Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 512.572

ОБ АЛГЕБРАХ ЛИ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

С. М. Рацеев

Аннотация. Приводятся две серии алгебр Ли с экстремальными свойствами. Каждая из алгебр первой серии порождает многообразие полиномиального роста, минимальное по отношению к степени полинома. Алгебры данной серии принадлежат так называемому многообразию Воличенко, которое имеет почти полиномиальный рост. Каждая из алгебр второй серии порождает многообразие полиномиального роста, минимальное по отношению к старшему коэффициенту полинома. Алгебры данной серии принадлежат многообразию почти полиномиального роста $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$.

Ключевые слова: алгебра Ли, многообразие алгебр, рост многообразия.

На протяжении всей работы предполагается, если это специально не оговорено, что основное поле имеет нулевую характеристику.

В теории ассоциативных алгебр очень важную роль играют бесконечномерная алгебра Грассмана Λ и алгебра верхнетреугольных матриц порядка 2, которую обозначим через UT_2. Из работы А. Р. Кемера [1] следует, что существуют только два многообразия ассоциативных алгебр почти полиномиального роста: $\mathrm{var}(\Lambda)$, $\mathrm{var}(UT_2)$. В [2] Маттиной полностью описаны все подмногообразия в $\mathrm{var}(\Lambda)$ и $\mathrm{var}(UT_2)$.

В случае алгебр Ли на данный момент известны пять многообразий почти полиномиального роста (см. обзор [3]). Два из этих многообразий по своим свойствам схожи с многообразиями $\mathrm{var}(\Lambda)$ и $\mathrm{var}(UT_2)$. Первое многообразие, порожденное алгеброй матриц $L = \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ порядка 2 относительно операции коммутирования, описано в работах И. Б. Воличенко [4, 5], второе многообразие алгебр Ли $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$ — в работе С. П. Мищенко [6].

Заметим, что в случае алгебр Пуассона (которые имеют две операции умножения, причем относительно одной операции умножения данные алгебры являются алгебрами Ли, а относительно другой — ассоциативными коммутативными алгебрами и данные операции связаны правилом Лейбница) существуют только два многообразия почти полиномиального роста [7], которые по своим свойствам схожи с многообразиями $\mathrm{var}(\Lambda)$ и $\mathrm{var}(UT_2)$.

Данная работа посвящена описанию двух серий алгебр Ли с экстремальными свойствами. Алгебры первой серии принадлежат многообразию $\mathrm{var}(L)$, алгебры второй серии — $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$.

Пусть $L(X)$ — свободная алгебра Ли над полем K, где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное множество свободных образующих, P_n — подпространство в $L(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \dots, x_n$. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Ли, $\mathrm{Id}(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$

в свободной алгебре $L(X)$ (все необходимые определения и сведения из теории PI-алгебр можно найти в [8]). Обозначим

$$P_n(\mathbf{V}) = P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(\mathbf{V})), \quad c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}).$$

Асимптотическое поведение последовательности $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ определяет *рост многообразия* $\mathbf{V}$.

Действие $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$ симметрической группы S_n естественным образом продолжается на все пространство $P_n(\mathbf{V})$. Исследование структуры $P_n(\mathbf{V})$ как S_n-модуля играет важную роль при изучении многообразия $\mathbf{V}$.

Обозначим через χ_λ характер неприводимого представления симметрической группы, соответствующего разбиению λ числа n, и рассмотрим для многообразия $\mathbf{V}$ разложение

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum_{\lambda\vdash n,} m_\lambda(\mathbf{V})\chi_\lambda.$$

Обозначим через d_λ размерность соответствующего λ неприводимого модуля. Размерность данного модуля определяется следующей формулой крюков:

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{(i,j)\in d} h_{ij}(d)},$$

где $h_{ij}(d) = (\lambda_i - i) + (\mu_j - j) + 1$, λ_i — длина i-й строки, μ_j — длина j-го столбца диаграммы d.

В элементах будем опускать скобки при их левонормированной расстановке: $((ab)c) = abc$.

