Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 512.534.24

ПОЛУГРУППЫ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ И РАЗМЕРНОСТЬ

В. Ш. Юсуфов

Аннотация. Определена размерность произвольного с непустой внутренностью подмножества конечномерного евклидова пространства в терминах полугрупп его топологических отображений.

Ключевые слова: размерность топологического пространства, полугруппа отображений топологических пространств.

Все сведения по теории размерности, которые используются в этой статье, содержатся в [1], а по теории полугрупп — в [2].

Пусть X — топологическое пространство, а σ — произвольная система подмножеств множества Y. *Кратностью системы множеств* σ в данной точке $x \in X$ (обозначается через $\operatorname{kp}_x \sigma$) называется мощность множества σ_x всех элементов системы σ, содержащих точку x. Верхняя грань [3] всех кардинальных чисел $\operatorname{kp}_x \sigma$, взятых по всем $x \in X$, называется *кратностью системы* σ и обозначается через $\operatorname{kp} \sigma$. В дальнейшем вместо $\operatorname{kp} \sigma$ будем всюду использовать обозначение $\operatorname{ord} \sigma$.

Для любого топологического пространства X полагаем $\dim X \leq n$, если в любое конечное открытое покрытие Ω пространства X можно вписать конечное открытое покрытие ω кратности $\leq n+1$.

Если пространство X удовлетворяет неравенству $\dim X \leq n$, но не удовлетворяет неравенству $\dim X \leq n-1$, то полагаем $\dim X = n$.

Если ни для какого n не выполняется неравенство $\dim X \leq n$, то полагаем $\dim X = \infty$.

Система σ' называется *комбинаторно вписанной в систему* σ, если элементы обеих систем можно таким образом поставить во взаимно однозначное соответствие, что каждый элемент системы σ' содержится в соответствующем ему элементе системы σ.

Пусть дана система β подмножеств множества X. Систему $\gamma = \{\Gamma_\lambda\}$ называют *укрупнением системы* β, если каждое Γ_λ есть сумма некоторых $B \in \beta$, причем каждое $B \in \beta$ входит в качестве слагаемого ровно в одну сумму. Очевидно, $\operatorname{ord} \gamma \leq \operatorname{ord} \beta$.

Пусть система β вписана в систему α. Укрупнение γ называется *укрупнением системы* β *относительно системы* α, если система γ комбинаторно вписана в систему α.

Укрупнения покрытия β относительно покрытия α всегда существуют. Стандартный метод построения таких укрупнений приводится в [1].

Система множеств называется *центрированной*, если всякое конечное число множеств, являющихся элементами этой системы, имеет непустое пересечение.

Пусть дана центрированная система σ множеств, являющихся подмножествами некоторого множества X. Центрированная система σ называется *максимальной*, если она не является подсистемой никакой отличной от нее центрированной системы подмножеств множества X. Доказательства существования максимальных центрированных систем приводятся в [1; 3; 4, задача 127, с. 49].

Правым идеалом полугруппы S называется такое непустое подмножество A из S, что $AS \subseteq A$. *Главным правым идеалом* полугруппы S, порожденным элементом $a \in S$, называется правый идеал aS^1, где S^1 — полугруппа S с присоединенной к ней единицей [2].

Пусть X — произвольное подмножество с непустой внутренностью в конечномерном евклидовом пространстве E_n. Через $H(X)$ обозначим полугруппу всех гомеоморфных отображений X в себя, а через $K(X)$ — множество всех тех $a \in H(X)$, для которых найдутся n-мерные элементы B_a (множества, гомеоморфные замкнутому n-мерному шару) такие, что $\overline{aX} \subset \operatorname{int} B_a$, $B_a \subset \operatorname{int} X$. Очевидно, $K(X)$ — идеал в $H(X)$.

Под определимостью топологического пространства X класса K полугруппой $S(X)$ (гомеоморфных, непрерывных, замкнутых, открытых и т. д) отображений пространства X в себя будем понимать выполнение следующего утверждения.

Для любых двух пространств X и Y класса K из алгебраической изоморфности $S(X)$ и $S(Y)$ следует гомеоморфизм пространств X и Y.

В [5] доказано, что если X — компакт с непустой внутренностью в конечномерном евклидовом пространстве E_n, то $K(X)$ — минимальный идеал полугруппы $H(X)$. Так как полугруппа $K(X)$ определяет такой компакт [6], он определяется и полугруппой $H(X)$. Легко заметить, что полугруппы $H(X)$ и $H(Y)$, где X — открытый интервал, а Y — замкнутый интервал, изоморфны. Таким образом, произвольное подмножество с непустой внутренностью в конечномерном евклидовом пространстве не определяется полугруппой $H(X)$. В [7] доказано, что если X и Y — произвольные подмножества с непустой внутренностью в конечномерных евклидовых пространствах, то изоморфизм их полугрупп $H(X)$ и $H(Y)$ влечет гомеоморфизм их внутренностей, а значит, размерность этих множеств определяет полугруппа $H(X)$. Также отсюда, очевидно, следует определимость произвольного открытого подмножества в конечномерном евклидовом пространстве полугруппой $H(X)$. Кроме того, в [7] доказано, что если X — произвольное подмножество с непустой внутренностью в конечномерном евклидовом пространстве, то $K(X)$ — минимальный идеал полугруппы $H(X)$.

