*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2015. Том 56, № 3*

*УДК 512.54*

# СТРОЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ТОРОВ В СПИНОРНЫХ ГРУППАХ

**А. В. Заварницин**

**Аннотация.** Найдены абелевы инварианты максимальных торов в конечных спинорных группах типов $D_l$ и $B_l$.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

**Ключевые слова:** спинорная группа, максимальный тор.

*К 75-летию Юрия Леонидовича Ершова*

## 1. Введение

Максимальные торы конечных групп лиева типа возникают как неподвижные точки эндоморфизмов Фробениуса, действующих на объемлющей алгебраической группе. Являясь абелевыми группами, конечные максимальные торы разлагаются в прямое произведение циклических групп. Явный вид этого разложения был определен для многих классических групп и групп Шевалле (см. [1, 2]). Эта информация важна, например, при изучении множества порядков элементов, а также некоторых проблем теории представлений. В настоящей работе найдено аналогичное циклическое разложение для торов групп $\mathrm{Spin}_{2l}^{\pm}(q)$ и $\mathrm{Spin}_{2l+1}(q)$.

Пусть $F$ — алгебраически замкнутое поле положительной характеристики $p$ и $\mathbb{G}$ — односвязная простая линейная алгебраическая группа над $F$ типа $D_l$ или $B_l$, которая, как хорошо известно, изоморфна $\mathrm{Spin}_{2l}(F)$ или $\mathrm{Spin}_{2l+1}(F)$ соответственно. Пусть $\sigma$ — эндоморфизм Фробениуса группы $\mathbb{G}$, ассоциированный с автоморфизмом $[t \mapsto t^q]$ поля $F$, где $q = p^m$, и в случае $D_l$ с симметрией диаграммы Дынкина порядка 1 или 2. Тогда группа $G = C_{\mathbb{G}}(\sigma)$ изоморфна в случае $D_l$ конечной спинорной группе $\mathrm{Spin}_{2l}^{\pm}(q)$, где знак $+$ или $-$ берется в зависимости от того, имеет ли симметрия порядок 1 или 2, а в случае $B_l$ — конечной спинорной группе $\mathrm{Spin}_{2l+1}(q)$. Если $\mathbb{T}$ — $\sigma$-инвариантный максимальный тор группы $\mathbb{G}$, то будем говорить, что $T = C_{\mathbb{T}}(\sigma)$ — *максимальный тор* конечной группы $G$.

Классы $G$-сопряженности $\sigma$-инвариантных максимальных торов группы $\mathbb{G}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами $\sigma$-сопряженности группы Вейля. Поэтому соответствующие торы $T$ параметризуются *разбиениями со знаком* $l = l' + l''$, где компоненты $l' = l_1 + \dots + l_r$ и $l'' = l_{r+1} + \dots + l_{r+s}$ соответствуют положительным и отрицательным членам. Такое разбиение однозначно параметризует тор в $\mathrm{Spin}_{2l+1}(q)$, а также тор в $\mathrm{Spin}_{2l}^{+}(q)$ при $s$ четном

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта № 14–21–00065).

и в $\mathrm{Spin}^-_{2l}(q)$ при $s$ нечетном. Строение этого тора можно описать единообразно во всех трех случаях.

Обозначим $L' = \{l_1, \dots, l_r\}$ и $L'' = \{l_{r+1}, \dots, l_{r+s}\}$. Также положим $\varepsilon_i = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant r$ и $\varepsilon_i = -1$ при $r+1 \leqslant i \leqslant r+s$. Пусть $\mathbb{Z}_n$ обозначает циклическую группу порядка $n$. Доказана

**Теорема 1.** *Пусть $G$ изоморфна $\mathrm{Spin}^\pm_{2l}(q)$ или $\mathrm{Spin}_{2l+1}(q)$ и $T$ — максимальный тор группы $G$, соответствующий разбиению со знаком числа $l$, как выше.*

(i) *Если найдутся нечетные элементы $l_i \in L'$ и $l_j \in L''$, то*

$$T \cong \mathbb{Z}_{(q^{l_i}-1)(q^{l_j}+1)} \times \prod_{k\neq i,j} \mathbb{Z}_{q^{l_k}-\varepsilon_k}.$$

(ii) *Если найдутся нечетное $l_i$ точно в одном из множеств $L'$ или $L''$ и четное $l_j$ в $L''$, то*

$$T \cong \mathbb{Z}_{(q^{l_i}-\varepsilon_i)(q^{l_j}+1)} \times \prod_{k\neq i,j} \mathbb{Z}_{q^{l_k}-\varepsilon_k}.$$

(iii) *Если все элементы из $L'$ четны и $L'' = \varnothing$, то выберем $l_i \in L'$ с минимальной 2-частью. В этом случае*

$$T \cong \mathbb{Z}_{q^{l_i/2}-1} \times \mathbb{Z}_{q^{l_i/2}+1} \times \prod_{k\neq i} \mathbb{Z}_{q^{l_k}-1}.$$

(iv) *В остальных случаях*

$$T \cong \prod_{k} \mathbb{Z}_{q^{l_k}-\varepsilon_k}.$$

(*Во всех произведениях выше $1 \leqslant k \leqslant r+s$.*)

Отметим, что для группы $\mathrm{Spin}^+_{2l}(q)$ в случае (iii), который возможен только при $l$ четном, существует два класса $\sigma$-сопряженности группы Вейля, ассоциированных с каждым разбиением $l$, однако соответствующие торы будут изоморфны, как покажем ниже. Также отметим, что в теореме нет ограничений на параметры $q$ и $l$, хотя для малых $l$ строение максимальных торов групп $\mathrm{Spin}^\pm_{2l}(q)$ и $\mathrm{Spin}_{2l+1}(q)$ также может быть получено из известных результатов ввиду исключительных изоморфизмов

$$\mathrm{Spin}^\pm_2(q) \cong \mathbb{Z}_{q\mp1}, \quad \mathrm{Spin}_3(q) \cong \mathrm{SL}_2(q),$$
$$\mathrm{Spin}^+_4(q) \cong \mathrm{SL}_2(q)\times\mathrm{SL}_2(q), \quad \mathrm{Spin}^-_4(q) \cong \mathrm{SL}_2(q^2), \quad \mathrm{Spin}_5(q) \cong \mathrm{Sp}_4(q),$$
$$\mathrm{Spin}^+_6(q) \cong \mathrm{SL}_4(q), \quad \mathrm{Spin}^-_6(q) \cong \mathrm{SU}_4(q).$$

Аналогично при $q$ четном группы $\mathrm{Spin}^\pm_{2l}(q)$ и $\mathrm{Spin}_{2l+1}(q)$ изоморфны соответственно $\Omega^\pm_{2l}(q)$ и $\Omega_{2l+1}(q)$, максимальные торы которых известны [1, теоремы 3, 7]. В этом случае все торы полностью разлагаются, как в п. (iv).

