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_m \supset B_{m+1} \supset \ldots.$$

Пусть $\bar{b}_m \in B_m \setminus B_{m+1}$, тогда для любых $k, m \in \omega$ если $k < m$, то $\bar{b}_k \not\leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}^{[n]*}} \bar{b}_m$. По теореме Рамсея найдется бесконечное $\mathscr{S} \subseteq \omega$ такое, что для любых $k < n$ из $\mathscr{S}$ либо $\bar{b}_k$ и $\bar{b}_n$ несравнимы в $\langle \mathfrak{A}^{[n]*}; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}^{[n]*}}\rangle$, либо $\bar{b}_n$ строго меньше $\bar{b}_k$; противоречие с тем, что $\langle \mathfrak{A}^{[n]*}; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}^{[n]*}}\rangle$ — вполне квазиупорядоченное множество.

Заметим, что обратное неверно, т. е. алгебра $\mathfrak{A}$ может быть нётеровой по уравнениям, хотя, к примеру, $\langle \mathfrak{A}; \leq_{\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}}\rangle$ включает бесконечные совокупности несравнимых элементов. Пусть, к примеру, сигнатура σ состоит из одной одноместной функции $f(x)$. Пусть P — совокупность всех простых натуральных чисел, а $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ — дизъюнктное объединение (для $p \in P$) f-циклов длины p. Тогда очевидно, что если $a_p \in A_p$, то $\{a_p \mid p \in P\}$ — совокупность несравнимых в $\mathfrak{A}; \leq_{\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}}$ элементов. В то же время без труда замечается, что $\operatorname{Alg}_1 \mathfrak{A} = \{\varnothing, \bigcup\limits_{p\in D} A_p, A \mid D \in P_\omega(P)\}$ (здесь $P_\omega(P)$ — совокупность всех конечных подмножеств множества P), т. е. любая совокупность термальных уравнений от одной переменной равносильна на $\mathfrak{A}$ некоторой своей конечной подсовокупности. То же самое нетрудно заметить и для $\operatorname{Alg}_n \mathfrak{A}$ при любом $n \in \omega$, т. е. $\mathfrak{A}$ нётерова по уравнениям.

Из теоремы 2 вытекает следующее достаточное условие на алгебры $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1\rangle$ и $\mathfrak{A}_2 = \langle A; \sigma_2\rangle$ с общим основным множеством для совпадения их алгебраических множеств.

Следствие 1. *Для любых универсальных алгебр $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1\rangle$, $\mathfrak{A}_2 = \langle A; \sigma_2\rangle$ при любом натуральном n совпадение полугрупп $\operatorname{Ihm}\bigl(\mathfrak{A}_1^{[n]*}\bigr)^{A^n}$ и $\operatorname{Ihm}\bigl(\mathfrak{A}_2^{[n]*}\bigr)^{A^n}$ влечет совпадение совокупностей n-мерных алгебраических множеств этих алгебр, т. е. равенство $\operatorname{Alg}_n \mathfrak{A}_1 = \operatorname{Alg}_n \mathfrak{A}_2$.*

В силу того, что одноместные термальные функции алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{[n]*}$ одни и те же, для $n = 1$ утверждение следствия 1 может быть сформулировано в виде следующего утверждения.

Следствие 2. *Для любых универсальных алгебр $\mathfrak{A}_1 = \langle A; \sigma_1\rangle$, $\mathfrak{A}_2 = \langle A; \sigma_2\rangle$ с общим основным множеством совпадение совокупностей внутренних гомоморфизмов однопорожденных подалгебр алгебр $\mathfrak{A}_1^A$ и $\mathfrak{A}_2^A$ в подалгебры их константных элементов влечет совпадение одномерных алгебраических множеств этих алгебр, т. е. равенство $\operatorname{Alg}_1 \mathfrak{A}_1 = \operatorname{Alg}_1 \mathfrak{A}_2$.*