Для удобства записи элементы, содержащие кососимметрический набор, будем записывать без знака суммирования, помечая переменные этого набора чертой или волной сверху. Например, лиев стандартный полином примет такой вид:

$$x_0\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma x_0 x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}.$$

Будем использовать символ $\widehat{\ }$, если соответствующий элемент пропущен.

Левонормированный моном вида $z\underbrace{x\ldots x}_{n}$ будем обозначать через zx^n.

Далее понадобятся следующие два несложных замечания, которые нетрудно проверить.

Замечание 1. Пусть A — ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем K. На декартовом квадрате $L = A \times A$ определим операции сложения и умножения элементов множества L, а также операцию умножения на элементы поля K:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = ([x_1, y_1], x_1 \wedge y_2 - y_1 \wedge x_2),$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2),$$

где $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$, $\alpha \in K$, $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L$. Тогда полученная алгебра L является алгеброй Ли.

Заметим, что алгебра Ли L из замечания 1 изоморфна алгебре $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ относительно операции коммутирования. Вариант $L = A \times A$ используется для компактности записи.

Замечание 2. Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с единицей 1 над произвольным полем K, $L = A \times A$ — алгебра Ли, построенная с помощью замечания 1, ω — некоторый моном свободной алгебры Ли, являющийся произведением ≥ 2 скобок, каждая из которых имеет длину ≥ 2. Будем некоторым образом в данный моном подставлять произвольные элементы множества $\{(a, 0) \mid a \in A\} \cup \{(0, b) \mid b \in A\}$. Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий:

(i) в одну скобку попали только элементы вида $(a, 0)$, среди которых имеется хотя бы один элемент $(1, 0)$;

(ii) среди подставленных элементов имеются хотя бы два элемента вида $(0, b)$;

(iii) в две различные скобки попадают хотя бы по одному элементу $(1, 0)$.
Тогда в результате получится нулевой элемент алгебры L.

Пусть Λ — бесконечномерная алгебра Грассмана с единицей, Λ_{2k} — алгебра Грассмана с единицей и $2k$ образующими элементами $\{e_1, \ldots, e_{2k}\}$, $G = \Lambda \times \Lambda$, $G_{2k} = \Lambda_{2k} \times \Lambda_{2k}$ — алгебры Ли, построенные с помощью замечания 1.

Теорема 1 [4, 5]. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Ли G верны следующие утверждения:*

1) *идеал тождеств* $\mathrm{Id}(G)$ *порождается тождествами*

$$(x_1 x_2 x_3)(x_4 x_5 x_6) = 0, \tag{1}$$

$$(x_1 x_2)(x_3 x_4)(x_1 x_3) = 0; \tag{2}$$

2) *многообразие* $\mathrm{var}(G)$ *имеет почти полиномиальный рост, причем для любого $n \geq 3$ выполнено равенство $c_n(G) = (n-2)2^{n-2}$;*

3) *для любого $n \geq 5$ выполнено равенство*

$$\chi_n(G) = \sum_{i=1}^{n-2} \chi_{(n-i,1^i)} + \sum_{i=2}^{n-2} \chi_{(n-i,2,1^{i-2})};$$

4) *многообразие* $\mathrm{var}(G)$ *является наименьшим многообразием алгебр Ли, в котором не выполнено ни одно лиево стандартное тождество.*

Лемма. *Следствиями тождеств* (1) *и* (2) *являются тождества*

$$(z_1 z_2 z_3)(y_1 x)(x y_2) = 0, \tag{3}$$

$$(z_1 z_2 z_3)\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n}(z_1 z_2 z_3)(x_1 x_2) \ldots (x_{2n-1} x_{2n}). \tag{4}$$

Доказательство. Подставим в тождество (2) вместо переменной x_1 сумму $x_1 + (z_1 z_2)$ и воспользуемся тождеством (1). Тем самым получим тождество (3).