Если $q$ нечетно и в предположениях п. (i) также найдется четное $l_k$ в $L''$, то тор $T$ допускает разложение, как в п. (ii), а именно

$$T \cong \mathbb{Z}_{(q^{l_t}-\varepsilon_t)(q^{l_k}+1)} \times \prod_{n\neq k,t} \mathbb{Z}_{q^{l_n}-\varepsilon_n},$$

где $t \in \{i,j\}$ такое, что $q \equiv \varepsilon_t \pmod 4$. Это следует из леммы 5(vi) ниже.

Еще одно замечание состоит в том, что ввиду двойственности алгебраических групп теорему 1 можно также использовать для определения строения максимальных торов конечных присоединенных групп типа $D_l$, которые двойственны универсальным типа $D_l$ и изоморфны $PCO^{\pm}_{2l}(q)^{\circ}$, а также присоединенных групп типа $C_l$, которые двойственны универсальным типа $B_l$ и изоморфны $PCSp_{2l}(q)$ (подробнее см. в [3, разд. 1.19, 4.4]).

В качестве примера в табл. 1 ниже приводим явное строение представителей классов сопряженности максимальных торов групп $\mathrm{Spin}^{\pm}_8(q)$ и $\mathrm{Spin}_9(q)$.

## 2. Предварительные замечания

Напомним, что спинорные группы классически определяются через алгебры Клиффорда (см., например, [4, разд. 4.8]). Однако мы используем их отождествление с универсальными группами Шевалле, которое более подходит для наших целей (см. [3, 5, 6]).

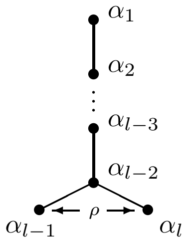


Рис. 1. $D_l$.

Как выше, пусть $\mathbb{G}$ — односвязная простая линейная алгебраическая группа типа $D_l$ или $B_l$ над алгебраически замкнутым полем $F$ положительной характеристики $p$. Будем считать, что $l \geqslant 2$. Обозначим через $\Phi$ корневую систему группы $\mathbb{G}$ с множеством фундаментальных корней $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ и диаграммой Дынкина, как на рис. 1 или 2. Можно рассматривать $\mathbb{G}$ как группу Шевалле, порожденную символами $x_\alpha(t)$, $t \in F$, и $\alpha \in \Phi$, которые удовлетворяют соотношениям Шевалле. Известно, что $\mathbb{G}$ изоморфна $\mathrm{Spin}_{2l}(F)$ или $\mathrm{Spin}_{2l+1}(F)$ в случаях $D_l$ и $B_l$ соответственно. Подробности см. в [6, теоремы 1.10.7, 1.12.1].

Для $q = p^m$ пусть $\varphi_q$ — полевой автоморфизм группы $\mathbb{G}$, действующий на порождающих по правилу $\varphi_q : x_\alpha(t) \mapsto x_\alpha(t^q)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in F$, а в случае $D_l$ пусть $\gamma_\rho$ — графовый автоморфизм группы $\mathbb{G}$, ассоциированный с двукратной симметрией $\rho : \alpha_{l-1} \leftrightarrow \alpha_l$, $\rho : \alpha_i \mapsto \alpha_i$, $i < l-1$, диаграммы Дынкина, который действует на порождающих по правилу $\gamma_\rho : x_\alpha(t) \mapsto x_{\rho(\alpha)}(t)$, $\alpha \in \pm\Pi$, $t \in F$. В случае $D_l$ пусть $\sigma$ обозначает $\varphi_q$ или $\varphi_q\gamma_\rho$. Тогда группа $G = C_{\mathbb{G}}(\sigma)$ будет изоморфна $\mathrm{Spin}^{+}_{2l}(q)$ или $\mathrm{Spin}^{-}_{2l}(q)$ соответственно. В случае $B_l$ пусть $\sigma$ обозначает $\varphi_q$. Тогда группа $G = C_{\mathbb{G}}(\sigma)$ будет изоморфна $\mathrm{Spin}_{2l+1}(q)$. Существуют короткие точные последовательности

$$1 \to Z_1 \to \mathrm{Spin}^{\varepsilon}_{2l}(q) \to \mathrm{P}\Omega^{\varepsilon}_{2l}(q) \to 1, \quad 1 \to Z_2 \to \mathrm{Spin}_{2l+1}(q) \to \Omega_{2l+1}(q) \to 1,$$

где $\varepsilon = \pm$, и группа $Z_1 = \mathrm{Z}\big(\mathrm{Spin}^{\varepsilon}_{2l}(q)\big)$ изоморфна $\mathbb{Z}^2_{(2,q-1)}$ при $\varepsilon = +$ и $l$ четном и изоморфна $\mathbb{Z}_{(4,q^l-\varepsilon)}$ в противном случае, а группа $Z_2 = \mathrm{Z}(\mathrm{Spin}_{2l+1}(q))$ изоморфна $\mathbb{Z}_{(2,q-1)}$.

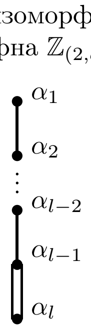


Рис. 2. $B_l$.