Отметим, наконец, открытый вопрос как абстрактного, так и конкретного описаний квазиупорядоченных множеств вида $\langle A; \leq_{\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}}\rangle$ для универсальных алгебр $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$. Здесь приведем лишь частичное решение этого вопроса в случае, когда $\langle A; \leq\rangle$ является нижней полурешеткой. Соответствующую операцию на A обозначим через $\wedge$. На множестве A определим операции сигнатуры $\sigma = \bigl\langle f_d^1 \mid d \in A\bigr\rangle$ следующим образом: $f_d(c) = d \wedge c$ для $c \in A$ и любого $d \in A$. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$. Для любого $a \in A$ имеем $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}} = \{b \in A \mid b \leq a\}$, при этом a — единственный элемент подалгебры $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$, ее порождающий. Для $a \leq b$ из A отображение $\varphi_{ab}\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$ на $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$ определим следующим образом: $\varphi_{ab}(c) = c \wedge a$ для $c \in \langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$. Заметим, что $\varphi_{ab} \in \operatorname{Ihm}\mathfrak{A}$. Действительно, для $c \in \langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$ при любом $d \in A$

$$\varphi_{ab}(f_d(c)) = \varphi_{ab}(d \wedge c) = a \wedge d \wedge c = f_d(c \wedge a) = f_d(\varphi_{ab}(c)).$$

Пусть $\psi \in \operatorname{Ihm}\mathfrak{A}$ и ψ отображает $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$ на $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$. Покажем, что в этом случае $a \leq b$. В самом деле, в силу замеченного выше о порождающих подалгебр вида $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$ имеем равенство $\psi(b) = a$. Тогда $f_b(\psi(b)) = f_b(a) = b \wedge a$, $\psi(f_b(b)) = \psi(b) = a$ и, значит, $a = a \wedge b$, т. е. $a \leq b$.

Тем самым $\langle A; \leq\rangle = \langle A; \leq_{\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}}\rangle$ и имеет место

Утверждение 1. *Для любой нижней полурешетки $\langle A; \leq\rangle$ на множестве A можно определить алгебру $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ таким образом, что $\langle A; \leq\rangle = \langle A; \leq_{\operatorname{Ihm}\mathfrak{A}}\rangle$.*

В то же время далеко не каждое квазиупорядоченное множество $\langle A; \leq\rangle$ реализуемо в виде $\langle A; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}\rangle$ для некоторой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$.

Рассмотрим четырехэлементное квазиупорядоченное множество $\langle A; \leq\rangle$ такое, что $A = \{a, b, c, d\}$ и квазипорядок $\leq$ определен неравенствами $a \leq d$, $b \leq d$ $c \leq d$ $a \leq b$ и $b \leq a$. Покажем, что не существует алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ такой, что $\langle A; \leq\rangle = \langle A; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}\rangle$. Предположим противное: пусть $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ такова, что $\langle A; \leq\rangle = \langle A; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}\rangle$. Прежде всего заметим, что так как в $\langle A; \leq\rangle$ нет наименьшего элемента, у $\mathfrak{A}$ нет одноэлементных подалгебр. В связи с этим рассмотрим все возможные случаи, связанные с мощностями однопорожденных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$.

1. $|\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}| = |\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}| = |\langle c\rangle_{\mathfrak{A}}| = 2$. Тогда в силу того, что $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}} \cap \langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$, $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}} \cap \langle c\rangle_{\mathfrak{A}}$, $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}} \cap \langle c\rangle_{\mathfrak{A}}$ неодноэлементны, и ввиду изоморфности подалгебр $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$ и $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$ и неизоморфности подалгебр $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$ и $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}}$ единственным возможным вариантом для этих подалгебр является следующий: $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}} = \langle b\rangle_{\mathfrak{A}} = \{a, b\}$ и $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}} = \{c, d\}$. Но последнее противоречит строгому неравенству $a < d$, т. е. этот вариант невозможен.