Аркадием Анатольевичем Мальцевым была поставлена задача: *охарактеризовать размерность произвольного подмножества X с непустой внутренностью в конечномерном евклидовом пространстве в терминах его полугруппы $H(X)$*. В [8] такая задача решена, в частности, для открытого подмножества X в конечномерном евклидовом пространстве, которое, как было сказано выше, определяется полугруппой $H(X)$. Произвольное подмножество X с непустой внутренностью в конечномерном евклидовом пространстве, которое не определяется полугруппой $H(X)$, не входит в класс пространств, выделенных в [8]. Однако из решения этой задачи для произвольных подмножеств X и Y с непустой внутренностью в конечномерных евклидовых пространствах, очевидно, следует, что если полугруппы $H(X)$ и $H(Y)$ произвольных подмножеств X и Y с непустой внутренностью в конечномерных евклидовых пространствах изоморфны, то размерности пространств X и Y одинаковы.

Через D_x обозначим произвольную подполугруппу полугруппы $H(X)$ такую, что $K(X) \subseteq D_x \subseteq H(X)$. Пусть R — правый идеал полугруппы D_x. Множество $\bigcup\limits_{a\in R} \operatorname{int} aX$ назовем *телом правого идеала* R и будем обозначать его через sR.

Лемма 1. *Пусть* $\{R_k\}_{n=1}^{n}$ *— конечная система правых идеалов полугруппы* D_x*. Тогда* $\bigcap\limits_{k=1}^{n} R_k \neq \varnothing \leftrightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{n} sR_k \neq \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\bigcap\limits_{k=1}^{n} R_k \neq \varnothing$ и $c \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} R_k$. Тогда, очевидно, $\operatorname{int} cX \subseteq \bigcap\limits_{k=1}^{n} sR_k$, поэтому $\bigcap\limits_{k=1}^{n} sR_k \neq \varnothing$. Пусть $\bigcap\limits_{k=1}^{n} sR_k \neq \varnothing$ и $\xi \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} sR_k$. Очевидно, найдутся элементы $a_k \in R_k$ такие, что $\xi \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{int} a_kX$. Легко найти также гомеоморфизм $c \in D_x$ и n-мерные элементы B_c и B_c' такие, что $B_c \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{int} a_kX$ и $\overline{cX} \subseteq B_c' \subseteq \operatorname{int} B_c$. Тогда

$$\overline{a_k^{-1}cX} \subseteq \overline{a_k^{-1}\overline{cX}} \subseteq \overline{a_k^{-1}B_c'} = a_k^{-1}B_c' \subset a_k^{-1} \operatorname{int} B_c' = \operatorname{int} a_k^{-1}B_c,$$

$a_k^{-1}B_c$ — n-мерный элемент и $a_k^{-1}B_c \subset \operatorname{int} X$. Значит, $a_k^{-1}c \in D_x$, $c = a_k\big(a_k^{-1}c\big) \in R_kD_x \subseteq R_k$ и $c \in R_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 2. *Если* $a, b \in D_x$ *и* $c \in K(X)$ *— решение уравнения* $ax = b$*, то* $b \in K(X)$ *и* $\overline{bX} \subset \operatorname{int} aX$.

Доказательство. Очевидно, $b \in K(X)$ и

$$\overline{bX} = \overline{acX} \subseteq \overline{a\overline{cX}} = \overline{acX} \subset a \operatorname{int} B_c \subset a \operatorname{int} X = \operatorname{int} aX.$$

Всюду ниже под K^1 и D_x^1 будем понимать соответственно полугруппы $K(X)$ и D_x с присоединенными к ним единицами.

Лемма 3. *Пусть* $\{a_\alpha K^1\}_{a\in A}$ *— некоторая максимальная центрированная система главных правых идеалов полугруппы* $K\{X\}$*. Существует единственная точка* $\xi \in \operatorname{int} X$ *такая, что* $\xi = \bigcap\limits_{\alpha} \overline{a_\alpha X} = \bigcap\limits_{\alpha} \overline{\operatorname{int} a_\alpha X}$*. Кроме того, если* $a \in K(X)$*,* $\xi \in \operatorname{int} aX$*, то* $aK^1 \in \{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$.

Доказательство. Телом главного правого идеала $a_\alpha K^1$ будет множество $\operatorname{int} a_\alpha X$, так как если $c \in a_\alpha K^1$, то $c = a_\alpha b$, где $b \in K^1$ и $\operatorname{int} cX = \operatorname{int} a_\alpha bX \subseteq \operatorname{int} a_\alpha X$. Из леммы 1 следует, что и система $\{\operatorname{int} a_\alpha X\}_{\alpha\in A}$ будет центрированной системой множеств пространства X. Систему всевозможных пересечений конечного числа элементов системы $\{\operatorname{int} a_\alpha X\}$ обозначим через $\{\Omega_\beta\}_{\beta\in B}$. Система $\{\Omega_\beta\}_{\beta\in B}$ также центрированная система подмножеств пространства X, а $\{\overline{\Omega}_\beta\}_{\beta\in B}$ — центрированная система компактных подмножеств пространства X. Поэтому $\bigcap\limits_{\beta} \overline{\Omega_\beta} \neq \varnothing$. Понятно, что $\bigcap\limits_{\beta} \overline{\Omega_\beta} \subset \operatorname{int} X$. Если $\xi \in \bigcap\limits_{\beta} \overline{\Omega_\beta}$, $a \in K(X)$ и $\xi \in \operatorname{int} aX$, то $\operatorname{int} aX \cap \Omega_\beta \neq \varnothing$ для любого $\beta \in B$. Далее, если $\{a_kK^1\}_{k=1}^{n}$ — какая-нибудь конечная подсистема системы $\{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$, то найдется $\Omega_{\beta'} \in \{\Omega_\beta\}_{\beta\in B}$ такое, что $\Omega_{\beta'} \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{int} a_kX$. Отсюда следует, что