Пусть $\mathbb{T}$ — $\sigma$-инвариантный максимальный тор группы $\mathbb{G}$. Явно тор $\mathbb{T}$ можно выбрать как группу, порожденную элементами $h_\alpha(t) = n_\alpha(t)n_\alpha(-1)$, где $n_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(t^{-1})x_\alpha(t)$ для $\alpha \in \Phi$, $t \in F^\times$. Для каждого $\alpha \in \Phi$ корневая подгруппа $\langle x_\alpha(t) \mid t \in F\rangle$ будет $\mathbb{T}$-инвариантной. В частности, $x_\alpha(t)^\tau = x_\alpha(r_\alpha(\tau)t)$ для всех $\tau \in \mathbb{T}$, $t \in F$ и подходящего элемента $r_\alpha$ группы характеров $X = \mathrm{Hom}(\mathbb{T}, F^\times)$, который можно отождествить с $\alpha$. Фундаментальные корни $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ образуют $\mathbb{R}$-базис пространства $X \otimes \mathbb{R}$. Аналогично отображение $h_\alpha$ лежит в группе кохарактеров $Y = \mathrm{Hom}(F^\times, \mathbb{T})$ и может быть отождествлено с кокорнем $\alpha^\vee$, соответствующим корню $\alpha$. Существует естественное билинейное спаривание $X \times Y \to \mathbb{Z}$, $(\chi, \theta) \mapsto \langle \chi, \theta \rangle$, такое, что $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ для всех $\alpha \in \Phi$. Поскольку $\mathbb{G}$ односвязна, кокорни $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_l^\vee$ образуют $\mathbb{Z}$-базис решетки $Y$. Двойственный $\mathbb{Z}$-базис $\omega_1, \dots, \omega_l$ решетки $X$, т. е. такой, что $\langle \omega_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, l$, называется *множеством фундаментальных весов*.

Группа Вейля $W = N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ естественно действует на торе $\mathbb{T}$. Поскольку $\mathbb{T}$ выбран $\sigma$-инвариантным, возникает индуцированное действие $\sigma$ на $W$ и (левое) действие $\sigma$ и $W$ на $X$ по правилу: ${}^u\chi(\tau) = \chi(\tau^u)$ для всех $\chi \in X$, $\tau \in \mathbb{T}$, $u \in W \leftthreetimes \langle \sigma \rangle$. В базисе $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ матрица преобразования $\sigma$ будет либо $\operatorname{diag}(q, \dots, q)$ при $\sigma = \varphi_q$ либо матрицей $M$, определенной в (8), при $\sigma = \varphi_q \gamma_\rho$ в случае $D_l$.

Два элемента $w, w' \in W$ называются *$\sigma$-сопряженными*, если найдется $x \in W$ такой, что $w' = x^{-1} w x^\sigma$. Так возникает отношение эквивалентности на $W$, классы которого называются *классами $\sigma$-сопряженности*. Отображение $w \mapsto w\sigma^{-1}$ индуцирует поэлементную биекцию между классами $\sigma$-сопряженности группы $W$ и обычными классами $W$-сопряженности в смежном классе $W\sigma^{-1}$.

Пусть $\pi : N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T}) \to W$ — естественный эпиморфизм. Если элемент $g \in G$ выбран так, что тор ${}^g\mathbb{T} = g\mathbb{T}g^{-1}$ будет $\sigma$-инвариантным, то $g^{-1}g^\sigma \in N_{\mathbb{G}}(\mathbb{T})$.

**Лемма 2** [5, предложения 3.2.3, 3.3.3, 3.3.4].

(i) *Отображение ${}^g\mathbb{T} \to \pi(g^{-1}g^\sigma)$ определяет биекцию между классами $G$-сопряженности $\sigma$-инвариантных максимальных торов группы $\mathbb{G}$ и классами $\sigma$-сопряженности группы $W$.*

(ii) *Если ${}^g\mathbb{T}$ — $\sigma$-инвариантный тор, то максимальный тор $C_{{}^g\mathbb{T}}(\sigma)$ изоморфен $X/X^{\sigma w^{-1} - 1}$, где $w = \pi(g^{-1}g^\sigma)$.*

Евклидово пространство $X \otimes \mathbb{R}$ обладает ортонормированным базисом $\nu_1$, $\dots, \nu_l$, для которого

$$\alpha_i = \nu_i - \nu_{i+1},\ i = 1, \dots, l-1, \quad \alpha_l = \nu_{l-1} + \nu_l, \tag{1}$$

$$\alpha_i = \nu_i - \nu_{i+1},\ i = 1, \dots, l-1, \quad \alpha_l = \nu_l \tag{2}$$

в случаях $D_l$ и $B_l$ соответственно, что позволяет естественно вложить корневую систему $\Phi(D_l)$ как подсистему в $\Phi(B_l)$.

Группа Вейля $W$ обычно отождествляется с группой, порожденной отражениями $w_{\alpha_i}$ пространства $X \otimes \mathbb{R}$ в фундаментальных корнях. Будучи записанной в базисе $\nu_1, \dots, \nu_l$, группа $W$ точно представляется мономиальными матрицами размера $l \times l$ с ненулевыми элементами $\pm 1$. Существует взаимно однозначное соответствие между такими матрицами и *подстановками со знаком*, т. е. элементами $\theta$ группы $\operatorname{Sym}(\{\pm 1, \dots, \pm l\})$, удовлетворяющими $\theta(-i) = -\theta(i)$, $i = 1, \dots, l$, которая изоморфна группе Вейля $W(B_l)$. Любая подстановка со знаком $\theta$ однозначно представляется в виде произведения положительных и отрицательных циклов вида $(i_1, \dots, i_k)$ и $\overline{(i_1, \dots, i_k)}$, которые представляют подстановки

$$i_1 \to \dots \to i_k \to i_1, \quad i_1 \to \dots \to i_k \to -i_1 \tag{3}$$

соответственно. *Разбиение со знаком* $l = l' + l''$, положительной частью $l' = l_1 + \dots + l_r$ и отрицательной частью $l'' = l_{r+1} + \dots + l_{r+s}$ определяет *циклический тип* $[l_1, \dots, l_r, \bar{l}_{r+1}, \dots, \bar{l}_{r+s}]$ подстановки $\theta$, если разложение $\theta$ в произведение циклов со знаком содержит положительные циклы длин $l_i$, $1 \leqslant i \leqslant s$, и отрицательные циклы длин $l_i$, $r + 1 \leqslant i \leqslant r + s$.

Группа $W(D_l)$ содержится в $W(B_l)$ в качестве подгруппы индекса 2, состоящей из элементов с четным числом отрицательных циклов.