Заметим, что в любой алгебре Ли выполнено тождество

$$z\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{2n} = \frac{1}{2^n} z(\bar{x}_1 \bar{x}_2) \ldots (\bar{x}_{2n-1} \bar{x}_{2n}). \tag{5}$$

Действительно, применяя тождество антикоммутативности и тождество Якоби, получаем

$$2z\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_{2n} = z\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_{2n} - z\bar{x}_2\bar{x}_1\dots\bar{x}_{2n} = z(\bar{x}_1\bar{x}_2)\dots\bar{x}_{2n}.$$

Продолжая аналогичным образом, приходим к тождеству (4).

Заметим, что для любой перестановки $\sigma \in S_{2n}$ из тождества (3) следует такое тождество:

$$(-1)^\sigma(z_1z_2z_3)(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})\dots(x_{\sigma(2n-1)}x_{\sigma(2n)}) = (z_1z_2z_3)(x_1x_2)\dots(x_{2n-1}x_{2n}).$$

Поэтому с учетом тождества (5) имеем

$$\begin{aligned}(z_1z_2z_3)\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_{2n} &= \frac{1}{2^n}(z_1z_2z_3)(\bar{x}_1\bar{x}_2)\dots(\bar{x}_{2n-1}\bar{x}_{2n})\\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{\sigma\in S_{2n}}(-1)^\sigma(z_1z_2z_3)(x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})\dots(x_{\sigma(2n-1)}x_{\sigma(2n)})\\ &= \frac{(2n)!}{2^n}(z_1z_2z_3)(x_1x_2)\dots(x_{2n-1}x_{2n}). \quad \square\end{aligned}$$

Под lin будем подразумевать полную линеаризацию полинома.

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции натурального аргумента. Будем обозначать $f(n) \approx g(n)$, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

В [9] показано, что если последовательность коразмерностей $\{c_n(R)\}_{n\geq 1}$ ассоциативной алгебры (алгебры Ли) R ограничена полиномом, то найдется такое рациональное q и целое d, что $c_n(R) \approx qn^d$. Данное свойство выполнено и для алгебр Пуассона [10].

Нетрудно проверить, что идеал тождеств алгебры G_0 порождается тождеством $(x_1x_2)(x_3x_4) = 0$, для любого $n \geq 3$ выполнены равенства

$$c_n(G_0) = n-1, \quad \chi_n(G_0) = \chi_{(n-1,1)}, \quad P_n(G_0) = KS_n\big(\operatorname{lin}\bar{x}_1x_1^{n-2}\bar{x}_2\big)$$

и любое собственное подмногообразие в $\operatorname{var}(G_0)$ нильпотентно. Данные сведения играют роль доказательства базы индукции следующей теоремы.

Теорема 2. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Ли G_{2k}, $k \geq 1$, верны следующие утверждения:*

1) *идеал тождеств $\mathrm{Id}(G_{2k})$ порождается тождествами*

$$(x_1x_2x_3)(x_4x_5x_6) = 0,\ (x_1x_2)(x_3x_4)(x_1x_3) = 0,\ (x_1y_1)(x_2y_2)\dots(x_{k+2}y_{k+2}) = 0; \tag{6}$$

2) *для любого $n \geq 2k+3$ полилинейные элементы от переменных $x_1,\dots,x_n$:*

$$\begin{gathered}x_{i_1}\dots x_{i_r}(x_{j_1}x_{j_2})\dots(x_{j_{2s-1}}x_{j_{2s}}),\\ r+2s=n, \quad i_1 > i_2 < \dots < i_r, \quad j_1 < j_2 < \dots < j_{2s}, \quad 0 \leq s \leq k,\ r \geq 3,\end{gathered} \tag{7}$$

образуют базис пространства $P_n(G_{2k})$;

3) *коразмерности вычисляются по следующей формуле:*

$$c_n(G_{2k}) = \begin{cases}(n-2)2^{n-2}, & 3 \leq n \leq 2k+2,\\ \sum\limits_{i=0}^{k}(n-2i-1)C_n^{2i}, & n \geq 2k+3,\end{cases}$$

причем для любого $n \geq 2k+3$

$$c_n(G_{2k}) = c_n(G_{2k-2}) + (n-2k-1)C_n^{2k} \approx \frac{n^{2k+1}}{(2k)!}, \quad n \to \infty,$$