$\operatorname{int} aX \cap \big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \operatorname{int} a_k X\big) \neq \varnothing$. Из леммы 1 вытекает, что $aK^1 \cap \big(\bigcap\limits_{k=1}^{n} a_k K^1\big) \neq \varnothing$, а это означает, что $aK^1 \in \{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$. Очевидно, что $\xi \in \bigcap\limits_{\alpha} \overline{a_\alpha X}$. Пусть $\xi' \notin \xi$ и $\xi' \in \bigcap\limits_{\alpha} \overline{a_\alpha X}$. Найдутся окрестность V_ξ точки ξ и элемент $b \in K(X)$ такие, что $\xi' \notin V_\xi$, $\xi \in \operatorname{int} bX \subset \overline{bX} \subset V_\xi$. Понятно, что $\xi' \notin \overline{bX}$. Из предыдущего следует, что $bK^1 \in \{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$. Ясно, что $\xi \in \bigcap\limits_{\alpha} \overline{\operatorname{int} a_\alpha X}$. Так как $\bigcap\limits_{\alpha} \overline{\operatorname{int} a_\alpha X} \subseteq \bigcap\limits_{\alpha} \overline{a_\alpha X} = \xi$, то $\bigcap\limits_{\alpha} \overline{\operatorname{int} a_\alpha X} = \xi$.

Будем говорить, что системе $\{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$ *соответствует точка* ξ.

Заметим, что любая точка $\xi \in \operatorname{int} X$ соответствует некоторой максимальной центрированной системе главных правых идеалов полугруппы $K(X)$. Возьмем такую последовательность $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ элементов полугруппы $K(X)$, что $\xi \in \operatorname{int} a_m X$, $a_{m+1}X \subset \operatorname{int} a_m X$, $m = 1, 2, \dots$, и $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \operatorname{int} a_m X = \xi$. Тогда ясно, что $\{a_m K^1\}_{m=1}^{\infty}$ — центрированная система главных правых идеалов полугруппы $K(X)$ и из леммы 3 следует, что максимальной центрированной системе главных правых идеалов полугруппы $K(X)$, содержащей $\{a_m K^1\}_{m=1}^{\infty}$, будет соответствовать точка ξ.

Лемма 4. *Пусть $\{a_\alpha K^1\}_{\alpha=1}^{\infty}$ — максимальная центрированная система главных правых идеалов полугруппы $K(X)$, которой соответствует точка ξ. Если $\{a_\beta K^1\}_{\beta\in B}$ — другая максимальная центрированная система главных правых идеалов полугруппы $K(X)$, которой также соответствует точка ξ, то, какие бы ни были элементы $a_{\alpha'}K^1 \in \{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$ и $a_{\beta'}K^1 \in \{a_\beta K^1\}_{\beta\in B}$, удовлетворяющие условию $a_{\alpha'}K^1 \cap \alpha_{\beta'}K^1 = \varnothing$, нет элементов $a_{\alpha''}K^1 \in \{a_\alpha K^1\}_{a\in A}$ и $a_{\beta''}K^1 \in \{a_\beta K^1\}_{\beta\in B}$ таких, что в $K(X)$ разрешимы уравнения $a_{\alpha'}x = a_{\alpha''}$ и $\alpha_{\beta'}x = a_{\beta''}$. Если $\{a_\gamma K^1\}_{\gamma\in\Gamma}$ — произвольная максимальная центрированная система главных правых идеалов полугруппы $K(X)$, которой соответствует точка $\xi' \neq \xi$, то существуют элементы $a_{\alpha'}K^1$ $a_{\alpha''}K^1 \in \{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$ и $a_{\gamma'}K^1$, $a_{\gamma''}K^1 \in \{a_\gamma K^1\}_{\gamma\in\Gamma}$ такие, что одновременно выполняются следующие условия:*

1) $a_{\alpha'}K^1 \cap a_{\gamma'}K^1 = \varnothing$,

2) *уравнения $a_{\alpha'}x = a_{\alpha''}$ и $a_{\gamma'}x = a_{\gamma''}$ разрешимы в $K(X)$.*

Доказательство. Пусть $\{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$ и $\{a_\beta K^1\}_{\beta\in B}$ — максимальные центрированные системы главных правых идеалов полугруппы $K(X)$, которым соответствует одна и та же точка ξ. Предположим, что $a_{\alpha'}K^1 \in \{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$, $a_{\beta'}K^1 \in \{a_\beta K^1\}_{\beta\in B}$ и $a_{\alpha'}K^1 \bigcap a_{\beta'}K^1 = \varnothing$. Из леммы 1 следует, что $\operatorname{int} a_{\alpha'}X \cap \operatorname{int} a_{\beta'}X = \varnothing$. Допустим, что найдутся $\alpha'' \in A$ и $\beta'' \in B$, для которых уравнения $a_{\alpha'}x = a_{\alpha''}$ и $a_{\beta'}x = a_{\beta''}$ разрешимы в $K(X)$. Тогда из леммы 2 вытекает, что $\overline{a_{\alpha''}X} \subset \operatorname{int} a_{\alpha'}X$, $\overline{a_{\beta''}X} \subset \operatorname{int} a_{\beta'}X$. Точка ξ принадлежит как $\overline{a_{\alpha''}X}$, так и $\overline{a_{\beta''}X}$. Поэтому $\xi \in \operatorname{int} a_{\alpha'}X \cap \operatorname{int} a_{\beta'}X \neq \varnothing$; противоречие.

Переходим к доказательству второй части леммы. Пусть $\{\alpha_\gamma K^1\}_{\gamma\in\Gamma}$ — максимальная центрированная система главных правых идеалов полугруппы $K(X)$, которой соответствует точка $\xi' \neq \xi$. Выберем какие-нибудь дизъюнктные окрестности V_ξ и $V_{\xi'}$ точек ξ и ξ' соответственно. Найдутся гомеоморфизмы $a_{\alpha'}, a_{\gamma'} \in K(X)$ такие, что $a_{\alpha'}X \subset V_\xi$, $\xi \in \operatorname{int} a_{\alpha'}X$, $a_{\gamma'}X \subset V_{\xi'}$, $\xi' \in \operatorname{int} a_{\gamma'}X$. Выберем замкнутые шары B_ξ и $B_{\xi'}$, удовлетворяющие условию $\xi \in B_\xi \subset \operatorname{int} a_{\alpha'}X$, $\xi' \in B_{\xi'} \subset \operatorname{int} a_{\gamma'}X$. Найдутся гомеоморфизмы $a_{\alpha''}, a_{\gamma''} \in K(X)$ такие, что

$\xi \in \operatorname{int} a_{\alpha''}X$, $\overline{a_{\alpha''}X} \subset \operatorname{int} B_\xi$, $\xi' \in \operatorname{int} a_{\gamma''}X$, $\overline{a_{\gamma''}X} \subset \operatorname{int} B_{\xi'}$. Имеем

$$\overline{a_{\alpha'}^{-1}a_{\alpha''}X} \subseteq \overline{a_{\alpha'}^{-1}\overline{a_{\alpha''}X}} = a_{\alpha'}^{-1}\overline{a_{\alpha''}X} \subset a_{\alpha'}^{-1}\operatorname{int} B_\xi = \operatorname{int} a_{\alpha'}^{-1}B_\xi,$$

$$a_{\alpha'}^{-1}B_\xi \subset a_{\alpha'}^{-1}\operatorname{int} a_{\alpha'}X = a_{\alpha'}^{-1}a_{\alpha'}\operatorname{int} X = \operatorname{int} X,$$

т. е. $a_{\alpha'}^{-1}a_{\alpha''} \in K(X)$. Аналогично $\alpha_{\gamma'}^{-1}a_{\gamma''} \in K(X)$. Очевидно, элементы $a_{\alpha'}^{-1}a_{\alpha''}$ и $\alpha_{\gamma'}^{-1}a_{\gamma''}$ будут решениями уравнений $a_{\alpha'}x = a_{\alpha''}$ и $\alpha_{\gamma'}x = a_{\gamma''}$. Так как $\xi \in \operatorname{int} a_{\alpha'}X$, $\xi \in \operatorname{int} a_{\alpha''}X$, то $a_{\alpha'}K^1 \in \{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$ и $a_{\alpha''}K^1 \in \{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$. Аналогично $a_{\gamma'}K^1 \in \{a_\gamma K^1\}_{\gamma\in\Gamma}$ и $a_{\gamma''}K^1 \in \{a_\gamma K^1\}_{\gamma\in\Gamma}$.

Замечание. Таким образом, множество всех максимальных центрированных систем главных правых идеалов полугруппы $K(X)$ разбивается на непересекающиеся классы.

В дальнейшем под максимальной центрированной системой всегда подразумеваем максимальную центрированную систему главных правых идеалов полугруппы $K(X)$.

Лемма 5. *Пусть $\{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$ — максимальная центрированная система, которой соответствует точка ξ и $\{a_m K^1\}_{m=1}^\infty$ — последовательность ее элементов такая, что уравнения $a_m x = a_{m+1}$ разрешимы в $K(X)$ при $m = 1, 2, \dots$. Любое расширение последовательности $\{a_m K^1\}_{m=1}^\infty$ до максимальной центрированной системы соответствует точке ξ тогда и только тогда, когда для каждой окрестности V_ξ точки ξ найдется целое n такое, что $a_m X \subset V_\xi$ при $m \geq n$.*