**Лемма 3** [7, предложения 24, 25]. *Два элемента $W(B_l)$ сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый циклический тип. Класс сопряженности группы $W(B_l)$, содержащийся в $W(D_l)$, остается полным классом $W(D_l)$-сопряженности, за исключением случая, когда он состоит из элементов, все циклы которых положительны и имеют четную длину, и тогда он разбивается на два $W(D_l)$-класса.*

В качестве стандартного представителя $W(B_l)$-класса циклического типа $[l_1,\dots,\overline{l}_{r+s}]$ выберем подстановку

$$(1,\dots,l_1)(l_1+1,\dots,l_1+l_2)\dots\overline{(l-l_{r+s}+1,\dots,l)}.$$

Если все $l_i$ четны и $l''=0$, то $W(B_l)$-класс типа $[l_1,\dots,l_r]$ со стандартным представителем $\theta=(1,\dots,l_1)\dots(\dots,l)$ разбивается на два $W(D_l)$-класса типов $[l_1,\dots,l_r]^{\pm}$ со стандартными представителями $\theta^+=\theta$ и $\theta^-=(1,\dots,l_1)\dots(\dots,l-1,-l)$. Это так, поскольку $\theta^+$ и $\theta^-$ сопряжены инволюцией $\overline{(l)}\in W(B_l)\setminus W(D_l)$.

Из вышеизложенного вытекает естественный способ отождествить матрицы преобразований $\sigma w^{-1}$ в $\mathbb{Z}$-базисе $\omega_1,\dots,\omega_l$ решетки $X$, где $w$ пробегает представителей классов $\sigma$-сопряженности $W$, с матрицами стандартных представителей подстановок со знаком. (В самом деле, по (1), (2) и (8) $\sigma$-сопряженность в $W$ является обычной сопряженностью при $\sigma=\varphi_q$ и $\overline{(l)}$-сопряженностью при $\sigma=\varphi_q\gamma_\rho$ в случае $D_l$, а по [7, с. 45] каждый элемент группы Вейля сопряжен со своим обратным.)

Нам потребуется ряд теоретико-числовых результатов. Для натурального числа $n$ пусть $n_2$ обозначает 2-часть $n$, т. е. наибольшую степень числа 2, делящую $n$. НОД чисел $a$ и $b$ обозначается через $(a,b)$.

**Лемма 4.** *Для натуральных $a,b$ если $a_2\geqslant b_2$, то $(2a,b)=(a,b)$.*

Доказательство. Имеем $(a,b)_2=\min\{a_2,b_2\}=b_2=\min\{2a_2,b_2\}=(2a,b)_2$, поскольку $a_2\geqslant b_2$. Отсюда вытекает требуемое. □

**Лемма 5.** *Пусть $a$ — нечетное натуральное число.*

(i) *Для любого натурального $n$*

$$(a^n-1)_2=\begin{cases} n_2(a+1)_2, & \text{если } n \text{ четно и } a\equiv -1 \pmod 4,\\ n_2(a-1)_2 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$$(a^n+1)_2=\begin{cases} (a+1)_2, & \text{если } n \text{ нечетно,}\\ 2, & \text{если } n \text{ четно.}\end{cases}$$

(ii) *Если $n_1,n_2$ нечетны и $\varepsilon=\pm1$, то $(a^{n_1}-\varepsilon,a^{n_2}+\varepsilon)=2$.*

(iii) *Если $n_1$ четно и $n_2$ нечетно, то $(a^{n_1}+1,a^{n_2}\pm1)=2$.*

(iv) *Если $n_1,n_2$ нечетны и $\varepsilon=\pm1$, то $(a^{n_1}+\varepsilon,a^{n_2}+\varepsilon)=a^{(n_1,n_2)}+\varepsilon$.*

(v) *Если $n_1$ четно, $n_2$ нечетно и $\varepsilon=\pm1$, то $(a^{n_1}-1,a^{n_2}+\varepsilon)=a^{(n_1,n_2)}+\varepsilon$.*

(vi) *Если $n_1,n_2$ нечетны, $n_3$ четно и $a\equiv\varepsilon \pmod 4$, где $\varepsilon=\pm1$, то*

$$\mathbb{Z}_{(a^{n_1}+\varepsilon)(a^{n_2}-\varepsilon)}\times\mathbb{Z}_{a^{n_3}+1}\cong\mathbb{Z}_{a^{n_1}+\varepsilon}\times\mathbb{Z}_{(a^{n_2}-\varepsilon)(a^{n_3}+1)}.$$

Доказательство. (i) См. [8, лемма 8]. (ii)–(v) См. [9, лемма 6].

(vi) Из (ii), (iii) следует, что $2'$-части чисел $a^{n_1}+\varepsilon$, $a^{n_2}-\varepsilon$, $a^{n_3}+1$ попарно взаимно просты. Поскольку по предположению $(a^{n_1}+\varepsilon)_2=(a^{n_3}+1)_2=2$, получаем требуемое. □

Во всех матрицах ниже точки вместо элементов обозначают нули.

**Лемма 6.** *Пусть $a, b, c$ — целые числа.*

(i) *Если $(a,b)=1$ и*

$$A=\begin{pmatrix} a & . \\ . & b \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & . \\ . & ab \end{pmatrix},$$

*то положим*

$$P=\begin{pmatrix} 1 & n \\ -b & am \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} m & -bn \\ 1 & a \end{pmatrix},\tag{4}$$

*где $m, n$ такие, что $am+bn=1$.*

(ii) *Если*

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ . & b \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & . \\ . & ab \end{pmatrix},$$

*то положим*

$$P=\begin{pmatrix} 1 & . \\ -b & 1 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} . & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}.\tag{5}$$

(iii) *Если $(a,b)$ делит $c$ и*

$$A=\begin{pmatrix} a & c \\ . & b \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a & . \\ . & b \end{pmatrix},$$

*то положим*

$$P=\begin{pmatrix} 1 & -nz \\ . & 1 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} 1 & -mz \\ . & 1 \end{pmatrix},\tag{6}$$

*где $x=a/(a,b)$, $y=b/(a,b)$, $z=c/(a,b)$ и $m, n$ такие, что $xm+yn=1$.*

(iv) *Если $(a,b)=1$, $c$ нечетно и*

$$A=\begin{pmatrix} 2a & c \\ . & 2b \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & . \\ . & 4ab \end{pmatrix},$$

*то положим*

$$P=\begin{pmatrix} -1 & n(c-1)/2 \\ -2b & 1+nb(c-1) \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} m(c-1)/2 & -1-ma(c-1) \\ -1 & 2a \end{pmatrix},\tag{7}$$

*где $m, n$ такие, что $am+bn=1$.*

*Тогда во всех четырех случаях $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ и $PAQ=B$.*

Доказательство проводится непосредственной проверкой. □

Для матрицы $A$ обозначим через $A^\top$ матрицу, транспонированную к $A$. Следующие матрицы упомянуты в других частях статьи:

$$M=\begin{pmatrix} q & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & q & & \\ & & & . & q \\ & & & q & . \end{pmatrix},\tag{8}$$

$$S_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 & . & & & \\ . & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}_{l\times l},\quad S_2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & . & & & \\ . & 1 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & -1 \\ & & & & . & 2 \end{pmatrix}_{l\times l},\tag{9}$$

$$R_{\varepsilon k} = \begin{pmatrix} . & 1 & . & & \\ . & . & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ . & . & . & & 1 \\ \varepsilon & . & . & & . \end{pmatrix}_{k\times k}, \quad B_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_{-1} & . & & . & -(1+\varepsilon_{-1})/2 \\ \varepsilon_{-1} & . & & . & -(1+\varepsilon_{-1})/2 \\ & & \dots & & \\ \varepsilon_{-1} & . & & . & -(1+\varepsilon_{-1})/2 \\ \varepsilon_{-1} & . & & . & -(\varepsilon_i+\varepsilon_{-1})/2 \end{pmatrix}_{l_i\times l_{-1}}, \tag{10}$$

$$J = \begin{pmatrix} . & . & & . & 1 \\ . & . & & . & 1 \\ & & \dots & & \\ . & . & & . & 1 \end{pmatrix}_{l\times l}, \quad P_{\varepsilon k} = \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 & & q^{k-2} & . \\ . & 1 & q & & q^{k-3} & . \\ . & . & 1 & & q^{k-4} & . \\ & & & \ddots & & \\ . & . & . & & 1 & . \\ q & q^2 & q^3 & & q^{k-1} & \varepsilon \end{pmatrix}_{k\times k}. \tag{11}$$

Отметим, что возможны следующие вырожденные случаи:

$$R_{\varepsilon 1} = P_{\varepsilon 1} = (\varepsilon),$$

$$B_i = (-(1-\varepsilon_{-1})/2, \dots, -(1-\varepsilon_{-1})/2, -(\varepsilon_i-\varepsilon_{-1})/2)^\top, \quad \text{если } \ l_{-1} = 1,$$

$$B_i = (\varepsilon_{-1}, 0, \dots, 0, -(\varepsilon_i+\varepsilon_{-1})/2), \quad \text{если } l_i = 1,$$

$$B_i = (-(\varepsilon_i-\varepsilon_{-1})/2), \quad \text{если } l_{-1} = l_i = 1.$$

### 3. Доказательство основной теоремы

Фиксируем циклический тип $[l_1, \dots, \bar{l}_{r+s}]$ и положим $\varepsilon_i = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant r$ и $\varepsilon_i = -1$ при $r+1 \leqslant i \leqslant r+s$. В базисе $\nu_1, \dots, \nu_l$ матрица соответствующего стандартного представителя $\theta$ равна $R = \bigoplus R_{\varepsilon_i l_i}$, где $R_{\varepsilon k}$ — матрица (10) циклов со знаком (3) при $\varepsilon = \pm 1$ соответственно. (В исключительном случае $\theta = \theta^-$ эта матрица указана в лемме 7.) Наша цель — диагонализовать целочисленную матрицу

$$qSRS^{-1} - E, \tag{12}$$

соответствующую преобразованию $\sigma w^{-1} - 1$, где $E$ — единичная матрица и $S^{-1}$ — матрица перехода к базису $\omega_1, \dots, \omega_l$. По лемме 2 это дает циклическое строение максимального тора группы $\mathrm{Spin}_{2l}^{\pm}(q)$ или $\mathrm{Spin}_{2l+1}(q)$, соответствующего выбранному циклическому типу.

Сначала рассмотрим тип $D_l$. В этом случае матрица $S$ совпадает с $S_1$, указанной в (9) (см. [10, табл. IV(VI)]). В исключительном случае имеет место

**Лемма 7.** *Если $s = 0$ и все $l_i$ четны, то максимальные торы группы $\mathrm{Spin}_{2l}^{+}(q)$, соответствующие двум циклическим типам $[l_1, \dots, l_r]^{\pm}$, изоморфны.*

Доказательство. Поскольку $\theta^+$ и $\theta^-$ сопряжены с помощью $\overline{(l)}$, соответствующими матрицами будут $qSRS^{-1} - E$ и $qSR_0RR_0^{-1}S^{-1} - E$, где $R_0 = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1)$ — матрица подстановки $\overline{(l)}$. Так как эти матрицы сопряжены матрицей $SR_0S^{-1}$, которая целочисленная и унимодулярная, получаем требуемое. $\square$

Две целочисленные матрицы $M_1$ и $M_2$ размера $l \times l$ назовем *эквивалентными*, если существуют $P, Q \in \mathrm{GL}_l(\mathbb{Z})$ такие, что $PM_1Q = M_2$. Поскольку умножение на $P$ (соответственно $Q$) равнозначно применению к $M_1$ элементарных преобразований строк (столбцов), в случае $Q = E$ (соответственно $P = E$) будем говорить, что $M_1$ и $M_2$ *строчно- (столбцово-)эквивалентны*.

Так как $S$ строчно-эквивалентна матрице $E+J$, где $J$ указана в (11), получаем, что (12) эквивалентна матрице

$$q(E+J)R\left(E-\frac{1}{2}J\right)-E=qR-E+qB, \tag{13}$$

где $qR-E$ блочно-диагональна, а $B$ нулевая, за исключением последнего блочного столбца с элементами $B_1,\dots,B_{r+s}$. ($B_i$ определяется в (10), где использованы сокращенные обозначения $\varepsilon_{-i}=\varepsilon_{r+s+1-i}$ и $l_{-i}=l_{r+s+1-i}$ для $i=1,2,\dots$.) Умножая (13) слева на блочно-диагональную матрицу $\operatorname{diag}(P_{\varepsilon_1 l_1},\dots,P_{\varepsilon_{-2}l_{-2}},P'_{\varepsilon_{-1}l_{-1}})$, где $P_{\varepsilon k}$ определена в (11) и $P'_{\varepsilon_{-1}l_{-1}}$ получена из $P_{\varepsilon_{-1}l_{-1}}$ заменой последней строки на $(0,\dots,0,\varepsilon_{-1})$, приходим к матрице, у которой какие-то столбцы содержат $-1$ на диагонали и остальные нули. Используя их для обращения в нуль ненулевых элементов в строках с помощью преобразований столбцов, получим (после удаления единичных строк и столбцов) матрицы

$$\left(\begin{array}{c|cc} & a_1 & b_1\\ D & \vdots & \vdots\\ & a_{-2} & b_{-2}\\ \hline \cdot\ \cdots\ \cdot & a & b\\ \cdot\ \cdots\ \cdot & 2q & -q-\varepsilon_{-1}\end{array}\right) \quad \text{или} \quad \left(\begin{array}{c|c} & a_1+b_1\\ D & \vdots\\ & a_{-2}+b_{-2}\\ \hline \cdot\ \cdots\ \cdot & q-\varepsilon_{-1}\end{array}\right) \tag{14}$$

в случаях $l_{-1}>1$ и $l_{-1}=1$ соответственно, где

$$D=\operatorname{diag}(q^{l_1}-\varepsilon_1,\dots,q^{l_{-2}}-\varepsilon_{-2}),$$
$$a_i=\varepsilon_{-1}(\varepsilon_i q+q^2+\dots+q^{l_i}),\quad i=1,2,\dots,$$
$$b_i=-((1+\varepsilon_{-1}\varepsilon_i)q+(1+\varepsilon_{-1})(q^2+\dots+q^{l_i}))/2,\quad i=1,2,\dots,$$
$$a=-1+\varepsilon_{-1}(q+q^2+\dots+q^{l_{-1}-1}),$$
$$b=-(1+\varepsilon_{-1})(q+\dots+q^{l_{-1}-1})/2+q^{l_{-1}-1}.$$

Как отмечено во введении, теорема справедлива для четного $q$. Следовательно, будем далее предполагать, что $q$ нечетно.

Если $l_{-1}=1$, то во второй матрице в (14), прибавив последнюю строку, умноженную на

$$\begin{cases} ((1-\varepsilon_{-1})(q+q^3+\dots+q^{l_i-1})+\varepsilon_{-1}(1-\varepsilon_i))/2, & \text{если } l_i \text{ четно},\\ ((1-\varepsilon_{-1})(q^2+q^4+\dots+q^{l_i-1})+1-\varepsilon_{-1}\varepsilon_i)/2, & \text{если } l_i \text{ нечетно},\end{cases}$$

к $i$-й строке, $i=1,2,\dots$, получим

$$\left(\begin{array}{c|c} & c_1\\ D & \vdots\\ & c_{-2}\\ \hline \cdot\ \cdots\ \cdot & q-\varepsilon_{-1}\end{array}\right), \tag{15}$$

где $c_i=(\varepsilon_i-1)/2$ при $l_i$ четном и $(\varepsilon_i-\varepsilon_{-1})/2$ при $l_i$ нечетном. Покажем ниже, что один подслучай общего случая $l_{-1}>1$ сводится к такой же матрице и, значит, может быть рассмотрен одновременно с этим случаем.

Предположим, что $l_{-1}>1$. Первая матрица в (14) после умножения справа на

$$\left(\begin{array}{c|cc} & (q-1)/2 & \cdot\\ E & \vdots & \vdots\\ & (q-1)/2 & \cdot\\ \hline \cdot\ \cdots\ \cdot & (q+\varepsilon_{-1})/2 & -1\\ \cdot\ \cdots\ \cdot & q & -2\end{array}\right)$$

становится матрицей, последнюю строку которой $(0,\dots,0,2\varepsilon_{-1})$ можно использовать для приведения ее преобразованиями строк и столбцов к верхне-треугольному виду

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} D & & & (q^{l_1}-\varepsilon_1)/2 & d_1 \\ & & & \dots & \vdots \\ \hline \cdot & \cdots & \cdot & (q^{l_{-1}}-\varepsilon_{-1})/2 & d_{-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & 2 \end{array}\right), \tag{16}$$

где $d_i=0$ при $l_i$ четном и 1 при $l_i$ нечетном.

Сначала предположим, что все $l_i$ четны и все $\varepsilon_i$ равны 1. Не ограничивая общности, можно считать, что $l_{-1}$ имеет наименьшую 2-часть. Если $r+s>1$, то умножим (16) слева и справа на $\operatorname{diag}(1,\dots,1,P,1)$ и $\operatorname{diag}(1,\dots,1,Q,1)$ соответственно, где $P,Q$ указаны в (6) для $a=q^{l_{-2}}-1$, $b=(q^{l_{-1}}-1)/2$ и $c=a/2$. Заметим, что $(a/2)_2\geqslant b_2$ по предположению и лемме 5(i). Значит, из леммы 4 следует $(a,b)=(a/2,b)$, а это число делит $c$. По лемме 6(iii) в нижнем правом углу полученной матрицы будет стоять $\operatorname{diag}(a,b,2)$, а все остальные элементы останутся неизменными, что вытекает из явного вида $Q$. Повторив, если необходимо, эту процедуру, можно аналогично обратить в нуль все ненулевые внедиагональные элементы матрицы (16), приведя ее таким образом к эквивалентной диагональной форме $\operatorname{diag}(q^{l_1}-1,\dots,q^{l_{-2}}-1,(q^{l_{-1}}-1)/2,2)$. Остается заметить, что

$$\mathbb{Z}_{(q^{l_{-1}}-1)/2}\times\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}_{q^{l_{-1}/2}-1}\times\mathbb{Z}_{q^{l_{-1}/2}+1},$$

откуда вытекает п. (iii) теоремы.