где C_n^k *— число сочетаний из* n *по* k*;*

4) *для кохарактеров верно следующее равенство:*

$$\chi_n(G_{2k}) = \begin{cases} \chi_n(G), & 1 \leq n \leq 2k+2, \\ \sum\limits_{i=1}^{2k+1} \chi_{(n-i,1^i)} + \sum\limits_{i=2}^{2k+1} \chi_{(n-i,2,1^{i-2})}, & n \geq 2k+3, \end{cases}$$

причем для любого $n \geq 2k+3$

$$\chi_n(G_{2k}) = \chi_n(G_{2k-2}) + \chi_{(n-2k,1^{2k})} + \chi_{(n-2k-1,1^{2k+1})} + \chi_{(n-2k,2,1^{2k-2})} + \chi_{(n-2k-1,2,1^{2k-1})};$$

5) *для любого* $n \geq 2k+3$ *пространство* $P_n(G_{2k})$ *имеет следующее разложение на неприводимые* S_n*-модули:*

$$\begin{aligned} P_n(G_{2k}) &= P_n(G_{2k-2}) \oplus KS_n\big(\operatorname{lin} \bar{x}_1 x_1^{n-2k-1} \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{2k+1}\big) \\ &\quad \oplus KS_n\big(\operatorname{lin} \bar{x}_1 x_1^{n-2k-2} \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{2k+2}\big) \\ &\quad \oplus KS_n\big(\operatorname{lin} x_2 x_1^{n-2k-1} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{2k}\big) \oplus KS_n\big(\operatorname{lin} x_2 x_1^{n-2k-2} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{2k+1}\big) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{2k+1} KS_n\big(\operatorname{lin} \bar{x}_1 x_1^{n-i-1} \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{i+1}\big) \bigoplus_{i=2}^{2k+1} KS_n\big(\operatorname{lin} x_2 x_1^{n-i-1} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_i\big), \end{aligned}$$

причем элемент $\bar{x}_1 x_1^{n-i-1} \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{i+1}$ *соответствует разбиению* $(n-i, 1^i)$*, элемент* $x_2 x_1^{n-i-1} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_i$ *— разбиению* $(n-i, 2, 1^{i-2})$*;*

6) *если* $\mathbf{W}$ *— некоторое собственное подмногообразие в* $\operatorname{var}(G_{2k})$*,* $c_n(\mathbf{W}) \approx qn^d$*, то* $d < 2k+1$*.*

Доказательство. Понятно, что тождества (6) выполнены в алгебре G_{2k} и для любого $n \geq 2k+3$ с учетом тождества (3) пространство $P_n(G_{2k})$ является линейной оболочкой элементов вида (7). Предположим, что для некоторого $n \geq 2k+3$ элементы вида (7) линейно зависимы в $P_n(G_{2k})$. В полученной нетривиальной линейной комбинации элементов вида (7) найдем такое слагаемое, которое имеет ненулевой коэффициент и минимальное значение s (число скобок). Пусть это слагаемое имеет вид

$$\alpha x_{i_1} \ldots x_{i_r} (x_{j_1} x_{j_2}) \ldots (x_{j_{2s-1}} x_{j_{2s}}), \quad 0 \neq \alpha \in K.$$

В этом случае, учитывая замечание 2, во всей линейной комбинации делаем такую подстановку:

$$x_{i_1} \to (0,1), \quad x_{i_q} \to (1,0),\ q = 2, \ldots, r, \quad x_{j_a} \to (e_a, 0),\ a = 1, \ldots, 2s.$$

Тогда все слагаемые, кроме рассматриваемого, будут равны нулю, а данное слагаемое будет равно $\alpha(-1)^{r+s} 2^s (0, e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{2s})$. Понятно, что равенство

$$\alpha(-1)^{r+s} 2^s (0, e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{2s}) = (0,0)$$

выполнено лишь в случае $\alpha = 0$; противоречие. Таким образом, условия 1 и 2 доказаны.

Условие 3 следует из условия 2 и теоремы 1.

Условия 4 и 5 доказываются с помощью математической индукции по k. База индукции для $k = 0$ представлена до теоремы.

Используя формулу крюков, нетрудно проверить, что для любого $n \geq 2k+3$ выполнено равенство

$$d_{(n-2k,1^{2k})} + d_{(n-2k-1,1^{2k+1})} + d_{(n-2k,2,1^{2k-2})} + d_{(n-2k-1,2,1^{2k-1})} = (n-2k-1)C_n^{2k}.$$

Поэтому, учитывая предположение индукции и условие 3, достаточно показать, что для любого $n \geq 2k+3$ следующие элементы не принадлежат идеалу тождеств $\mathrm{Id}(G_{2k})$:

$$\text{(a) } \bar{x}_1 x_1^{n-2k-1} \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{2k+1}, \quad \text{(b) } \bar{x}_1 x_1^{n-2k-2} \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{2k+2},$$
$$\text{(c) } x_2 x_1^{n-2k-1} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{2k}, \quad \text{(d) } x_2 x_1^{n-2k-2} \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{2k+1}.$$

(a) Учитывая, что

$$\bar{x}_1 x_1^{n-2k-1} \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{2k+1} = \sum_{i=2}^{2k+1} (-1)^{i+1} x_i x_1^{n-2k-1} \bar{x}_1 \ldots \hat{x}_i \ldots \bar{x}_{2k+1},$$

применим к каждому слагаемому данной суммы тождество (4) и, принимая во внимание замечание 2, сделаем в рассматриваемом элементе такую подстановку:

$$x_1 \to (1,0) + (e_1,0),\ x_2 \to (e_2,0),\ \ldots,\ x_{2k} \to (e_{2k},0),\ x_{2k+1} \to (0,1).$$

(b) Аналогично с учетом того, что

$$\bar{x}_1 x_1^{n-2k-2} \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{2k+2} = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq 2k+2, \\ i \neq j}} \alpha_{ij} x_i x_1^{n-2k-2} x_j \bar{x}_1 \ldots \hat{x}_i \ldots \hat{x}_j \ldots \bar{x}_{2k+2},$$

где $\alpha_{ij} \in \{-1,1\}$, применим к каждому слагаемому данной суммы тождество (4) и сделаем в рассматриваемом элементе такую подстановку:

$$x_1 \to (1,0) + (e_1,0), \quad x_2 \to (e_2,0),\ \ldots,$$
$$x_{2k} \to (e_{2k},0), \quad x_{2k+1} \to (0,1), \quad x_{2k+2} \to (1,0).$$

В элементах из пп. (c), (d) сделаем такие подстановки:

$$\text{(c) } x_1 \to (1,0) + (e_1,0),\ x_2 \to (0,1) + (e_2,0),\ x_3 \to (e_3,0),\ \ldots,\ x_{2k} \to (e_{2k},0),$$

$$\text{(d)} \quad x_1 \to (1,0) + (e_1,0),\ x_2 \to (0,1) + (e_2,0),\ x_3 \to (e_3,0),$$
$$\ldots,\ x_{2k} \to (e_{2k},0),\ x_{2k+1} \to (1,0).$$

Таким образом, условия 4 и 5 доказаны.

Покажем условие 6. Пусть $\mathbf{W}$ — некоторое собственное подмногообразие в $\mathrm{var}(G_{2k})$. Покажем, что в этом случае в многообразии $\mathbf{W}$ выполнено нетривиальное полилинейное тождество вида

$$\sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_p, \\ j_1 < \cdots < j_{2k}}} \alpha^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{2k}} z_1 z_2 z_3 x_{i_1} \ldots x_{i_p} (x_{j_1} x_{j_2}) \ldots (x_{j_{2k-1}} x_{j_{2k}}) = 0, \quad \alpha^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{2k}} \in K, \tag{8}$$

в котором числа p и k фиксированы.

С учетом условий 4 и 5 найдется такое $p \geq 1$, что в многообразии $\mathbf{W}$ будет выполнено хотя бы одно из тождеств следующего вида:

$$x_2 x_1^p \bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_m = 0, \quad 2 \leq m \leq 2k+1, \tag{9}$$

$$\bar{x}_1 x_1^p \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_m = 0, \quad 2 \leq m \leq 2k+2. \tag{10}$$

Пусть в многообразии $\mathbf{W}$ выполнено тождество (9). Если $m = 2a+1$ нечетное, $a \leq k$, то запишем данное тождество в виде

$$\sum_{i=1}^{2a+1} (-1)^{i+1} x_2 x_1^p x_i \bar{x}_1 \ldots \hat{x}_i \ldots \bar{x}_{2a+1} = 0$$

и к каждому слагаемому данной суммы применим тождество (4). Получим такое тождество:

$$\sum_{i=1}^{2a+1} (-1)^{i+1} x_2 x_1^p x_i (x_1 x_2) \ldots \hat{x}_i \ldots (x_{2a} x_{2a+1}) = 0.$$

Если $a < k$, то домножим данное тождество последовательно на $k-a$ скобок $(x_{2a+2} x_{2a+3}), \ldots, (x_{2k} x_{2k+1})$. В полученном тождестве вместо переменной x_2 подставим сумму $x_2 + (z_1 z_2 z_3)$. Учитывая тождества (1) и $(x_1 y_1) \ldots (x_{k+2} y_{k+2}) = 0$, приходим к тождеству

$$\sum_{i=1}^{2a+1} (-1)^{i+1} z_1 z_2 z_3 x_1^p x_i (x_1 x_2) \ldots \hat{x}_i \ldots (x_{2k} x_{2k+1}) = 0.$$

Полностью линеаризуя последнее тождество, получим тождество вида (8).

Если же $m = 2a$ четное, $a \leq k$, то из условия 5 следует, что $p \geq 2$. Если $a < k$, то домножим данное тождество поочередно на $k-a$ скобок $(x_{2a+1} x_{2a+2}), \ldots, (x_{2k-1} x_{2k})$. К полученному тождеству применим тождество (4). В итоге имеем

$$x_2 x_1^p (x_1 x_2) \ldots (x_{2k-1} x_{2k}) = 0.$$

Вместо переменной x_2 подставим сумму $x_2 + (z_1 z_2 z_3)$. Остается полностью линеаризовать полученное тождество и прийти к тождеству вида (8).

Пусть в многообразии $\mathbf{W}$ выполнено тождество (10). Если $m = 2a$, $a \leq k+1$, то запишем данное тождество в виде

$$\sum_{\substack{1 \leq i,j \leq 2a,\\ i \neq j}} \alpha_{ij} x_i x_1^p x_j \bar{x}_1 \ldots \hat{x}_i \ldots \hat{x}_j \ldots \bar{x}_{2a} = 0, \quad \alpha_{ij} \in \{-1, 1\},$$

применим к каждому слагаемому последней суммы тождество (4), после чего если $a < k+1$, то последовательно домножим данное тождество на $k+1-a$ скобок $(x_{2a+1} x_{2a+2}), \ldots, (x_{2k+1} x_{2k+2})$ и вместо переменной x_2 подставим сумму $x_2 + (z_1 z_2 z_3)$. Затем полностью линеаризуем полученное тождество и приходим к тождеству вида (8).

Если же $m = 2a+1$, $a \leq k$, то из условия 5 следует, что $p \geq 2$. Поэтому сначала запишем тождество (10) в виде

$$\sum_{i=2}^{2a+1} (-1)^{i+1} x_i x_1^p \bar{x}_1 \ldots \hat{x}_i \ldots \bar{x}_{2a+1} = 0,$$

в котором каждое слагаемое полученной суммы подпадает под предыдущий случай.

Таим образом, в многообразии $\mathbf{W}$ выполнено тождество вида (8). Переименовав переменные в данном тождестве, получим полилинейное тождество вида

$$z_1z_2z_3x_{2k+1}\dots x_{2k+p}(x_1x_2)\dots(x_{2k-1}x_{2k}) = \sum_{\substack{i_1<\dots<i_p,\, \{i_1,\dots,i_p\}\neq\{2k+1,\dots,2k+p\},\\ j_1<\dots<j_{2k},\, \{j_1,\dots,j_{2k}\}\neq\{1,\dots,2k\}}} \beta^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_{2k}} z_1z_2z_3x_{i_1}\dots x_{i_p}(x_{j_1}x_{j_2})\dots(x_{j_{2k-1}}x_{j_{2k}}). \tag{11}$$

Пусть A и B — два непустых подмножества множества натуральных чисел. Положим $A < B$, если $a < b$ для любых $a \in A$, $b \in B$.

Для всех достаточно больших n сопоставим каждому элементу вида (7) с $s = k$ скобками такие два множества:

$\{i_{r-p+1}, i_{r-p+2}, \dots, i_r\}$ — индексы p последних элементов монома $x_{i_1}\dots x_{i_r}$;

$\{j_1,\dots,j_{2k}\}$ — индексы всех элементов монома $(x_{j_1}x_{j_2})\dots(x_{j_{2k-1}}x_{j_{2k}})$.

Ввиду тождества (11) и условия 2 пространство $P_n(\mathbf{W})$ для всех достаточно больших n является линейной оболочкой таких элементов вида (7), что для элементов с $s = k$ скобками не выполнено неравенство

$$\{i_{r-p+1}, i_{r-p+2}, \dots, i_r\} > \{j_1,\dots,j_{2k}\}.$$

Заметим, что число элементов вида (7) с $s = k$ скобками, для которых выполнено данное неравенство, не менее чем $(n-2k-1)C^{2k}_{n-p-1}$. Поэтому

$$c_n(\mathbf{W}) \le c_n(G_{2k}) - (n-2k-1)C^{2k}_{n-p-1}.$$

Остается заметить, что степень полинома $C^{2k}_n - C^{2k}_{n-p-1}$ по переменной n строго меньше чем $2k$. $\square$

Пусть $UT_k = UT_k(K)$ — алгебра верхнетреугольных матриц порядка k над полем K. Обозначим через $J = \sum\limits_{i=1}^{k-1} e_{i,i+1}$ квадратную матрицу порядка k, которая на диагонали выше главной диагонали содержит единицы, а все остальные элементы равны нулю, e_{ij} — матричные единички. Рассмотрим следующую подалгебру в UT_k над полем K:

$$N_k = \langle E, J, J^2, \dots, J^{k-2}; e_{12}, e_{13}, \dots, e_{1k}\rangle_K,$$

где E — единичная матрица порядка k. В [2], в частности, показано, что алгебры Λ_{2k}, $k \ge 1$, N_k, $k \ge 3$, порождают минимальные многообразия ассоциативных алгебр полиномиального роста.

Пусть $R_k = N_k \times N_k$ — алгебра Ли, построенная с помощью замечания 1. Понятно, что $\mathrm{var}(R_2) = \mathrm{var}(Q_0)$.

Теорема 3. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Ли R_k, $k \ge 3$, верны следующие утверждения:*

1) *идеал тождеств $\mathrm{Id}(R_k)$ порождается полилинейными тождествами*

$$(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) = 0, \quad (x_1x_2\dots x_k)(y_1y_2\dots y_k) = 0; \tag{12}$$

2) *для любого $n \ge 1$ полилинейные элементы от переменных $x_1,\dots,x_n$:*

$$x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}, \quad i_1 > i_2 < \dots < i_n, \tag{13}$$

$$(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_s})(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_t}), \tag{14}$$
$$s+t=n,\quad i_1>i_2<\dots<i_s,\quad j_1>j_2<\dots<j_t,$$
$$2\le s\le t\le n-2\quad (s=t\Rightarrow i_2<j_2),\quad s<k,$$