Доказательство. Пусть $\{a_m K^1\}_{m=1}^\infty$ — последовательность, о которой говорится в лемме, и точка ξ соответствует некоторому максимальному расширению этой последовательности. Пусть для некоторой окрестности V_ξ не найдется требуемого n. Можно вместо окрестности V_ξ, очевидно, взять окрестность V'_ξ такую, что $\overline{V'_\xi} \subset V_\xi$. Из разрешимости уравнений $a_m x = a_{m+1}$ следует, что $\overline{a_{m+1}x} \subset \operatorname{int} a_m X$ при $m = 1, 2, \dots$. Поэтому $\operatorname{int} a_m X \setminus \overline{V'_\xi} \neq \varnothing$ при $m = 1, 2, \dots$. Очевидно, система множеств $\{\operatorname{int} a_m X \setminus \overline{V'_\xi}\}_{m=1}^\infty$ центрирована. Тем самым центрирована и система компактов $\overline{\{\operatorname{int} a_m X \setminus \overline{V'_\xi}\}_{m=1}^\infty}$. Значит, $\bigcap\limits_{m=1}^\infty \overline{\operatorname{int} a_m X \setminus \overline{V'_\xi}} \neq \varnothing$. Пусть $\xi' \in \bigcap\limits_{m=1}^\infty \overline{\operatorname{int} a_m X \setminus \overline{V'_\xi}}$. Очевидно, $\xi' \neq \xi$. Отделим друг от друга точки ξ и ξ' окрестностями U_ξ и $U_{\xi'}$ соответственно. Найдется гомеоморфизм $a_0 \in K(X)$ такой, что $a_0 X \subset U_{\xi'}$, $\xi' \in \operatorname{int} a_0 X$. Ясно, что система $\{\operatorname{int} a_m X\}_{m=0}^\infty$ центрирована. Поэтому центрирована по лемме 1 и система $\{a_m K^1\}_{m=0}^\infty$. Возьмем элемент $a_{\alpha'} \in K(X)$ такой, что $\xi \in \operatorname{int} a_{\alpha'}X \subseteq a_{\alpha'}X \subset U_\xi$. Тогда по лемме 3 имеем, что $a_{\alpha'}K^1 \in \{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$. Очевидно $a_{\alpha'}K^1 \cap a_0 K^1 = \varnothing$. Поэтому $a_{\alpha'}K^1$ не принадлежит максимальному расширению последовательности $\{a_m K^1\}_{m=1}^\infty$, о котором идет речь в начале доказательства леммы. Пусть $\{a_m K^1\}_{m=1}^\infty$ — последовательность элементов максимальной центрированной системы $\{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$, которой соответствует точка ξ, и пусть уравнения $a_m x = a_{m+1}$ разрешимы в $K(X)$ при $m = 1, 2, \dots$. Пусть, кроме того, для каждой окрестности V_ξ точки ξ найдется целое n такое, что $a_m X \subset V_\xi$ при $m \geq n$.

Так как $\{a_m K^1\}_{m=1}^\infty$ — подсистема максимальной центрированной системы $\{a_\alpha K^1\}_{\alpha\in A}$, то $\xi \in \bigcap\limits_{m=1}^\infty \overline{\operatorname{int} a_m X}$. Предположим, что кроме точки ξ есть еще некоторая точка ξ' в $\bigcap\limits_{m=1}^\infty \overline{\operatorname{int} a_m X}$. Возьмем окрестность V_ξ точки ξ такую, что

$\xi' \notin \overline{V}_\xi$. Начиная с некоторого $m \geq n$ имеем $a_m X \subset V_\xi$. Значит, $\xi' \notin \overline{a_m X}$ при $m \geq n$ и $\xi \notin \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{\operatorname{int} a_m X}$.

Итак, любое расширение последовательности $\{a_m K^1\}_{m=1}^{\infty}$ до максимальной центрированной системы обладает тем свойством, что этой максимальной центрированной системе соответствует точка ξ.

Замечание. Пусть $\{a_\alpha K^1\}_{\alpha \in A}$ — максимальная центрированная система, которой соответствует точка ξ. Последовательность, удовлетворяющую условиям леммы 5, можно выделить в ней, например, следующим образом.

Пусть $\{B_{r/k}\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность замкнутых шаров с центрами в точке ξ и радиусами r/k, где $B_r \subset \operatorname{int} X$, а $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность гомеоморфизмов пространства X в себя таких, что $\xi \in \operatorname{int} b_k X$ и $\overline{b_k X} \subset \operatorname{int} B_{r/k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Гомеоморфизм b_1 обозначим через a_1. Найдется первый шар радиуса r/k_1, где k_1 — некоторое натуральное число, такой, что $B_{r/k_1} \subset \operatorname{int} a_1 X$. Соответствующий этому шару гомеоморфизм b_{k_1} обозначим через a_2. Очевидно, в $K(X)$ разрешимо уравнение $a_1 x = a_2$. Пусть выделен элемент a_m. Возьмем первый шар радиуса B_{r/k_m}, где k_m — некоторое натуральное число, такой, что $B_{r/k_m} \subset \operatorname{int} a_m X$. Соответствующий этому шару гомеоморфизм b_{k_m} обозначим через a_{m+1}. Уравнение $a_m x = a_{m+1}$, очевидно, разрешимо в $K(X)$. Последовательность $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ согласно построению удовлетворяет условиям леммы 5. Значит, любому расширению последовательности $\{a_m K^1\}_{m=1}^{\infty}$ до максимальной центрированной системы будет соответствовать точка ξ.