2. $|\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}| = |\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}| = 3$, $|\langle c\rangle_{\mathfrak{A}}| = 2$. Но тогда опять же в силу отсутствия у $\mathfrak{A}$ одноэлементных подалгебр и того, что с учетом строгого неравенства $a < d$ подалгебра $\langle d\rangle_{\mathfrak{A}}$ обязана быть четырехэлементной, $d \notin \langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$, $d \notin \langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$ и тем самым $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}} = \langle b\rangle_{\mathfrak{A}} = \{a, b, c\}$. Так как $|\langle c\rangle_{\mathfrak{A}} \cap \langle a\rangle_{\mathfrak{A}}|, |\langle c\rangle\mathfrak{A} \cap \langle b\rangle_{\mathfrak{A}}| \neq 1$, этот случай невозможен.

3. Рассмотрим вариант $|\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}| = |\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}| = 2$ и $|\langle c\rangle_{\mathfrak{A}}| = 3$. Тогда $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}} = \langle b\rangle_{\mathfrak{A}} = \{a, b\}$, $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}} = \{a, b, c\}$ и $\langle d\rangle_{\mathfrak{A}} = \{a, b, c, d\}$. Пусть φ — гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$, соответствующий неравенству $a < d$. Тогда $\varphi \restriction \langle c\rangle_{\mathfrak{A}}$ будет гомоморфизмом $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}}$ на $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$ с несравнимостью c и a в $\langle A; \leq\rangle$, т. е. невозможен и этот вариант.

4. Остался последний вариант $|\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}| = |\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}| = |\langle c\rangle_{\mathfrak{A}}| = 3$, т. е. $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}} = \langle b\rangle_{\mathfrak{A}} = \langle c\rangle_{\mathfrak{A}} = \{a, b, c\}$, и если φ — изоморфизм $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}}$ на $\langle b\rangle_{\mathfrak{A}}$ то, так как $\langle a\rangle_{\mathfrak{A}} \not\cong \langle c\rangle_{\mathfrak{A}}$, $\varphi(a) = b$ и $\varphi(b) = a$ и тогда c — неподвижная точка для φ, т. е. $\langle c\rangle_{\mathfrak{A}} = \{c\}$, что опять же противоречит предположению.

Полученное противоречие влечет следующее

Утверждение 2. *Существует четырехэлементное квазиупорядоченное множество $\langle A; \leq\rangle$ такое, что $\langle A; \leq\rangle \neq \langle A; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}\rangle$ для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$.*

Или иначе

Утверждение 3. *Не существует универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle\{a, b, c, d\}; \sigma\rangle$ такой, что $\mathrm{Alg}_1\,\mathfrak{A} = \{\{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{c\}, \varnothing\}$, т. е. такой, что*

(1) *для любого термального уравнения $t_1(x) = t_2(x)$ сигнатуры σ с корнем d все остальные элементы a, b, c являются также корнями;*

(2) *a и b являются корнями одних и тех же термальных уравнений;*

(3) *существует термальное уравнение с корнем c, для которого a не является корнем;*

(4) *существует термальное уравнение с корнем a, для которого c не является корнем.*

Непосредственно замечается, что для любого не более чем трехэлементного квазиупорядоченного множества $\langle A; \leq\rangle$ существует универсальная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ такая, что $\langle A; \leq\rangle = \langle A; \leq_{\mathrm{Ihm}\,\mathfrak{A}}\rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плоткин Б. И.* Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре // Алгебра и анализ. 1997. Т. 9, № 4. С. 224–248.
2. *Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. IV. Эквациональные области и ко-области // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 6. С. 715–756.
3. *Пинус А. Г.* О геометрически близких алгебрах // Алгебра и теория моделей. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. Т. 7. С. 85–95.
4. *Пинус А. Г.* О решетках алгебраических подмножеств универсальных алгебр // Алгебра и теория моделей. 2011. Т. 8. С. 60–66.
5. *Пинус А. Г.* Об универсальных алгебрах с идентичными производными объектами (конгруэнциями, алгебраическими множествами) // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 752–758.
6. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислимости. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.

Статья поступила 15 июля 2014 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru