Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 510.5+512.563

ИНДЕКСНОЕ МНОЖЕСТВО АВТОУСТОЙЧИВЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СИЛЬНЫХ КОНСТРУКТИВИЗАЦИЙ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

С. С. Гончаров,
Н. А. Баженов, М. И. Марчук

Аннотация. Получены точные оценки алгоритмической сложности для классов сильно конструктивизируемых вычислимых моделей, являющихся автоустойчивыми относительно сильных конструктивизаций и принадлежащих следующим естественным классам: булевым алгебрам, дистрибутивным решеткам, кольцам, коммутативным полугруппам, частичным порядкам.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: вычислимая модель, сильно конструктивизируемая модель, автоустойчивость, автоустойчивость относительно сильных конструктивизаций, булева алгебра, дистрибутивная решетка, кольцо, коммутативная полугруппа, частичный порядок, гиперарифметическая иерархия, индексное множество.

Юрию Леонидовичу Ершову к 75-летнему юбилею

Работа посвящена изучению вопросов о существовании характеризации классов вычислимых моделей с заданными свойствами. В исследовании применяется предложенный С. С. Гончаровым и Найт [1] подход, основанный на изучении алгоритмической сложности индексных множеств классов вычислимых моделей. В данной работе получена оценка сложности индексного множества сильно конструктивизируемых булевых алгебр, являющихся автоустойчивыми относительно сильных конструктивизаций.

Используемые в работе основные понятия и определения теории вычислимых моделей можно найти в [2, 3]. Пусть σ — вычислимая сигнатура без функциональных символов. Известно [4], что для конечной сигнатуры σ существует универсальная вычислимая нумерация ν класса всех вычислимых моделей σ. Для бесконечной сигнатуры σ существует универсальная вычислимая нумерация ν для класса, состоящего из всех вычислимых моделей σ и всех конечных моделей конечных частей сигнатуры σ (подробнее см. [2, § 1.4]). Далее мы фиксируем указанную выше нумерацию ν и через $\mathfrak{M}_e$ обозначаем вычислимую модель сигнатуры σ, имеющую номер e в нумерации ν. Кроме того, в дальнейшем

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–91001–АНФ–а). Работа второго автора выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ–860.2014.1). Работа третьего автора выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00376).

можно считать, что мы рассматриваем модели произвольной вычислимой сигнатуры σ (при необходимости осуществляя стандартный переход от функций к их графикам).

Пусть K — класс вычислимых моделей сигнатуры σ. *Индексным множеством* класса K называется множество $I(K) = \{e \mid \mathfrak{M}_e \in K\}$.

Вычислимая модель $\mathfrak{M}$ называется *разрешимой*, если ее полная диаграмма $FD(\mathfrak{M})$ вычислима. Модель $\mathfrak{M}$ называется *сильно конструктивизируемой*, если $\mathfrak{M}$ обладает разрешимой копией.

Сильно конструктивизируемая модель $\mathfrak{M}$ называется *автоустойчивой относительно сильных конструктивизаций*, если для любых разрешимых копий $\mathfrak{N}_0$ и $\mathfrak{N}_1$ модели $\mathfrak{M}$ существует вычислимый изоморфизм $f\colon \mathfrak{N}_0 \to \mathfrak{N}_1$.

Напомним, что сигнатура σ называется *нетривиальной*, если σ содержит хотя бы один предикатный или функциональный символ, имеющий местность не менее чем 2. В [5] построена вычислимая бесконечная сигнатура σ^*, состоящая только из унарных и бинарных предикатов, и доказано, что индексное множество $\mathrm{Com}(\mathrm{SCSt})_{\sigma^*}$ класса вычислимых моделей сигнатуры σ^*, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций, является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством. В [6] показано, что для любой нетривиальной вычислимой сигнатуры σ индексное множество $\mathrm{Com}(\mathrm{SCSt})_{\sigma}$ класса вычислимых моделей σ, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций, также является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством.

Будем рассматривать булевы алгебры как модели сигнатуры $\sigma_{BA} = \{\vee^2, \wedge^2, \mathrm{C}^1; 0, 1\}$. Данная работа является продолжением [5–7] и посвящена исследованию сложности следующего индексного множества:

$$\mathrm{SCAutBA} = \{e \in \omega \mid \mathfrak{M}_e \text{ — булева алгебра, автоустойчивая относительно сильных конструктивизаций}\}.$$

Доказано, что SCAutBA является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством. Отметим, что метод доказательства данного результата существенно отличается от методов, использованных в [5, 6]. В доказательстве основного результата [5] использована техника маркеровских расширений [8, 9]. В работе применяется техника пар вычислимых моделей [3, 10].

В § 1 приведены необходимые предварительные сведения из теории моделей, теории счетных булевых алгебр и теории вычислимости, § 2 содержит нужные нам результаты о простых булевых алгебрах, § 3 посвящен исследованию стандартных челночных отношений $\le_\alpha$ на простых булевых алгебрах, имеющих конечную вторую элементарную характеристику. В § 4 приведено доказательство того, что множество SCAutBA является $\Sigma^0_{\omega+2}$-полным. В § 5 приводятся следствия основного результата — показывается $\Sigma^0_{\omega+2}$-полнота индексного множества моделей, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций и принадлежащих классу K, где K — это один из следующих классов: дистрибутивные решетки, кольца, коммутативные полугруппы, частичные порядки.

§ 1. Предварительные сведения

Предварительные сведения о булевых алгебрах можно найти в [11]. Будем кратко называть булеву алгебру *алгеброй*. Если L — линейный порядок, то через $\mathfrak{B}(L)$ обозначается интервальная алгебра, порожденная L.

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, n — натуральное число. Пусть $\mathrm{Atom}(\mathfrak{B})$ — множество атомов $\mathfrak{B}$, $\mathrm{Als}(\mathfrak{B})$ — идеал безатомных элементов $\mathfrak{B}$, $\mathrm{Atomic}(\mathfrak{B})$ — идеал атомных элементов $\mathfrak{B}$, $\mathrm{I}_n(\mathfrak{B})$ — n-й итерированный идеал Ершова — Тарского $\mathfrak{B}$,

$$\mathrm{Atom}_n(\mathfrak{B}) = \{a \in \mathfrak{B} \mid a/_{\mathrm{I}_n(\mathfrak{B})} \in \mathrm{Atom}(\mathfrak{B}/_{\mathrm{I}_n(\mathfrak{B})})\},$$

$$\mathrm{Als}_n(\mathfrak{B}) = \{a \in \mathfrak{B} \mid a/_{\mathrm{I}_n(\mathfrak{B})} \in \mathrm{Als}(\mathfrak{B}/_{\mathrm{I}_n(\mathfrak{B})})\},$$
$$\mathrm{Atomic}_n(\mathfrak{B}) = \{a \in \mathfrak{B} \mid a/_{\mathrm{I}_n(\mathfrak{B})} \in \mathrm{Atomic}(\mathfrak{B}/_{\mathrm{I}_n(\mathfrak{B})})\},$$
$$\mathrm{I}_\omega(\mathfrak{B}) = \bigcup_{m\in\omega} \mathrm{I}_m(\mathfrak{B}).$$

Отметим, что $\mathrm{Als}_n(\mathfrak{B})$, $\mathrm{Atomic}_n(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{I}_\omega(\mathfrak{B})$ являются идеалами алгебры $\mathfrak{B}$.

На алгебре $\mathfrak{B}$ стандартным образом определяется порядок: $a \le b$ в том и только том случае, когда $a \wedge b = a$. Если $a \in \mathfrak{B}$, то через $\hat{a}_{\mathfrak{B}}$ обозначается алгебра вида $(\{b \in \mathfrak{B} \mid b \le a\}, \vee, \wedge, \mathrm{C}_a; 0, a)$, где $\vee$ и $\wedge$ являются ограничениями соответствующих операций $\mathfrak{B}$ на носитель $\hat{a}_{\mathfrak{B}}$, $\mathrm{C}_a(b) = a \wedge \mathrm{C}(b)$. Если из контекста понятно, о какой алгебре $\mathfrak{B}$ идет речь, то будем использовать обозначение $\hat{a}$ вместо $\hat{a}_{\mathfrak{B}}$. Считаем, что $a^0 = \mathrm{C}(a)$ и $a^1 = a$. Если $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — набор элементов из $\mathfrak{B}$ и $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$, то положим $\bar{a}^{\bar{\varepsilon}} = a_1^{\varepsilon_1} \wedge a_2^{\varepsilon_2} \wedge \dots \wedge a_n^{\varepsilon_n}$. Обозначение $a - b$ будет использоваться для элемента $a \wedge \mathrm{C}(b)$.

Будем считать, что формула $(x_0, \dots, x_n \mid y)$ является сокращенной формой записи следующей формулы:

$$(y = x_0 \vee \dots \vee x_n) \& \Big(\mathop{\&}_{0 \le i < j \le n} x_i \wedge x_j = 0 \Big).$$

Если $a, b_0, \dots, b_n$ — элементы алгебры $\mathfrak{B}$ такие, что выполнено $(b_0, \dots, b_n \mid a)$, то будем говорить, что кортеж $b_0, \dots, b_n$ является *разбиением* a (на $n+1$ элементов). *Разбиением* алгебры $\mathfrak{B}$ называем разбиение элемента $1^{\mathfrak{B}}$.

Пусть $\{\mathfrak{B}_n\}_{n\in\omega}$ — последовательность булевых алгебр. *Прямая сумма* $\sum\limits_{n\in\omega}{}_{\{0,1\}} \mathfrak{B}_n$ определяется как подалгебра прямого произведения $\prod\limits_{n\in\omega} \mathfrak{B}_n$, имеющая носитель

$$\Big\{ f \in \prod_{n\in\omega} \mathfrak{B}_n \mid (\exists c \in \{0,1\})(\exists m)(\forall k \ge m)(f(k) = c^{\mathfrak{B}_k}) \Big\}.$$

Если $\mathfrak{M}$ — модель сигнатуры σ, то через $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ обозначается элементарная теория модели $\mathfrak{M}$. Модель $\mathfrak{M}$ называется *простой*, если $\mathfrak{M}$ элементарно вкладывается в любую модель теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$. Модель $\mathfrak{M}$ называется *почти простой*, если существует конечный набор $\bar{c}$ элементов $\mathfrak{M}$ такой, что модель $(\mathfrak{M}, \bar{c})$ простая. *Простой булевой алгеброй* называется булева алгебра, являющаяся простой моделью.

Модель $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ называется *атомной*, если для любого набора $\bar{a} = a_0, \dots, a_n$ из $\mathfrak{M}$ существует формула $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ сигнатуры σ такая, что $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})$ и для любой формулы $\psi(x_0, \dots, x_n)$ выполнено: если $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{a})$, то

$$\mathfrak{M} \models \forall x_0 \dots \forall x_n (\varphi(x_0, \dots, x_n) \to \psi(x_0, \dots, x_n)).$$

Формулу φ, удовлетворяющую таким условиям, называют *полной формулой* теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$. Известен следующий результат (см. [12, теорема 2.3.4]).

Теорема 1.1 (критерий Р. Л. Воота). *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель счетной сигнатуры σ. Тогда $\mathfrak{M}$ простая в том и только том случае, когда модель $\mathfrak{M}$ счетная атомная.*

Пусть T — полная теория сигнатуры σ, n — натуральное число. Определим булеву алгебру $F_n(T)$. Носитель $F_n(T)$ состоит из классов

$$[\varphi(x_0, \dots, x_n)] = \{\psi(x_0, \dots, x_n) \mid \psi \text{ — формула сигнатуры } \sigma,\ T \vdash \forall x_0 \dots \forall x_n (\varphi \leftrightarrow \psi)\},$$

а операции и константы определяются по правилам $[\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi]$, $[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \& \psi]$, $\mathrm{C}([\varphi]) = [\neg\varphi]$, $0 = [(x_0 \ne x_0)]$ и $1 = [(x_0 = x_0)]$. Известен следующий критерий автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций.

Теорема 1.2 [13, теорема 1]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — сильно конструктивизируемая модель. Она автоустойчива относительно сильных конструктивизаций в том и только том случае, когда существует конечный набор $\bar{c}$ из $\mathfrak{M}$ такой, что $(\mathfrak{M}, \bar{c})$ является простой моделью и семейство множеств атомов булевых алгебр $F_n(\mathrm{Th}(\mathfrak{M}, \bar{c}))$ вычислимо.*

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — натуральные числа, то через $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ обозначается номер n-ки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в канторовской нумерации. Если $A \subseteq \omega$, то $\overline{A} = \omega \setminus A$. Через ω_1^{CK} обозначается наименьший невычислимый ординал. Обозначение $\exists^\infty x\varphi(x)$ понимается как «существует бесконечно много x таких, что $\varphi(x)$».

Для работы с вычислимыми ординалами, следуя [14], вводим множество обозначений O с порядком $<_O$. Если $a \in O$, то через $|a|_O$ обозначается ординал, соответствующий обозначению a. Если α — вычислимый ординал, то, имея в виду равномерную вычислимость по $\beta < \alpha$, будем считать, что зафиксировано некоторое $a \in O$, для которого $|a|_O = \alpha$, и речь идет о равномерной вычислимости по $b <_O a$.

Пусть α — счетный ординал. Для фиксированной счетной сигнатуры σ определяем бесконечные Σ_α- и Π_α-формулы так же, как в [3, гл. 6]. Если σ — вычислимая сигнатура, то также определяются *вычислимые бесконечные формулы* сигнатуры σ. Строгое введение вычислимых бесконечных формул требует построения специальной системы обозначений, подобной системе обозначений для вычислимых ординалов. (Подробное изложение можно найти в [3, гл. 7].) Для каждого вычислимого ординала α можно построить множество обозначений и функцию, которая каждому обозначению сопоставляет Σ_α-формулу. Такие формулы образуют класс Σ_α^c вычислимых Σ_α-формул. Аналогичным образом строится класс Π_α^c вычислимых Π_α-формул.

Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — модели сигнатуры σ, то запись $\mathfrak{M} \leq_\alpha \mathfrak{N}$ означает, что любое Π_α-предложение, истинное в модели $\mathfrak{M}$, истинно и в $\mathfrak{N}$. Формула $\mathfrak{M} \equiv_\alpha \mathfrak{N}$ означает, что $\mathfrak{M} \leq_\alpha \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N} \leq_\alpha \mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{N}$ — модель σ, K — непустое семейство моделей σ, то запись $K \leq_\alpha \mathfrak{N}$ означает, что любое Π_α-предложение, истинное во всех моделях из K, истинно и в $\mathfrak{N}$.

Пусть α — ненулевой вычислимый ординал. Семейство $K = \{\mathfrak{A}_i \mid i \in \omega\}$ моделей вычислимой сигнатуры σ называется *α-дружественным*, если модели $\mathfrak{A}_i$ вычислимы равномерно по i и отношения

$$B_\beta = \{(i, \bar{a}, j, \bar{b}) \mid i, j \in \omega,\ \bar{a} \in \mathfrak{A}_i,\ \bar{b} \in \mathfrak{A}_j,\ (\mathfrak{A}_i, \bar{a}) \leq_\beta (\mathfrak{A}_j, \bar{b})\}$$

вычислимо перечислимы равномерно по $\beta < \alpha$. Нам понадобится следующий частный случай [10, теорема 4.2].

Теорема 1.3 [10]. *Пусть $1 \leq \alpha < \omega_1^{CK}$, $\mathfrak{A}$ — модель сигнатуры σ, $K = \{\mathfrak{B}_i \mid i \in \omega\}$ — семейство моделей σ, удовлетворяющие условиям: $K \leq_\alpha \mathfrak{A}$ и семейство $\{\mathfrak{A}\} \cup K$, равное $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots\}$, является α-дружественным. Тогда для любого Π_α^0-множества S существует равномерно вычислимая по n последовательность моделей $\{\mathfrak{C}_n\}_{n\in\omega}$ такая, что*

$$\mathfrak{C}_n \cong \begin{cases} \mathfrak{A}, & \text{если } n \in S, \\ \mathfrak{B}_{i_n},\ \text{где } i_n \in \omega, & \text{если } n \notin S. \end{cases}$$

§ 2. Простые булевы алгебры

Данный раздел содержит необходимые нам результаты о простых булевых алгебрах.

Элементарной характеристикой булевой алгебры $\mathfrak{B}$ называется тройка $\mathrm{ch}(\mathfrak{B}) = (\mathrm{ch}_1(\mathfrak{B}), \mathrm{ch}_2(\mathfrak{B}), \mathrm{ch}_3(\mathfrak{B}))$, определенная следующим образом.

(1) Значение $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{B})$ равно наименьшему $n \in \omega$ такому, что $\mathrm{I}_{n+1}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}$ (если такое n существует). В случае, если такого n не существует, считается, что $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{B}) = \infty$. Если $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{B}) = \infty$, то $\mathrm{ch}_2(\mathfrak{B}) = \mathrm{ch}_3(\mathfrak{B}) = 0$.

(2) Для $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{B}) = n < \infty$ значение $\mathrm{ch}_2(\mathfrak{B})$ равно числу атомов фактор-алгебры $\mathfrak{B}/_{\mathrm{I}_n}$, если это число конечно, и $\mathrm{ch}_2(\mathfrak{B}) = \infty$, если $\mathfrak{B}/_{\mathrm{I}_n}$ содержит бесконечно много атомов.

(3) Для $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{B}) = n < \infty$ значение $\mathrm{ch}_3(\mathfrak{B})$ равно 1, если алгебра $\mathfrak{B}/_{\mathrm{I}_n}$ содержит ненулевой безатомный элемент; $\mathrm{ch}_3(\mathfrak{B}) = 0$ в противном случае.

Если a — элемент алгебры $\mathfrak{B}$, то считаем, что $\mathrm{ch}^{\mathfrak{B}}(a) = \mathrm{ch}(\hat{a}_{\mathfrak{B}})$. Если из контекста ясно, о какой алгебре $\mathfrak{B}$ идет речь, то значение $\mathrm{ch}^{\mathfrak{B}}(a)$ обозначается через $\mathrm{ch}(a)$. Через CH будем обозначать множество всех *допустимых элементарных характеристик*, т. е. CH — это подмножество $(\omega \cup \{\infty\})^2 \times \{0, 1\}$ такое, что

(a) тройка (∞, q, r) принадлежит CH в том и только том случае, когда $q = r = 0$;

(b) если $p \in \omega$, то $(p, q, r) \in \mathrm{CH}$ тогда и только тогда, когда $q \neq 0$ или $r \neq 0$, или $p = q = r = 0$.

Известно [11, теорема 2.5.1], что для любой характеристики $x \in \mathrm{CH}$ существует алгебра $\mathfrak{B}$ такая, что $\mathrm{ch}(\mathfrak{B}) = x$.

Теорема 2.1 [15, 16]. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — булевы алгебры. Модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны в том и только том случае, когда $\mathrm{ch}(\mathfrak{A}) = \mathrm{ch}(\mathfrak{B})$.*

Предложение 2.1 [11, следствие 2.3.5]. *Элементарная теория любой булевой алгебры имеет простую модель.*

Через $\mathrm{Pr}(p, q, r)$ будем обозначать простую булеву алгебру, имеющую элементарную характеристику (p, q, r). Через B_∞ обозначается алгебра $\mathrm{Pr}(\infty, 0, 0)$. Известно следующее описание простых булевых алгебр.

Определение 2.1 [17, определение 3.16]. Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра такая, что $\mathrm{ch}(\mathfrak{B}) = (p, q, r)$.

(a) Предположим, что $p < \infty$. Алгебра $\mathfrak{B}$ называется *конечно-атомной*, если

(i) для любого $k < p$ любой атомный элемент фактор-алгебры $\mathfrak{B}/_{\mathrm{I}_k}$ является конечной суммой атомов алгебры $\mathfrak{B}/_{\mathrm{I}_k}$;

(ii) если a — это атомный элемент из $\mathfrak{B}/_{\mathrm{I}_p}$, то хотя бы для одного элемента $b \in \{a, \mathrm{C}(a)\}$ выполнено следующее условие: под b лежит только конечное число атомов $\mathfrak{B}/_{\mathrm{I}_p}$.

(b) Пусть $p = \infty$. Алгебра $\mathfrak{B}$ является *конечно-атомной*, если она удовлетворяет условиям (i) и

(iii) фактор-алгебра $\mathfrak{B}/_{\mathrm{I}_\omega}$ двухэлементна.

Теорема 2.2 [18, теорема 5.1]. *Булева алгебра $\mathfrak{B}$ простая в том и только том случае, когда $\mathfrak{B}$ конечно-атомная.*

Следствие 2.1. *Пусть* $\mathfrak{B}$ *— простая булева алгебра,* a *— элемент* $\mathfrak{B}$*. Тогда* $\hat{a}$ *также простая булева алгебра. Кроме того, если* $\mathrm{ch}_2(\mathfrak{B}) < \infty$*, то* $\mathrm{ch}_2(a) < \infty$*.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что алгебра $\hat{a}$ также конечно-атомная.

Докажем второе утверждение. Допустим, что $\mathrm{ch}_2(\mathfrak{B}) < \infty$ и $\mathrm{ch}_2(a) = \infty$ для некоторого элемента $a \in \mathfrak{B}$. Пусть $\mathrm{ch}_1(a) = p$. Заметим, что единица фактор-алгебры $\hat{a}/_{\mathrm{I}_p}$ разбивается на непересекающиеся безатомный и бесконечный атомный элементы. Отсюда следует, что алгебра $\mathfrak{B}/_{\mathrm{I}_p}$ содержит бесконечный атомный элемент. В силу того, что $\mathfrak{B}$ конечно-атомная, это возможно только в случае, когда $\mathrm{ch}_1(\mathfrak{B}) = p$ и $\mathrm{ch}_2(\mathfrak{B}) = \infty$, что противоречит условию. Следствие 2.1 доказано. □

Известно [18], что все простые булевы алгебры сильно конструктивизируемы. Более того, имеет место

Теорема 2.3 [18, теорема 4.1]. *Пусть* CH' *— множество* $\mathrm{CH} \setminus \{(\infty, 0, 0)\}$*. Существует вычислимая последовательность булевых алгебр* $\{\mathfrak{B}^{pr}_x \mid x \in \mathrm{CH}'\}$*, удовлетворяющая следующим условиям:*

(1) *для каждого* $x \in \mathrm{CH}'$ *алгебра* $\mathfrak{B}^{pr}_x$ *изоморфна* $\mathrm{Pr}(x)$*;*

(2) *существует вычислимая функция* EC *такая, что для любых* $x \in \mathrm{CH}'$ *и* $a \in \mathfrak{B}^{pr}_x$ *значение* $EC(a, x)$ *равно номеру тройки* $\mathrm{ch}^{\mathfrak{B}^{pr}_x}(a)$ *в канторовской нумерации.*

В частности, все алгебры $\mathfrak{B}^{pr}_x$ *разрешимы.*

Кроме того, известен следующий критерий автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для булевых алгебр.

Теорема 2.4 [19, следствие 8]. *Пусть* $\mathfrak{B}$ *— счетная булева алгебра. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *модель* $\mathfrak{B}$ *сильно конструктивизируема и автоустойчива относительно сильных конструктивизаций;*

(2) *существуют элементы* $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{CH}$ *такие, что алгебра* $\mathfrak{B}$ *изоморфна* $\mathrm{Pr}(x_0) \times \mathrm{Pr}(x_1) \times \cdots \times \mathrm{Pr}(x_k)$*.*

Приведем некоторые вспомогательные свойства простых булевых алгебр.

Определение 2.2 [20, определение 4.3]. Пусть $(p_0, q_0, r_0), \ldots, (p_n, q_n, r_n) \in \mathrm{CH}$. Сложение элементарных характеристик задается согласно следующему правилу:

$$(p_0, q_0, r_0) + \cdots + (p_n, q_n, r_n) = \sum_{i \le n} (p_i, q_i, r_i) = (p, q, r),$$

где $p = \max\{p_i \mid i \le n\}$, $q = \sum\{q_i \mid i \le n,\ p_i = p\}$ и $r = \max\{r_i \mid i \le n,\ p_i = p\}$. (Здесь считаем, что $\infty + q = q + \infty = \infty$ для любого $q \in \omega \cup \{\infty\}$.) В этом случае говорим, что набор $(p_0, q_0, r_0), \ldots, (p_n, q_n, r_n)$ является *разбиением* элементарной характеристики (p, q, r).

Лемма 2.1 [11, лемма 2.2.4]. *Пусть* $a, b_0, \ldots, b_n$ *— элементы булевой алгебры* $\mathfrak{B}$ *такие, что* $(b_0, \ldots, b_n \mid a)$*. Тогда набор* $\mathrm{ch}(b_0), \ldots, \mathrm{ch}(b_n)$ *является разбиением для* $\mathrm{ch}(a)$*.*

Лемма 2.2. *Пусть* $x_0 = (p_0, q_0, r_0)$ *и* $x_1 = (p_1, q_1, r_1)$ *— элементы* CH *такие, что* $p_0, q_0, q_1 < \infty$*. Предположим, что* $x = x_0 + x_1$*. Тогда булева алгебра* $\mathrm{Pr}(x_0) \times \mathrm{Pr}(x_1)$ *изоморфна алгебре* $\mathrm{Pr}(x)$*.*

Доказательство. Для $i \in \{0,1\}$ через $\mathfrak{B}_i$ будем обозначать алгебру $\mathrm{Pr}(x_i)$. Нам достаточно показать, что алгебра $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{B}_1$ является простой булевой алгеброй такой, что $\mathrm{ch}(\mathfrak{A}) = x$.

Нетрудно понять, что для элементов $e_0 = (1^{\mathfrak{B}_0}, 0^{\mathfrak{B}_1})$ и $e_1 = (0^{\mathfrak{B}_0}, 1^{\mathfrak{B}_1})$ алгебры $\mathfrak{A}$ выполнено $\mathrm{ch}(e_0) = x_0$ и $\mathrm{ch}(e_1) = x_1$. Отсюда по лемме 2.1 получаем, что $\mathrm{ch}(\mathfrak{A}) = x$. Покажем, что $\mathfrak{A}$ является конечно-атомной булевой алгеброй.

Пусть $p = \mathrm{ch}_1(\mathfrak{A})$ и $k < p$. Легко видеть, что для любого атомного элемента a алгебры $\mathfrak{A}/_{\mathrm{I}_k}$ найдутся атомные элементы $b_0 \in \mathfrak{B}_0/_{\mathrm{I}_k}$ и $b_1 \in \mathfrak{B}_1/_{\mathrm{I}_k}$ такие, что $\hat{a} \cong \hat{b}_0 \times \hat{b}_1$. Из того, что $q_0, q_1 < \infty$, вытекает, что a является конечной суммой атомов алгебры $\mathfrak{A}/_{\mathrm{I}_k}$. Если $p < \infty$, то, используя аналогичные рассуждения, можно показать, что любой атомный элемент алгебры $\mathfrak{A}/_{\mathrm{I}_p}$ является конечной суммой атомов.

Предположим, что $p = \infty$. Заметим, что $p_1 = \infty$ и фактор-алгебра $\mathfrak{A}/_{\mathrm{I}_{p_0+1}}$ изоморфна $\mathfrak{B}_1/_{\mathrm{I}_{p_0+1}}$. Отсюда нетрудно получить, что $\mathfrak{A}/_{\mathrm{I}_\omega}$ является двухэлементной алгеброй. Итак, $\mathfrak{A}$ является конечно-атомной алгеброй, и по теореме 2.2 $\mathfrak{A} \cong \mathrm{Pr}(x)$. Лемма 2.2 доказана. □

Следствие 2.2. *Пусть $x = (p,q,r)$ — элемент* CH *такой, что $q < \infty$; (p_0,q_0,r_0), ..., (p_n,q_n,r_n) — разбиение x такое, что существует не более одного бесконечного p_i и для каждого $i \le n$ значение q_i конечно. Рассмотрим простую булеву алгебру $\mathfrak{B} = \mathrm{Pr}(x)$. Тогда найдется разбиение $b_0, \dots, b_n$ для $\mathfrak{B}$ такое, что для каждого $i \le n$ выполнено $\hat{b}_i \cong \mathrm{Pr}(p_i,q_i,r_i)$.*

Далее будем рассматривать только простые булевы алгебры $\mathrm{Pr}(p,q,r)$ такие, что $q < \infty$. Следующее утверждение дает оценку уровня арифметической сложности отношений I_n, Atom_n, Als_n, Atomic_n для алгебр такого вида.

Предложение 2.2. *Пусть $n \in \omega$, R — одно из отношений I_n, Atom_n, Als_n, Atomic_n. Существует вычислимая бесконечная формула $R^c(x)$ такая, что для любой простой булевой алгебры $\mathfrak{B}$, удовлетворяющей условию $\mathrm{ch}_2(\mathfrak{B}) < \infty$, и любого $a \in \mathfrak{B}$ выполнена следующая эквивалентность: $a \in R(\mathfrak{B})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B} \models R^c(a)$. Более того, $\mathrm{I}^c_n(x)$ является Σ^c_{3n}-формулой, $\mathrm{Atom}^c_n(x)$ — Π^c_{3n+1}-формулой, $\mathrm{Als}^c_n(x)$ — Π^c_{3n+2}-формулой, а $\mathrm{Atomic}^c_n(x)$ — Σ^c_{3n+2}-формулой.*

Доказательство. Определим необходимые формулы индукцией по n:

$$\mathrm{I}^c_0(x) \leftrightharpoons (x = 0),$$

$$\mathrm{Atom}^c_n(x) \leftrightharpoons \neg\, \mathrm{I}^c_n(x) \& \forall y \big(y \le x \to \big(\, \mathrm{I}^c_n(y) \vee \mathrm{I}^c_n(x-y)\big)\big),$$

$$\mathrm{Als}^c_n(x) \leftrightharpoons \neg \exists y \big(y \le x \& \, \mathrm{Atom}^c_n(y)\big),$$

$$\mathrm{Atomic}^c_n(x) \leftrightharpoons \bigvee\!\!\!\bigvee_{k<\omega} \exists y_0 \dots \exists y_k \Big((y_0, \dots, y_k \mid x) \& \mathop{\&}_{i \le k} \mathrm{Atom}^c_n(y_i) \Big),$$

$$\mathrm{I}^c_{n+1}(x) \leftrightharpoons \exists y \exists z \big((y,z \mid x) \& \, \mathrm{Als}^c_n(y) \& \, \mathrm{Atomic}^c_n(z)\big).$$

Используя рассуждения из [11, лемма 2.2.8], теорему 2.2 и следствие 2.1, нетрудно проверить все нужные нам свойства. Предложение 2.2 доказано. □

Опираясь на [20, определение 2.3], определим для простых алгебр понятие *уровня*.

Определение 2.3. Пусть $x = (p,q,r)$ — элемент CH такой, что $q < \infty$. *Уровнем* простой булевой алгебры $\mathrm{Pr}(x)$ будем называть значение $l(x)$, заданное по следующему правилу:

$$l(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } p = q = r = 0, \\ 3p+1, & \text{если } p < \infty,\ q > 0 \text{ и } r = 0, \\ 3p+2, & \text{если } p < \infty \text{ и } r = 1, \\ \omega, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Значение $l(x)$ будем также называть *уровнем* x.

§ 3. Челночные отношения

Данный раздел посвящен исследованию стандартных челночных отношений $\leq_\alpha$ для простых булевых алгебр с конечной второй элементарной характеристикой. Приведем известные результаты об отношениях $\leq_\alpha$ для булевых алгебр.

Предложение 3.1 [3, лемма 15.12]. *Пусть α — ненулевой счетный ординал, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — булевы алгебры, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ — наборы элементов из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно. Соотношение $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \leq_\alpha (\mathfrak{B}, \bar{b})$ выполнено в том и только том случае, когда $\widehat{\bar{a}^{\bar{\varepsilon}}} \leq_\alpha \widehat{\bar{b}^{\bar{\varepsilon}}}$ для всех наборов $\bar{\varepsilon} \in \{0,1\}^n$.*

Предложение 3.2 [3, лемма 15.13]. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — ненулевые булевы алгебры.*

(1) *$\mathfrak{A} \leq_1 \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда выполнен один из следующих случаев:*

(a) *алгебра $\mathfrak{A}$ бесконечна;*

(b) *$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}(n)$ и $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}(m)$ для некоторых натуральных чисел $n \geq m > 0$.*

(2) *Для счетного ординала $\alpha > 1$ соотношение $\mathfrak{A} \leq_\alpha \mathfrak{B}$ имеет место в том и только том случае, когда для любого $1 \leq \beta < \alpha$ и любого разбиения $b_0, \ldots, b_n$ для $\mathfrak{B}$ существует разбиение $a_0, \ldots, a_n$ для $\mathfrak{A}$ такое, что $\hat{b}_i \leq_\beta \hat{a}_i$ для всех $i \leq n$.*

Заметим, что непосредственным следствием теоремы 2.1 является

Следствие 3.1. *Пусть α — бесконечный счетный ординал, $x_0, x_1 \in \mathrm{CH}$. Соотношение $\mathrm{Pr}(x_0) \leq_\alpha \mathrm{Pr}(x_1)$ выполнено в том и только том случае, когда $x_0 = x_1$.*

В силу следствия 3.1 далее можно рассматривать только отношения $\leq_n$ для $n \in \omega$. Следующие два предложения дают описание челночных отношений для простых булевых алгебр $\mathfrak{B}$ таких, что $\mathrm{ch}_2(\mathfrak{B}) < \infty$. Отметим, что доказательство предложения 3.3 опирается на доказательство теоремы 6.1 в [20].

Предложение 3.3. *Пусть $x_0 = (p_0, q_0, r_0)$ и $x_1 = (p_1, q_1, r_1)$ — элементы* CH *такие, что $p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$; n — ненулевое натуральное число. Через l_0 обозначим уровень $l(x_0)$, через l_1 — уровень $l(x_1)$.*

(1) *Если $l_0 < n$ или $l_1 < n$, то $\mathrm{Pr}(x_0) \leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$ в том и только том случае, когда $x_0 = x_1$.*

(2) *Если $l_0 > n$ и $l_1 \geq n$, то всегда выполнено $\mathrm{Pr}(x_0) \leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$.*

(3) *Если $l_0 = l_1 = n$, то $\mathrm{Pr}(x_0) \leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$ в том и только том случае, когда $q_0 \geq q_1$.*

(4) *Если $l_0 = n$ и $l_1 > n$, то всегда выполнено $\mathrm{Pr}(x_0) \not\leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$.*

Доказательство проводится индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение является непосредственным следствием предложения 3.2(1). Предположим, что $n > 1$ и утверждение уже доказано для всех ненулевых $m < n$.

Случай 1. Предположим, что $l_0 < n$ или $l_1 < n$. Достаточно доказать, что из условия $\mathrm{Pr}(x_0) \leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$ следует, что $x_0 = x_1$. Пусть $\mathrm{Pr}(x_0) \leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$. Тогда $\mathrm{Pr}(x_0) \equiv_{n-1} \mathrm{Pr}(x_1)$ и по предположению индукции для случаев 1, 3, 4 выполнено $x_0 = x_1$.

Случай 2. Предположим, что $l_0 > n$ и $l_1 \geq n$. Пусть $b_0, b_1, \dots, b_k$ — произвольное разбиение алгебры $\mathrm{Pr}(x_1)$. Без ограничения общности можно считать, что

$$l(\mathrm{ch}(b_0)) \geq l(\mathrm{ch}(b_1)) \geq \dots \geq l(\mathrm{ch}(b_k)). \qquad (*)$$

Зафиксируем $j \leq k$ такое, что $l(\mathrm{ch}(b_j)) \geq n$ и либо $j = k$, либо $j < k$ и $l(\mathrm{ch}(b_{j+1})) < n$. Рассмотрим два подслучая.

Случай 2a. Пусть $l_0 = 3p_0 + 2$, т. е. $r_0 = 1$. Используя следствие 2.2, выберем разбиение $a_0, a_1, \dots, a_k$ для $\mathrm{Pr}(x_0)$ такое, что $\mathrm{ch}(a_0) = x_0$, $\mathrm{ch}(a_i) = (p_0, 0, 1)$ при $1 \leq i \leq j$ и $\mathrm{ch}(a_i) = \mathrm{ch}(b_i)$ при $i > j$.

Случай 2b. Пусть $l_0 = 3p_0 + 1$, т. е. $r_0 = 0$. Выберем разбиение $a_0, a_1, \dots, a_n$ для $\mathrm{Pr}(x_0)$ такое, что $\mathrm{ch}(a_0) = x_0$, $\mathrm{ch}(a_i) = (p_0 - 1, 0, 1)$ при $1 \leq i \leq j$ и $\mathrm{ch}(a_i) = \mathrm{ch}(b_i)$ при $i > j$.

В обоих подслучаях получаем, что по индукционному предположению для случая 2 имеет место $\hat{b}_i \leq_{n-1} \hat{a}_i$ для всех i. Отсюда по предложению 3.2, п. (2), следует, что $\mathrm{Pr}(x_0) \leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$.

Случай 3. Предположим, что $l_0 = l_1 = n$. Из определения уровня следует, что $p_0 = p_1$ и $r_0 = r_1$.

Вначале предположим, что $q_0 \geq q_1$, и покажем, что $\mathrm{Pr}(x_0) \leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$. Если $q_0 = q_1$, то очевидно, что $x_0 = x_1$ и $\mathrm{Pr}(x_0) = \mathrm{Pr}(x_1)$, поэтому далее считаем, что $q_0 > q_1$. Рассмотрим разбиение c_0, c_1 алгебры $\mathrm{Pr}(x_0)$ такое, что $\mathrm{ch}(c_0) = (p_0, q_0 - q_1, r_0)$ и $\mathrm{ch}(c_1) = (p_0, q_1, r_0)$. В силу следствия 2.1 получаем $\hat{c}_1 \cong \mathrm{Pr}(x_1)$.

Пусть $b_0, b_1, \dots, b_k$ — произвольное разбиение алгебры $\mathrm{Pr}(x_1)$, удовлетворяющее $(*)$. Тогда существует разбиение $a_0', a_1', \dots, a_k'$ алгебры $\hat{c}_1$, удовлетворяющее условию $\mathrm{ch}(a_i') = \mathrm{ch}(b_i)$ для всех i. Определим разбиение $a_0, a_1, \dots, a_k$ алгебры $\mathrm{Pr}(x_0)$ по правилу: $a_0 = a_0' \vee c_0$ и $a_i = a_i'$ для $1 \leq i \leq k$. Заметим, что $l(\mathrm{ch}(a_0)) = l(\mathrm{ch}(b_0)) = l_0 > n - 1$, поэтому по индукционному предположению для случая 2 получаем $\hat{b}_i \leq_{n-1} \hat{a}_i$ для всех i. Отсюда вытекает, что $\mathrm{Pr}(x_0) \leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$.

Предположим, что $q_0 < q_1$, и докажем, что $\mathrm{Pr}(x_0) \not\leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$. Рассмотрим два подслучая.

Случай 3a. Пусть $l_0 = 3p_0 + 1$, т. е. $r_0 = 0$. Рассмотрим разбиение $b_1, \dots, b_{q_1}$ алгебры $\mathrm{Pr}(x_1)$ такое, что для каждого i значение $\mathrm{ch}(b_i)$ равно $(p_0, 1, 0)$. Легко понять, что любое разбиение $a_1, \dots, a_{q_1}$ алгебры $\mathrm{Pr}(x_0)$ обязано содержать элемент a_j такой, что $l(\mathrm{ch}(a_j)) \leq 3p_0 - 1 = n - 2$. Отсюда по предположению индукции для случая 1 получаем $\hat{b}_j \not\leq_{n-1} \hat{a}_j$. Из произвольности выбора разбиения $a_1, \dots, a_{q_1}$ следует, что $\mathrm{Pr}(x_0) \not\leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$.

Случай 3b. Пусть $l_0 = 3p_0 + 2$, т. е. $r_0 = 1$. Рассмотрим разбиение $b_0, b_1, \dots, b_{q_1}$ алгебры $\mathrm{Pr}(x_1)$ такое, что $\mathrm{ch}(b_0) = (p_0, 0, 1)$ и $\mathrm{ch}(b_i) = (p_0, 1, 0)$ для $1 \leq i \leq q_1$. Допустим, что существует разбиение $a_0, a_1, \dots, a_{q_1}$ для алгебры $\mathrm{Pr}(x_0)$ такое, что для каждого i выполнено $\hat{b}_i \leq_{n-1} \hat{a}_i$. Отметим, что из предположения индукции вытекает следующее утверждение: если $\hat{b}_i \leq_{n-1} \hat{a}_i$ и $\mathrm{ch}(b_i) = (p_0, 1, 0)$, то $\mathrm{ch}(a_i) = \mathrm{ch}(b_i)$. Отсюда следует неравенство $q_0 \geq q_1$, противоречащее нашему предположению; поэтому получаем $\mathrm{Pr}(x_0) \not\leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$.

Случай 4. Пусть $l_0 = n$ и $l_1 > n$. Тогда по случаю 3 имеем $\mathrm{Pr}(x_0) \not\leq_n \mathrm{Pr}(p_0, q_0 + 1, r_0)$; по случаю 2 получаем $\mathrm{Pr}(x_1) \leq_n \mathrm{Pr}(p_0, q_0 + 1, r_0)$. Из транзитивности отношения $\leq_n$ вытекает, что $\mathrm{Pr}(x_0) \not\leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$. Предложение 3.3 доказано. □

Предложение 3.4. *Пусть n — ненулевое натуральное число, $x_0 = (p_0, q_0, r_0)$ — элемент из* CH *такой, что $p_0, q_0 < \infty$. Через l_0 обозначим $l(x_0)$.*

(1) $B_\infty \leq_n \mathrm{Pr}(x_0)$ *в том и только том случае, когда $l_0 \geq n$.*

(2) $\mathrm{Pr}(x_0) \leq_n B_\infty$ *в том и только том случае, когда $l_0 > n$.*

Доказательство проводится индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение следует из предложения 3.2(1). Предположим, что $n > 1$ и предложение уже доказано для всех ненулевых $m < n$.

Вначале докажем (1). Предположим, что $l_0 \geq n$. Рассмотрим произвольное разбиение $b_0, b_1, \dots, b_k$ алгебры $\mathrm{Pr}(x_0)$ со свойством $(*)$. По следствию 2.2 можно выбрать разбиение $a_0, a_1, \dots, a_k$ для B_∞ такое, что $\mathrm{ch}(a_0) = (\infty, 0, 0)$ и $\mathrm{ch}(a_i) = \mathrm{ch}(b_i)$ при $1 \leq i \leq k$. Заметим, что $l(\mathrm{ch}(b_0)) = l_0 > n - 1$, следовательно, по индукционному предположению получаем $\hat{b}_0 \leq_{n-1} \hat{a}_0$. По предложению 3.2 отсюда следует, что $B_\infty \leq_n \mathrm{Pr}(x_0)$.

Допустим, что $l_0 < n$ и $B_\infty \leq_n \mathrm{Pr}(x_0)$. В силу истинности соотношения $B_\infty \equiv_{n-1} \mathrm{Pr}(x_0)$ и предположения индукции для (2) получаем $l_0 > n - 1$ и приходим к противоречию.

Докажем (2). Предположим, что $l_0 > n$, и рассмотрим произвольное разбиение $b_0, b_1, \dots, b_k$ для B_∞, удовлетворяющее $(*)$. Зафиксируем $j \leq k$ такое, что $l(\mathrm{ch}(b_j)) \geq n$ и либо $j = k$, либо $j < k$ и $l(\mathrm{ch}(b_{j+1})) < n$. Выберем разбиение $a_0, a_1, \dots, a_k$ алгебры $\mathrm{Pr}(x_0)$ следующим образом:

(a) если $l_0 = 3p_0 + 2$, то искомое разбиение выбирается точно так же, как в случае 2a доказательства предложения 3.3;

(b) если $l_0 = 3p_0 + 1$, то выбираем разбиение точно так же, как в случае 2b из того же доказательства.

Используя предложение 3.3, индукционную гипотезу для (1) и предложение 3.2, нетрудно показать, что $\mathrm{Pr}(x_0) \leq_n B_\infty$.

Допустим, что $l_0 \leq n$ и $\mathrm{Pr}(x_0) \leq_n B_\infty$. В силу истинности соотношения $\mathrm{Pr}(x_0) \equiv_{n-1} B_\infty$ и предположения индукции получаем, что $l_0 = n$. Выберем произвольный элемент $x_1 = (p_1, q_1, r_1) \in$ CH такой, что $p_1, q_1 < \infty$ и число $l_1 = l(x_1)$ больше, чем n. Из предложения 3.3 вытекает, что $\mathrm{Pr}(x_0) \not\leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$. С другой стороны, уже доказано, что $B_\infty \leq_n \mathrm{Pr}(x_1)$; поэтому по транзитивности отношения $\leq_n$ получаем, что $\mathrm{Pr}(x_0) \not\leq_n B_\infty$; приходим к противоречию. Предложение 3.4 доказано. □

Через K_ω будем обозначать следующее семейство простых булевых алгебр:

$$K_\omega \leftrightharpoons \{\mathrm{Pr}(p, q + 1, 0),\ \mathrm{Pr}(p, q, 1) \mid p, q \in \omega\}.$$

Лемма 3.1. *Имеет место соотношение $K_\omega \leq_\omega B_\infty$.*

Доказательство. Предположим, что $\Phi = \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i \in I} \forall \bar{x}_i \Psi_i(\bar{x}_i)$ — Π_ω-предложение, ложное в B_∞. Зафиксируем $i \in I$ и набор $\bar{b} = (b_0, \dots, b_k)$ из B_∞ такие, что формула $\Psi_i(\bar{b})$ ложна в B_∞. Без ограничения общности можно считать, что кортеж $\bar{b}$ является разбиением для B_∞, удовлетворяющим условию $(*)$. Выберем $n \in \omega$ такое, что Ψ_i является бесконечной Σ_n-формулой. Кроме того, выберем произвольный элемент $x_0 = (p_0, q_0, r_0)$ из CH такой, что $p_0, q_0 < \infty$, $l(x_0) \geq n$ и $l(x_0) > l(\mathrm{ch}(b_j)) + 1$ при $1 \leq j \leq k$.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{C} = \mathrm{Pr}(x_0)$ из семейства K_ω. Используя следствие 2.2 и истинность соотношений $l(\hat{b}_j) + 1 < l(x_0)$ для $1 \le j \le k$, нетрудно показать, что существует разбиение $c_0, c_1, \dots, c_k$ для $\mathfrak{C}$ такое, что алгебра $\hat{c}_0$ изоморфна $\mathfrak{C}$ и $\hat{c}_j \cong \hat{b}_j$ для $j > 0$. По предложению 3.4 выполнено $\hat{b}_0 \cong B_\infty \le_n \mathrm{Pr}(x_0) \cong \hat{c}_0$; отсюда по предложению 3.1 имеет место $(B_\infty, \bar{b}) \le_n (\mathfrak{C}, \bar{c})$. Из этого факта следует, что $\mathfrak{C} \not\models \Psi_i(\bar{c})$ и $\mathfrak{C} \not\models \Phi$. Лемма 3.1 доказана. $\square$

§ 4. Основной результат

Теорема 4.1. *Индексное множество* SCAutBA *класса вычислимых булевых алгебр, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций, является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством.*

Доказательство. Приведем верхнюю оценку сложности для SCAutBA.

Лемма 4.1. SCAutBA *является $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством.*

Доказательство. Для моделей сигнатуры σ_{BA} определим следующие индексные множества:

$$\mathrm{BA} = \{e \mid \mathfrak{M}_e \text{ — булева алгебра}\},$$

$$\mathrm{Com(SCSt)} = \{e \mid \mathfrak{M}_e \text{ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций}\}.$$

Известно (см., например, [1, предложение 4.1]), что BA является Π^0_2-множеством. В силу того, что сигнатура σ_{BA} нетривиальна, можем применить [6, теорема 2.3] и получить, что Com(SCSt) является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством. Очевидно, что $\mathrm{SCAutBA} = \mathrm{BA} \cap \mathrm{Com(SCSt)}$, поэтому $\mathrm{SCAutBA} \in \Sigma^0_{\omega+2}$. $\square$

Оставшаяся часть доказательства посвящена получению нижней оценки сложности для SCAutBA.

Лемма 4.2. *Существует ω-дружественное семейство $K^c_\omega = \{\mathfrak{A}_i \mid i \in \omega\}$ булевых алгебр со следующими свойствами:*

(1) *алгебра $\mathfrak{A}_0$ изоморфна B_∞;*

(2) *для любого ненулевого $i \in \omega$ алгебра $\mathfrak{A}_i$ изоморфна некоторой алгебре из семейства K_ω;*

(3) *для любой алгебры $\mathfrak{C} \in K_\omega$ существует единственное i такое, что $\mathfrak{A}_i \cong \mathfrak{C}$.*

Доказательство. Зафиксируем некоторую разрешимую копию $\mathfrak{A}_0$ алгебры B_∞. Кроме того, для $p, q \in \omega$ через $\mathfrak{A}_{2\langle p,q\rangle+1}$ обозначим алгебру $\mathfrak{B}^{pr}_{(p,q+1,0)}$ из теоремы 2.3, через $\mathfrak{A}_{2\langle p,q\rangle+2}$ — алгебру $\mathfrak{B}^{pr}_{(p,q,1)}$. Очевидно, что построенное семейство $K^c_\omega = \{\mathfrak{A}_i \mid i \in \omega\}$ удовлетворяет свойствам (1)–(3) леммы.

Покажем, что семейство K^c_ω является ω-дружественным. Легко понять, что модели $\mathfrak{A}_i$ вычислимы равномерно по i. Используя равномерную по $k \in \omega$ определимость множеств I_k, Atom_k, Als_k и Atomic_k конечными формулами сигнатуры σ_{BA} (см. [11, § 2.2]), разрешимость конечно-атомной алгебры $\mathfrak{A}_0$ и вычислимость функции EC из теоремы 2.3, нетрудно доказать, что существует вычислимая функция $e\colon \omega^2 \to \omega$ такая, что для любых $i \in \omega$ и $a \in \mathfrak{A}_i$ значение $e(a,i)$ равно $\langle \mathrm{ch}^{\mathfrak{A}_i}_1(a), \mathrm{ch}^{\mathfrak{A}_i}_2(a), \mathrm{ch}^{\mathfrak{A}_i}_3(a)\rangle + 1$, если $\mathrm{ch}^{\mathfrak{A}_i}_1(a) < \infty$, и $e(a,i) = 0$ в противном случае.

Пусть $0 < n < \omega$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — кортежи длины l из алгебр $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ соответственно. С помощью функции e можем эффективно найти значения $\mathrm{ch}^{\mathfrak{A}_i}(\bar{a}^{\bar{\varepsilon}})$ и $\mathrm{ch}^{\mathfrak{A}_j}(\bar{b}^{\bar{\varepsilon}})$

для всех наборов $\bar{\varepsilon} \in \{0,1\}^l$. Предложения 3.1, 3.3 и 3.4 позволяют эффективно проверить, выполнено ли соотношение $(\mathfrak{A}_i, \bar{a}) \leq_n (\mathfrak{A}_j, \bar{b})$. Отсюда следует, что отношения B_β из определения α-дружественности вычислимы равномерно по $\beta < \omega$; в частности, семейство K^c_ω ω-дружественно. Лемма 4.2 доказана. $\square$

Зафиксируем некоторое m-полное $\Sigma^0_{\omega+2}$-множество A. Из равенства классов $\Sigma^0_{\omega+2} = \Sigma^0_3(\varnothing^{(\omega)})$ вытекает, что существует $\varnothing^{(\omega)}$-вычислимое 4-местное отношение P такое, что для любого $n \in \omega$ выполнено: $n \notin A$ тогда и только тогда, когда $\forall x \exists y \forall z P(n,x,y,z)$. Из [14, теорема 14.8.XVIII] следует, что найдется $\varnothing^{(\omega)}$-вычислимое 3-местное отношение Q такое, что

$$\forall n (n \notin A \Leftrightarrow \exists^\infty x \forall y Q(n,x,y)). \tag{$**$}$$

Выберем отношение Q с таким свойством и определим Π^0_ω-множество $S = \{\langle n,x\rangle \mid \forall y Q(n,x,y)\}$.

Зафиксируем ω-дружественное семейство $K^c_\omega = \{\mathfrak{A}_i \mid i \in \omega\}$ из леммы 4.2. Леммы 3.1 и 4.2 позволяют применить теорему 1.3 для ординала $\alpha = \omega$, модели $\mathfrak{A}_0$, семейства $K = K^c_\omega \setminus \{\mathfrak{A}_0\}$, Π^0_ω-множества S и получить вычислимую последовательность $\{\mathfrak{C}_t\}_{t\in\omega}$ булевых алгебр со следующим свойством:

$$\mathfrak{C}_t \cong \begin{cases} B_\infty, & \text{если } t \in S, \\ \mathrm{Pr}(p_t, q_t, r_t), \text{ где } p_t, q_t < \infty,\ q_t + r_t > 0, & \text{если } t \notin S. \end{cases}$$

Для каждого $t \in \omega$ определим алгебру $\mathfrak{C}^1_t$ как $\mathfrak{C}_t \times \mathfrak{B}^{pr}_{(t+1,1,0)}$. Без ограничения общности можно считать, что алгебры $\mathfrak{C}^1_t$ вычислимы равномерно по t, $0^{\mathfrak{C}^1_t} = 0$ и $1^{\mathfrak{C}^1_t} = 1$ для всех t.

Для $n \in \omega$ положим

$$\mathfrak{C}^*_n = \sum_{x\in\omega}{}_{\{0,1\}} \mathfrak{C}^1_{\langle n,x\rangle}.$$

Отождествляя алгебру $\mathfrak{C}^*_n$ с ее естественным вычислимым представлением, можно считать, что последовательность алгебр $\{\mathfrak{C}^*_n\}_{n\in\omega}$ вычислима.

Лемма 4.3. *Последовательность $\{\mathfrak{C}^*_n\}_{n\in\omega}$ удовлетворяет следующим свойствам:*

(1) *если $n \in A$, то алгебра $\mathfrak{C}^*_n$ изоморфна $\prod_{i=0}^{l_n} B_\infty$ для некоторого $l_n \in \omega$;*

(2) *если $n \notin A$, то $\mathfrak{C}^*_n \cong \sum_{i\in\omega}{}_{\{0,1\}} B_\infty$.*

Доказательство. Предположим, что $n \in A$. Заметим, что по лемме 2.2 для любых $p, q < \infty$ и $r \in \{0,1\}$ имеет место изоморфизм $\mathrm{Pr}(p,q,r) \times B_\infty \cong B_\infty$. Используя этот факт и соотношение $(**)$, нетрудно показать, что найдутся числа l и m такие, что

$$\mathfrak{C}^*_n \cong \Big(\prod_{i<l} B_\infty\Big) \times \Big(\sum_{j\geq m}{}_{\{0,1\}} \mathfrak{C}^1_{\langle n,j\rangle}\Big)$$

и $\mathfrak{C}^1_{\langle n,j\rangle} \not\cong B_\infty$ при $j \geq m$. Через $\mathfrak{A}^*$ обозначим алгебру $\sum_{j\geq m}{}_{\{0,1\}} \mathfrak{C}^1_{\langle n,j\rangle}$. Опираясь на определение алгебр $\mathfrak{C}^1_t$, лемму 2.2, следствия 2.1 и 2.2, нетрудно проверить следующие свойства $\mathfrak{A}^*$:

(a) для любого элемента $c \in \mathfrak{A}^*$, имеющего вид $(c_0, c_1, \ldots, c_k, 0, 0, 0, \ldots)$, найдется $x = (p,q,r)$ из CH такой, что $p, q < \infty$ и $\hat{c} \cong \mathrm{Pr}(x)$;

(b) для любого $c \in \mathfrak{A}^*$ либо c, либо $\mathrm{C}(c)$ лежит в $\mathrm{I}_\omega(\mathfrak{A}^*)$;

(c) $1^{\mathfrak{A}^*} \notin \mathrm{I}_\omega(\mathfrak{A}^*)$.

Из этих свойств вытекает, что $\mathfrak{A}^*$ является конечно-атомной алгеброй характеристики $(\infty, 0, 0)$; следовательно, по теореме 2.2 $\mathfrak{A}^*$ изоморфна B_∞ и $\mathfrak{C}_n^* \cong \prod\limits_{i=0}^{l} B_\infty$.

Предположим, что $n \notin A$. Из соотношения $(**)$ следует, что существует бесконечно много чисел j таких, что алгебра $\mathfrak{C}^1_{\langle n,j\rangle}$ изоморфна B_∞. Отсюда по лемме 2.2 получаем, что $\mathfrak{C}_n^*$ изоморфна $\sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{0,1\}} B_\infty$. Лемма 4.3 доказана. $\square$

Лемма 4.4. *Булева алгебра* $\mathfrak{B}^* = \sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{0,1\}} B_\infty$ *не является почти простой.*

Доказательство. Допустим, что найдется конечный набор $\bar{c} = c_0, c_1, \dots, c_n$ из алгебры $\mathfrak{B}^*$ такой, что модель $(\mathfrak{B}^*, \bar{c})$ простая. Для $k \leq n$ и $j \in \omega$ зафиксируем элементы c_k^j из B_∞ такие, что $c_k = \left(c_k^0, c_k^1, c_k^2, \dots\right)$.

Будем считать, что $0^{B_\infty} = 0$ и $1^{B_\infty} = 1$. Выберем положительное $l \in \omega$ такое, что $c_k^{l+t} = c_k^l \in \{0,1\}$ для всех $k \leq n$ и $t \in \omega$. Рассмотрим элемент

$$d_0 = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{l \text{ раз}}, 1, 0, 0, \dots) \in \mathfrak{B}^*.$$

Очевидно, что $\hat{d} \cong B_\infty$. В силу теоремы 1.1 существует полная формула $\varphi(x)$ теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{B}^*, \bar{c})$ такая, что $(\mathfrak{B}^*, \bar{c}) \models \varphi(d_0)$. Зафиксируем натуральное число n такое, что φ является конечной Σ_n-формулой. Выберем произвольный элемент $x_0 = (p_0, q_0, r_0)$ из CH такой, что $p_0, q_0 < \infty$ и $l(x_0) > n$. В силу следствия 2.2 найдется элемент $e \in B_\infty$ такой, что $\hat{e} \cong \mathrm{Pr}(x_0)$. Определим элемент

$$e_0 = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{l \text{ раз}}, e, 0, 0, \dots) \in \mathfrak{B}^*.$$

Из предложений 3.1 и 3.4 следует, что выполнено соотношение $(\mathfrak{B}^*, \bar{c}, d_0) \equiv_n (\mathfrak{B}^*, \bar{c}, e_0)$. В частности, отсюда вытекает, что $(\mathfrak{B}^*, \bar{c}) \models \varphi(e_0)$. С другой стороны, заметим, что идеал I_{p_0+1} определим конечной формулой сигнатуры σ_{BA}, $e_0 \in \mathrm{I}_{p_0+1}(\mathfrak{B}^*)$ и $d_0 \notin \mathrm{I}_{p_0+1}(\mathfrak{B}^*)$; противоречие с тем, что φ является полной формулой. Лемма 4.4 доказана. $\square$

Завершим доказательство теоремы. Нетрудно видеть, что из лемм 4.3 и 4.4, теорем 1.2 и 2.4 следует, что вычислимая последовательность булевых алгебр $\{\mathfrak{C}_n^*\}_{n\in\omega}$ удовлетворяет следующим свойствам:

(a) если $n \in A$, то $\mathfrak{C}_n^*$ является сильно конструктивизируемой алгеброй, автоустойчивой относительно сильных конструктивизаций;

(b) если $n \notin A$, то $\mathfrak{C}_n^*$ не является почти простой моделью (в частности, $\mathfrak{C}_n^*$ не автоустойчива относительно сильных конструктивизаций).

Отсюда легко получить, что m-полное $\Sigma^0_{\omega+2}$-множество A m-сводится к индексному множеству SCAutBA. Теорема 4.1 доказана. $\square$

§ 5. Следствия основного результата

Пусть σ — конечная сигнатура, K — класс моделей σ. Определим следующее индексное множество вычислимых моделей сигнатуры σ:

$$\mathrm{SCAut}(K) = \{e \in \omega \mid \mathfrak{M}_e \in K, \text{ модель } \mathfrak{M}_e \text{ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций}\}.$$

Рассмотрим следующие сигнатуры: $\sigma_R = \{+^2, \cdot^2; 0\}$, $\sigma_{DL} = \{\vee^2, \wedge^2\}$, $\sigma_{PO} = \{\leq^2\}$, $\sigma_{SG} = \{\cdot^2\}$. Введем обозначения: R — класс коммутативных ассоциативных колец, DL — класс дистрибутивных решеток, PO — класс частично упорядоченных множеств, SG — класс коммутативных полугрупп. Каждый класс $K \in \{R, DL, PO, SG\}$ рассматривается в соответствующей сигнатуре σ_K.

Следствие 5.1. *Индексное множество* $\mathrm{SCAut}(R)$ *класса вычислимых колец, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций, является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством.*

Доказательство. Используя рассуждения, аналогичные лемме 4.1, можно доказать, что $\mathrm{SCAut}(R)$ является $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством. Напомним, что *булевы кольца* рассматриваются как модели сигнатуры $\sigma_R \cup \{1\}$.

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра, носитель которой является подмножеством ω. Так же, как в [11, § 1.2], построим по алгебре $\mathfrak{B}$ булево кольцо $R(\mathfrak{B})$. Через $R'(\mathfrak{B})$ обозначим коммутативное ассоциативное кольцо, являющееся обеднением $R(\mathfrak{B})$ до сигнатуры σ_R. Нетрудно проверить следующие эквивалентности:

(1) алгебра $\mathfrak{B}$ разрешима в том и только том случае, когда кольцо $R'(\mathfrak{B})$ разрешимо;

(2) $\mathfrak{B}$ автоустойчива относительно сильных конструктивизаций тогда и только тогда, когда $R'(\mathfrak{B})$ автоустойчиво относительно сильных конструктивизаций.

Пусть $\{\mathfrak{C}^*_n\}_{n\in\omega}$ — последовательность булевых алгебр, построенная в теореме 4.1. Опираясь на полученные выше эквивалентности и используя вычислимую последовательность колец $\{R'(\mathfrak{C}^*_n)\}_{n\in\omega}$, легко показать, что m-полное $\Sigma^0_{\omega+2}$-множество A m-сводится к $\mathrm{SCAut}(R)$. $\square$

Следствие 5.2. (1) *Индексное множество* $\mathrm{SCAut}(DL)$ *класса вычислимых дистрибутивных решеток, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций, является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством.*

(2) *Индексное множество* $\mathrm{SCAut}(PO)$ *класса вычислимых частичных порядков, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций, является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством.*

(3) *Индексное множество* $\mathrm{SCAut}(SG)$ *класса вычислимых коммутативных полугрупп, автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций, является m-полным $\Sigma^0_{\omega+2}$-множеством.*

Данное утверждение доказывается аналогично следствию 5.1. Для доказательства (1) нужно осуществлять переход от булевой алгебры $\mathfrak{B}$ к дистрибутивной решетке $D(\mathfrak{B})$, являющейся обеднением $\mathfrak{B}$ до сигнатуры σ_{DL}. В (2) производится стандартный переход от алгебры $\mathfrak{B}$ к частичному порядку $P(\mathfrak{B})$, для которого носитель равен носителю $\mathfrak{B}$ и $(a \leq_{P(\mathfrak{B})} b \Leftrightarrow a \wedge_{\mathfrak{B}} b = a)$. П. (3) основан на переходе от алгебры $\mathfrak{B}$ к коммутативной полугруппе $S(\mathfrak{B})$, носитель которой совпадает с носителем $\mathfrak{B}$, а операция задается по правилу $a \cdot_{S(\mathfrak{B})} b = a \wedge_{\mathfrak{B}} b$.

В заключение сформулируем открытый вопрос.

Проблема. *Какова точная оценка сложности индексного множества класса вычислимых групп, являющихся автоустойчивыми относительно сильных конструктивизаций?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С., Найт Дж.* Вычислимые структурные и антиструктурные теоремы // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 6. С. 639–681.

2. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Науч. книга, 1999. (Сибирская школа алгебры и логики).

3. *Ash C. J., Knight J. F.* Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy. Amsterdam, etc.: Elsevier Sci. B.V., 2000. (Stud. Logic Found. Math.; V. 144).

4. *Нуртазин А. Т.* Вычислимые классы и алгебраические критерии автоустойчивости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. ИММ АН КазССР. Алма-Ата, 1974.

5. *Гончаров С. С., Марчук М. И.* Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей ограниченной сигнатуры // Алгебра и логика. (Принято к печати).

6. *Гончаров С. С., Марчук М. И.* Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей конечной сигнатуры и сигнатуры графов // Алгебра и логика. (Принято к печати).

7. *Гончаров С. С., Марчук М. И.* Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2013. Т. 13, № 4. С. 43–67.

8. *Marker D.* Non Σ_n axiomatizable almost strongly minimal theories // J. Symb. Log. 1989. V. 54, N 3. P. 921–927.

9. *Гончаров С. С., Хусаинов Б.* Сложность теорий вычислимых категоричных моделей // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 6. С. 650–665.

10. *Ash C. J., Knight J. F.* Pairs of recursive structures // Ann. Pure Appl. Logic. 1990. V. 46, N 3. P. 211–234.

11. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Науч. книга, 1996. (Сибирская школа алгебры и логики).

12. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

13. *Нуртазин А. Т.* Сильные и слабые конструктивизации и вычислимые семейства // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 3. С. 311–323.

14. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

15. *Tarski A.* Arithmetical classes and types of Boolean algebras // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V. 55. P. 63.

16. *Ершов Ю. Л.* Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 3. С. 17–38.

17. *Remmel J. B.* Recursive Boolean algebras // Handbook of Boolean algebras. Amsterdam, etc.: Elsevier Sci. B. V., 1989. V. 3. P. 1097–1165.

18. *Mead J.* Recursive prime models for Boolean algebras // Colloq. Math. 1979. V. 41. P. 25–33.

19. *Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В., Турко А. И.* Автоустойчивость булевых алгебр с выделенными идеалами относительно сильных конструктивизаций // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 618–629.

20. *Csima B. F., Montalbán A., Shore R.A.* Boolean algebras, Tarski invariants, and index sets // Notre Dame J. Formal Logic. 2006. V. 47, N 1. P. 1–23.

Статья поступила 18 марта 2015 г.

Гончаров Сергей Савостьянович, Баженов Николай Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
s.s.goncharov@math.nsc.ru, bazhenov@math.nsc.ru

Марчук Маргарита Игоревна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
margaretmarchuk@gmail.com