Назовем *B-последовательностью* полугруппы $K(X)$ центрированную последовательность $\{a_m K^1\}_{m=1}^{\infty}$ главных правых идеалов полугруппы $K(X)$ такую, что все уравнения $a_m x = a_{m+1}$, $m = 1, 2, \ldots$, разрешимы в $K(X)$ и все максимальные центрированные системы главных правых идеалов в $K(X)$, содержащие эту последовательность, принадлежат одному классу (замечание к лемме 4). Из лемм 4 и 5 и замечаний к ним следует, что в каждой максимальной центрированной системе содержатся B-последовательности. Систему правых идеалов $\{R_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ полугруппы D_x назовем *B-системой правых идеалов*, если для каждой B-последовательности $\{a_m K^1\}_{m=1}^{\infty}$ найдутся $a_{m'} K^1 \in \{a_m K^1\}_{m=1}^{\infty}$ и $R_{\theta'} \in \{R_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ такие, что $a_{m'} K^1 \subseteq R_{\theta'}$.

Лемма 6. *Система правых идеалов $\{R_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ является B-системой правых идеалов тогда и только тогда, когда $\bigcup\limits_{\theta} sR_\theta = \operatorname{int} X$.*

Доказательство. Пусть $\xi \in \operatorname{int} X$, $\{a_\alpha K^1\}_{\alpha \in A}$ — максимальная центрированная система, которой соответствует точка ξ, $\{a_m K^1\}_{m=1}^{\infty}$ — B-последовательность полугруппы $K(X)$, состоящая из ее элементов. Тогда $\xi \in \operatorname{int} a_m X$ при $m = 1, 2, \ldots$. Если $\{R_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ — B-система правых идеалов, то для некоторых $m' \in N$ и $\theta' \in \Theta$ имеет место $a_{m'} K^1 \subseteq R_{\theta'}$. Очевидно, $s(a_{m'} K^1) \subseteq sR_{\theta'}$. Значит, $\xi \in \operatorname{int} a_{m'} X \subseteq sR_{\theta'}$, поэтому $\bigcup\limits_{\theta} sR_\theta = \operatorname{int} X$. Рассмотрим систему правых идеалов $\{R_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ полугруппы D_x такую, что $\bigcup\limits_{\theta} sR_\theta = \operatorname{int} X$. Пусть $\xi \in \operatorname{int} X$, тогда ξ принадлежит некоторому sR_θ, а значит, $\xi \in \operatorname{int} X$ для некоторого $a \in R_\theta$. Далее, пусть $\{a_\alpha K^1\}_{\alpha \in A}$ — максимальная центрированная система, которой соответствует точка ξ, и $\{a_m K^1\}_{m=1}^{\infty}$ — B-последовательность, состоящая из ее элементов. Выберем замкнутые шары B_ξ и B'_ξ с центром в точке ξ такие, что $B'_\xi \subset \operatorname{int} B_\xi$, $B_\xi \subset \operatorname{int} aX$. По лемме 5 найдется такое $m' \in N$, что $a_{m'} X \subset \operatorname{int} B'_\xi$.

Имеем

$$\overline{a^{-1}a_{m'}X} \subseteq \overline{a^{-1}\overline{a_{m'}X}} = a^{-1}\overline{a_{m'}X} \subset a^{-1}\operatorname{int} B_\xi = \operatorname{int} a^{-1}B_\xi,$$
$$a^{-1}B_\xi \subset a^{-1}\operatorname{int} aX = a^{-1}a \operatorname{int} X = \operatorname{int} X.$$

Таким образом, уравнение $ax = a_{m'}$ разрешимо в $K(X)$. Получаем, что $a_{m'} \in aK^1$, $a_{m'}K^1 \subseteq aK^1 \subseteq aD_x^1 \subseteq R_{\theta'}$. Итак, система $\{R_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ является B-системой правых идеалов.

Теорема 7. *Пусть X — подмножество с непустой внутренностью в конечномерном евклидовом пространстве. Равенство $\dim X = n$ выполняется тогда и только тогда, когда в каждую конечную B-систему правых идеалов полугруппы D_x можно вписать конечную B-систему правых идеалов полугруппы D_x кратности $\le n+1$. При этом для некоторой конечной B-системы правых идеалов полугруппы D_x каждая вписанная в нее конечная B-система правых идеалов полугруппы D_x имеет кратность $\ge n+1$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\{\Omega_p\}_{p=1}^q$ — конечное открытое покрытие множества $\operatorname{int} X$ и $\xi \in \operatorname{int} X$. Тогда $\xi \in \Omega_{p_0}$, где $\Omega_{p_0} \in \{\Omega_p\}_{p=1}^q$. Возьмем $a_\xi \in K(X)$ такое, что $a_\xi X \subset \Omega_{p_0}$, $\xi \in \operatorname{int} a_\xi X$. Через R_{p_0} обозначим правый идеал $\bigcup\limits_{\xi\in\Omega_{p_0}} a_\xi D_x^1$. Очевидно, $sR_{p_0} = \Omega_{p_0}$ и $\bigcup\limits_{p=1}^q sR_p = \bigcup\limits_{p=1}^q \Omega_p = \operatorname{int} X$. По лемме 6 $\{R_p\}_{p=1}^q$ является B-системой правых идеалов полугруппы D_x. По предположению в $\{R_p\}_{p=1}^q$ можно вписать некоторую конечную B-систему $\{R'_k\}_{k=1}^m$ правых идеалов полугруппы D_x кратности $\le n+1$. Так как $\{R'_k\}_{k=1}^m$ — B-система, то $\bigcup\limits_{k=1}^m sR'_k = \operatorname{int} X$. Пусть $R'_{k'} \in \{R'_k\}_{k=1}^m$. Найдется $R_{p'} \in \{R_p\}_{p=1}^q$ такое, что $R'_{k'} \subseteq R_{p'}$. Это означает, что $sR'_{k'} \subseteq sR_{p'} = \Omega_{p'}$. Кроме того, так как $\operatorname{ord}\{R'_k\}_{k=1}^m \le n+1$ и $\operatorname{ord}\{R'_k\}_{k=1}^m = \operatorname{ord}\{sR'_k\}_{k=1}^m$ (по лемме 1), то $\operatorname{ord}\{sR'_k\}_{k=1}^m \le n+1$.

Таким образом, в любое конечное открытое покрытие множества $\operatorname{int} X$ можно вписать конечное открытое покрытие $\{sR'_k\}_{k=1}^m$ кратности $\le n+1$. Возьмем такую конечную B-систему $\{R_p\}_{p=1}^q$ правых идеалов полугруппы D_x, что каждая вписанная в нее конечная B-система правых идеалов полугруппы D_x имеет кратность $\ge n+1$. Так как $\{R_p\}_{p=1}^q$ — B-система, то $\bigcup\limits_{p=1}^q sR_p = \operatorname{int} X$, т. е. семейство $\{sR_p\}_{p=1}^q$ является открытым покрытием множества $\operatorname{int} X$. Обозначим sR_p через Ω_p. Пусть $\{\Omega'_k\}_{k=1}^m$ — некоторое вписанное в $\{\Omega_p\}_{p=1}^q$ конечное открытое покрытие множества $\operatorname{int} X$. Пусть $\Omega'_{k'} \in \{\Omega'_k\}_{k=1}^m$. Выберем $\Omega_{p'} \in \{\Omega_p\}_{p=1}^q$ такое, что $\Omega'_k \subseteq \Omega_{p'}$. Так как $\Omega_{p'} = sR_{p'}$, то для каждой точки $\xi \in \Omega'_{k'}$ найдется элемент $a_\xi \in R_{p'}$ такой, что $\xi \in \operatorname{int} a_\xi X$. Найдется элемент $b_\xi \in K(X)$ такой, что $b_\xi X \subset \Omega'_{k'} \cap \operatorname{int} a_\xi X$, $\xi \in \operatorname{int} b_\xi X$, и уравнение $a_\xi x = b_\xi$ будет разрешимо в $K(X)$ (доказательство аналогично рассуждениям в конце леммы 6), т. е. $a_\xi^{-1} b_\xi \in K(X)$. Таким образом,

$$s\big(b_\xi D_x^1\big) = \operatorname{int} b_\xi X \subset \Omega'_{k'}, \quad b_\xi = a_\xi\big(a_\xi^{-1}b_\xi\big), \quad b_\xi D_x^1 = a_\xi\big(a_\xi^{-1}b_\xi\big)D_x^1 \subset a_\xi D_x^1 \subseteq R_{p'}.$$

Значит, $\bigcup\limits_{\xi\in\Omega'_{k'}} b_\xi D_x^1 \subset R_{p'}$ и $s\Big(\bigcup\limits_{\xi\in\Omega'_{k'}} b_\xi D_x^1\Big) = \Omega'_{k'}$. Обозначим правый идеал $\bigcup\limits_{\xi\in\Omega'_{k'}} b_\xi D_x^1$ через $R'_{k'}$. Для каждого Ω'_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, построим аналогичным образом правый идеал R'_k. Очевидно, что по построению система правых идеалов $\{R'_k\}_{k=1}^m$ будет вписанной в систему правых идеалов $\{R_p\}_{p=1}^q$ и

$\bigcup\limits_{k=1}^{m} sR'_k = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Omega'_k = \operatorname{int} X$, т. е. система $\{R'_k\}_{k=1}^m$ является конечной B-системой правых идеалов полугруппы D_x, вписанной в систему $\{R_p\}_{p=1}^q$ и по предположению $\operatorname{ord}\{R'_k\}_{k=1}^m \geq n+1$. Но $\operatorname{ord}\{\Omega'_k\}_{k=1}^m = \operatorname{ord}\{R'_k\}_{k=1}^m \geq n+1$. Таким образом, для покрытия $\{\Omega_p\}_{p=1}^q$ каждое вписанное в него открытое покрытие $\{\Omega'_k\}_{k=1}^m$ имеет кратность $\geq n+1$. Значит, $\dim \operatorname{int} X = n$, поэтому и $\dim X = n$ [1].