Следовательно, можем предполагать, что либо найдется нечетное $l_i$ (и тогда без ограничения общности можно считать, что $l_{-1}$ нечетно), либо все $l_i$ четны и для некоторого $i$ справедливо $\varepsilon_i=-1$ (и тогда можно считать, что $i=-1$). Эти допущения действительно не ограничивают общности, поскольку можно, если необходимо, изменить порядок компонент исходного разбиения $l$ со знаком, при этом сохранив соответствующий циклический тип, а значит, и класс изоморфизма рассматриваемого тора. В обоих случаях умножим (16) слева и справа на $\operatorname{diag}(1,\dots,1,P)$ и $\operatorname{diag}(1,\dots,1,Q)$, где $P$ и $Q$ указаны в (5) и (4) в первом и втором случаях соответственно, где $a=(q^{l_{-1}}-\varepsilon_{-1})/2$ и $b=2$. По лемме 6, которая применима во втором случае, поскольку $((q^{l_{-1}}+1)/2,2)=1$, получаем следующую матрицу (после удаления строки и столбца с ведущим элементом 1 на диагонали):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & f_1 \\ & D & & \vdots \\ & & & f_{-2} \\ \hline \cdot & \cdots & \cdot & q^{l_{-1}}-\varepsilon_{-1} \end{array}\right), \tag{17}$$

где $f_i=d_i(q^{l_{-1}}-\varepsilon_{-1})/2-d(q^{l_i}-\varepsilon_i)/2$ и $d=1$ или $2n$ в первом и втором случаях соответственно. Рассмотрим эти случаи отдельно.

Случай I. Предположим, что $l_{-1}$ нечетно. Тогда $d=1$. Заметим, что если положим $l_{-1}=1$, то матрица (17) будет строчно-эквивалентна матрице (15), что можно проверить, прибавив к $i$-й строке последнюю строку, умноженную на $(q+\varepsilon_{-1})(q^{l_i-2}+q^{l_i-4}+\dots+q^{d_i})/2$. Таким образом мы включим отложенный выше случай $l_{-1}=1$ в дальнейшее рассмотрение.

Случай Ia. Предположим, что найдется нечетное $l_j$ такое, что $\varepsilon_j = -\varepsilon_{-1}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $j = -2$. В этом случае $f_{-2} = -a + b$ нечетно, где $a = (q^{l_{-2}} + \varepsilon_{-1})/2$ и $b = (q^{l_{-1}} - \varepsilon_{-1})/2$. Заметим также, что $(a, b) = 1$ по лемме 5(ii). Значит, можно применить лемму 6(iv), где $c = -a + b$. Умножив (17) на $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, P)$ и $\operatorname{diag}(1, \dots, 1, Q)$, где $P$ и $Q$ указаны в (7), и удалив после этого строку и столбец с диагональным ведущим элементом 1, получаем матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} q^{l_1} - \varepsilon_1 & & & g_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & q^{l_{-3}} - \varepsilon_{-3} & g_{-3} \\ \hline . & \cdots & . & (q^{l_{-2}} - \varepsilon_{-2})(q^{l_{-1}} - \varepsilon_{-1}) \end{array}\right), \tag{18}$$

где $g_i = 2af_i = d_i \cdot 2ab - a(q^{l_i} - \varepsilon_i)$. Очевидным преобразованием столбцов обратим в нуль слагаемое $a(q^{l_i} - \varepsilon_i)$, а значит, и $g_i$ при $l_i$ четном. Если $l_i$ нечетно, то $d_i = 1$ и подматрицу $\begin{pmatrix} q^{l_i} - \varepsilon_i & 2ab \\ . & 4ab \end{pmatrix}$ можно диагонализовать по лемме 6(iii), используя матрицы $P$ и $Q$, указанные в (6). Заметим, что лемма 6(iii) может быть применима, поскольку

$$(2ab)_2 = \frac{1}{2}(q^{l_{-2}} + \varepsilon_{-1})_2 (q^{l_{-1}} - \varepsilon_{-1})_2 = \frac{1}{2}(q^2 - 1)_2 \geqslant (q - \varepsilon_i)_2 = (q^{l_i} - \varepsilon_i)_2$$

и $l_i$ нечетно, что по лемме 4 влечет равенство $(4ab, q^{l_i} - \varepsilon_i) = (2ab, q^{l_i} - \varepsilon_i)$, а его правая часть делит $2ab$. Отметим, что такая диагонализация не изменит остальные элементы матрицы (18) и, значит, может быть произведена независимо для всех ненулевых $g_i$, что приведет матрицу к диагональному виду. Тем самым доказан п. (i) теоремы.

Случай Ib. Предположим, что для всех нечетных $l_j$ справедливо $\varepsilon_j = \varepsilon_{-1}$ и найдется четное $l_j$ такое, что $\varepsilon_j = -1$. Опять можно считать, что $j = -2$. В этом случае $f_{-2} = -a$ нечетно, где $a = (q^{l_{-2}} + 1)/2$. Положим $b = (q^{l_{-1}} - \varepsilon_{-1})/2$. Заметим, что $(a, b) = 1$ по лемме 5(iii). Следовательно, снова применив лемму 6(iv), где $c = -a$, приведем матрицу (17) к виду (18), где $g_i = 2af_i$. Остальное рассуждение такое же, как выше, кроме того факта, что применимость леммы 6(iii) в конце обеспечивается цепочкой

$$(2ab)_2 = \frac{1}{2}(q^{l_{-2}} + 1)_2 (q^{l_{-1}} - \varepsilon_{-1})_2 = (q - \varepsilon_{-1})_2 = (q - \varepsilon_i)_2 = (q^{l_i} - \varepsilon_i)_2,$$

поскольку $l_{-1}$ и $l_i$ нечетны и $\varepsilon_{-1} = \varepsilon_i$ по предположению. Этим доказан п. (ii) теоремы.

Случай Ic. Предположим, что для каждого нечетного $l_j$ справедливо $\varepsilon_j = \varepsilon_{-1}$, а для каждого четного $l_j$ справедливо $\varepsilon_j = 1$.

Если $l_j$ нечетно, то $f_j = -a + b$, где $a = (q^{l_j} - \varepsilon_{-1})/2$ и $b = (q^{l_{-1}} - \varepsilon_{-1})/2$. По лемме 5(iv) видим, что $a/(a, b)$ и $b/(a, b)$ нечетны. Значит, $2(a, b)$ делит $-a + b$, и подматрицу

$$\begin{pmatrix} 2a & f_j \\ . & 2b \end{pmatrix} \tag{19}$$

матрицы (17) можно диагонализовать по лемме 6(iii), используя $P$ и $Q$, указанные в (6). Заметим, что в силу вида матрицы $Q$ эта диагонализация не влияет на остальные элементы матрицы (17) и, значит, может быть повторена независимо для всех нечетных $l_j$.

Аналогично если $l_j$ четно, то имеем $f_j = -a$, где $a = (q^{l_j} - 1)/2$. Положим $b = (q^{l_{-1}} - \varepsilon_{-1})/2$. По лемме 5(v) получаем $2(a, b) = q^{(l_j, l_{-1})} - \varepsilon_{-1}$, где правая часть делит $-a$, поскольку $l_j/(l_j, l_{-1})$ четно. Вновь применив лемму 6(iii) к подматрице (19) независимо для всех четных $l_j$, завершим диагонализацию матрицы (17). Этим доказан п. (iv) теоремы для данного случая.

Случай II. Предположим, что все $l_i$ четны и $\varepsilon_{-1} = -1$. Тогда $d = 2n$ и $f_i = -n(q^{l_i} - \varepsilon_i)$ — число, кратное ведущему диагональному элементу $i$-й строки. Очевидным преобразованием столбцов можно занулить все $f_i$ и привести (17) к диагональной форме. Этим завершается доказательство п. (iv) теоремы.

Теперь рассмотрим тип $B_l$. Покажем, что в этом случае тор выбранного циклического типа изоморфен тору такого же типа в случае $D_l$. В самом деле, матрица $S$ из (12) в случае $B_l$ совпадает с $S_2$, указанной в (9) (см. [10, табл. II(VI)]). Однако очевидно, что $S_2$ строчно-эквивалентна $S_1$, что влечет эквивалентность матрицы (12) такой же матрице в случае $D_l$. Значит, имеет место изоморфизм соответствующих торов. Теорема доказана.

**Таблица 1.** Классы† максимальных торов групп $\mathrm{Spin}_8^{\pm}(q)$, $\mathrm{Spin}_9(q)$

| $\mathrm{Spin}_9(q)$ | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{Spin}_8^{+}(q)$ | | $\mathrm{Spin}_8^{-}(q)$ | |
| $[1,1,1,1]$ | $\mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$ | $[1,1,1,\bar{1}]$ | $\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$ |
| $[1,1,\bar{1},\bar{1}]$ | $\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$ | $[1,\bar{1},\bar{1},\bar{1}]$ | $\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$ |
| $[\bar{1},\bar{1},\bar{1},\bar{1}]$ | $\mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$ | $[2,1,\bar{1}]$ | $\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q^2-1}$ |
| $[2,1,1]$ | $\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$ | $[1,1,\bar{2}]$ | $\mathbb{Z}_{(q^2+1)(q-1)} \times \mathbb{Z}_{q-1}$ |
| $[2,\bar{1},\bar{1}]$ | $\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$ | $[\bar{2},\bar{1},\bar{1}]$ | $\mathbb{Z}_{(q^2+1)(q+1)} \times \mathbb{Z}_{q+1}$ |
| $[1,\bar{2},\bar{1}]$ | $\mathbb{Z}_{q^2+1} \times \mathbb{Z}_{q^2-1}$ | $[2,\bar{2}]$ | $\mathbb{Z}_{q^2+1} \times \mathbb{Z}_{q^2-1}$ |
| $[2,2]^{\pm}$ | $\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$ | $[1,\bar{3}]$ | $\mathbb{Z}_{(q^3+1)(q-1)}$ |
| $[\bar{2},\bar{2}]$ | $\mathbb{Z}_{q^2+1} \times \mathbb{Z}_{q^2+1}$ | $[3,\bar{1}]$ | $\mathbb{Z}_{(q^3-1)(q+1)}$ |
| $[3,1]$ | $\mathbb{Z}_{q^3-1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$ | $[\bar{4}]$ | $\mathbb{Z}_{(q^4+1)}$ |
| $[\bar{3},\bar{1}]$ | $\mathbb{Z}_{q^3+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$ | | |
| $[4]^{\pm}$ | $\mathbb{Z}_{q^2+1} \times \mathbb{Z}_{q^2-1}$ | | |

† Класс [ ] разбивается на подклассы $[\ ]^{\pm}$ только в группе $\mathrm{Spin}_8^{+}(q)$

Благодарность. Автор признателен к.ф.-м.н. А. А. Бутурлакину за полезное обсуждение тематики данной работы, а также анонимному рецензенту за предложения по улучшению первоначального варианта статьи.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Бутурлакин А. А., Гречкосеева М. А.* Циклическое строение максимальных торов в конечных классических группах // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 2. С. 129–156.

**2.** *Deriziotis D. I., Fakiolas A. P.* The maximal tori in the finite Chevalley groups of type $E_6$, $E_7$ and $E_8$ // Commun. Algebra. 1991. V. 19, N 3. P. 889–903.

**3.** *Carter R. W.* Finite groups of Lie type. Conjugacy classes and complex characters. Chichester; New York, etc.: John Wiley & Sons, 1985.

**4.** *Jacobson N.* Basic algebra. II. 2nd ed. New York: W. H. Freeman & Co., 1989.

**5.** *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: John Wiley & Sons, 1972. (Pure Appl. Math.; V. 28).

**6.** *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.* The classification of the finite simple groups. Number 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. (Math. Surveys Monogr.; V. 40.3).

**7.** *Carter R. W.* Conjugacy classes in the Weyl group // Comp. Math. 1972. V. 25, N 1. P. 1–59.

**8.** *Гречкосеева М. А.* Распознавание по спектру конечных простых линейных групп над полями характеристики 2 // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 4. С. 405–427.

**9.** *Zavarnitsine A. V.* Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders // J. Group Theory. 2004. V. 7, N 1. P. 81–97.

**10.** *Бурбаки Н.* Элементы математики. Группы и алгебры Ли. Гл. IV. Группы Коксетера и системы Титса. Гл. V. Группы, порожденные отражениями. Гл. VI. Системы корней. М.: Мир, 1972.


*Статья поступила 19 августа 2014 г., окончательный вариант — 1 декабря 2014 г.*

Заварницин Андрей Витальевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
zav@math.nsc.ru