Необходимость. Пусть $\dim X = n$ и $\{R_p\}_{p=1}^q$ — какая-то B-система правых идеалов полугруппы D_x. Из леммы 6 следует, что $\bigcup\limits_{p=1}^{q} sR_p = \operatorname{int} X$, т. е. семейство открытых множеств $\{sR_p\}_{p=1}^q$ является конечным открытым покрытием множества $\operatorname{int} X$. Это означает, что в покрытие $\{sR_p\}_{p=1}^q$ можно комбинаторно вписать конечное открытое покрытие $\{\Omega_p\}_{p=1}^q$ кратности $\leq n+1$. Отсюда $\Omega_p \subseteq sR_p$ при $p = 1, \dots, q$. Пусть $\Omega_{p'} \in \{\Omega_p\}_{p=1}^q$. Для каждой точки $\xi \in \Omega_{p'}$ найдется элемент $a_\xi \in R_{p'}$ такой, что $\xi \in \operatorname{int} a_\xi X$. Также легко найти элемент $b_\xi \in K(X)$ такой, что $\xi \in \operatorname{int} b_\xi X$, $b_\xi X \subset \operatorname{int} a_\xi X \cap \Omega_{p'}$ и уравнение $a_\xi x = b_\xi$ разрешимо в $K(X)$. Имеем $b_\xi \in a_\xi K^1$, $b_\xi \in a_\xi D_x^1$, $b_\xi D_x^1 \subset a_\xi D_x^1$ и $\bigcup\limits_{\xi \in \Omega_{p'}} \operatorname{int} b_\xi X = \Omega_{p'}$. Кроме того,

$$\bigcup_{\xi \in \Omega_{p'}} b_\xi D_x^1 \subset \bigcup_{\xi \in \Omega_{p'}} a_\xi D_x^1 \subseteq R_{p'}.$$

Обозначим правый идеал $\bigcup\limits_{\xi \in \Omega_{p'}} b_\xi D_x^1$ через $R'_{p'}$. Так как $sR'_{p'} = \bigcup\limits_{\xi \in \Omega_{p'}} \operatorname{int} b_\xi X = \Omega_{p'}$, то

$$\operatorname{ord}\{R'_p\}_{p=1}^q = \operatorname{ord}\{\Omega_p\}_{p=1}^q \leq n+1.$$

Далее, найдется такое конечное открытое покрытие $\{\Omega_p\}_{p=1}^q$ множества $\operatorname{int} X$, что любое вписанное в него конечное открытое покрытие имеет кратность $\geq n+1$. Пусть $\xi \in \Omega_{p_0}$, где $1 \leq p_0 \leq q$. Возьмем $a_\xi \in K(X)$ такой, что $a_\xi X \subset \Omega_{p_0}$, $\xi \in \operatorname{int} a_\xi X$. Рассмотрим правый идеал $\bigcup\limits_{\xi \in \Omega_{p_0}} a_\xi D_x^1$ и обозначим его через R_{p_0}. Очевидно, $sR_{p_0} = \Omega_{p_0}$ и $\bigcup\limits_{p=1}^{q} sR_p = \operatorname{int} X$. Из леммы 6 следует, что система $\{R_p\}_{p=1}^q$ является B-системой правых идеалов полугруппы D_x. Предположим, что в систему $\{R_p\}_{p=1}^q$ можно вписать какую-то конечную B-систему правых идеалов кратности $< n+1$. Обозначим укрупнение этой системы до комбинаторной вписанности относительно системы $\{R_p\}_{p=1}^q$ через $\{R'_p\}_{p=1}^q$. Ясно, что $\operatorname{ord}\{R'_p\}_{p=1}^q < n+1$. Обозначим sR'_p через Ω'_p для каждого $p = 1, \dots, q$. Легко видеть, что $\bigcup\limits_p \Omega'_p = \bigcup\limits_p sR'_p = \operatorname{int} X$, так как система $\{R'_p\}_{p=1}^q$ как укрупнение B-системы сама является B-системой. Но $R'_p \subseteq R_p$ при каждом p, поэтому $sR'_p \subseteq sR_p$ при каждом p. Из леммы 1 следует, что

$$\operatorname{ord}\{R'_p\}_{p=1}^q = \operatorname{ord}\{sR'_p\}_{p=1}^q = \operatorname{ord}\{\Omega'_p\}_{p=1}^q.$$

Таким образом, $\operatorname{ord}\{\Omega'_p\}_{p=1}^q < n+1$, что невозможно.

Теорема доказана.

Выражаю глубокую благодарность Аркадию Анатольевичу Мальцеву за ценные советы, поддержку и постоянное внимание к работе, а также рецензенту, внимательно ознакомившемуся с работой и сделавшему замечания, улучшившие изложение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.

2. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1982.

3. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.

4. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.

5. *Юсуфов В. Ш.* О полугруппах топологических отображений // Докл. Азербайджан. ССР. 1976. № 11. С. 6–7.

6. *Глускин Л. М.* Автоморфизмы полугрупп топологических отображений // Изв. вузов. Математика. 1960. Т. 19, № 6. С. 62–74.

7. *Юсуфов В. Ш.* Специальные вопросы алгебры и топологии. Баку, 1982.

8. *Yusufov V. Sh.* Semigroups of homeomorphisms and dimension // Trans. NASA. Ser. Phys. Tech. Math. Sci. 2010. V. 30, N 4. P. 171–176.

Статья поступила 16 января 2012 г.

Юсуфов Владимир Шамильевич
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ул. Б. Вахабзаде, 9, Баку AZ1141, Азербайджан
v.yusufov291@gmail.com