образуют базис пространства $P_n(R_k)$*;*

3) *коразмерности вычисляются по следующей формуле:*

$$c_n(R_k)=\begin{cases}(n-1)!, & 1\le n\le 4,\\ (n-1)(2^{n-3}(n-4)+2), & 5\le n\le 2k-2,\\ (n-1)+\sum\limits_{i=2}^{k-1}(i-1)(n-i-1)C_n^i, & n\ge 2k-1,\end{cases}$$

причем для любого $n\ge 2k-1$

$$c_n(R_k)=c_n(R_{k-1})+(k-2)(n-k)C_n^{k-1}\approx\frac{k-2}{(k-1)!}n^k,\quad n\to\infty;$$

4) *если* $\mathbf{W}$ *— некоторое собственное подмногообразие в* $\mathrm{var}(R_k)$*,* $c_n(\mathbf{W})\approx qn^d$*, то либо* $d<k$*, либо* $q\le\frac{k-3}{(k-1)!}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что тождества (12) выполнены в алгебре R_k и что $P_n(R_k)$ является линейной оболочкой элементов вида (13) и (14). Покажем, что элементы вида (13) и (14) линейно независимы. Предположим, что для некоторого n нетривиальная линейная комбинация элементов вида (13) и (14) принадлежит идеалу тождеств $\mathrm{Id}(R_k)$. Если в данной линейной комбинации хотя бы один элемент вида (13) с ненулевым коэффициентом $\alpha x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}$, $0\ne\alpha\in K$, то во всей линейной комбинации сделаем такую подстановку:

$$x_{i_1}\to(0,E),\quad x_{i_2}\to(E,0),\ \dots,\ x_{i_n}\to(E,0).$$

Тогда все слагаемые, кроме данного, станут равны нулю, а линейная комбинация примет вид

$$\alpha(-1)^{n-1}(0,E)=(0,0),$$

что возможно только при $\alpha=0$.

Если же все элементы вида (13) в линейной комбинации имеют нулевые коэффициенты, то выберем в данной линейной комбинации элемент вида (14) с наименьшим значением s и ненулевым коэффициентом. Пусть это слагаемое имеет вид $\alpha(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_s})(x_{j_1}x_{j_2}\dots x_{j_t})$, $0\ne\alpha\in K$. В рассматриваемой линейной комбинации, учитывая замечание 2, сделаем подстановку

$$x_{i_1}\to(e_{12},0),\quad x_{i_2}\to(J,0),\ \dots,\ x_{i_s}\to(J,0),$$
$$x_{j_1}\to(0,E),\quad x_{j_2}\to(E,0),\ \dots,\ x_{j_t}\to(E,0).$$

Тогда линейная комбинация примет такой вид:

$$\alpha(-1)^{t-1}(0,e_{s+1})=(0,0),$$

что возможно только при $\alpha=0$; противоречие. Тем самым условия 1 и 2 доказаны.

Условие 3 следует из условия 2.

Пусть $\mathbf{W}$ — некоторое собственное подмногообразие в $\mathrm{var}(R_k)$. Тогда для некоторого n элементы вида (13) и (14) линейно зависимы в пространстве $P_n(\mathbf{W})$. Возможны следующие случаи.

В нетривиальной линейной комбинации хотя бы один элемент вида (13) имеет ненулевой коэффициент: $\alpha x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$, $0 \neq \alpha \in K$. В этом случае в данной линейной комбинации вместо переменной x_{i_1} подставим скобку $(z_1 z_2)$, а всю линейную комбинацию домножим на скобку $(y_1 y_2)$. Тогда ввиду тождества $(x_1 x_2)(x_3 x_4)(x_5 x_6) = 0$ в многообразии $\mathbf{W}$ выполнено тождество вида

$$(x_1 \dots x_p)(y_1 y_2) = 0.$$

Поэтому для всех достаточно больших n выполнено неравенство $c_n(\mathbf{W}) \leq n-1$.

Пусть в рассматриваемой линейной комбинации все элементы вида (13) имеют нулевые коэффициенты. В этом случае зафиксируем элемент вида (14) с наименьшим значением $q = s$ и ненулевым коэффициентом. Возможны такие варианты.

(a) $1 < q < k-1$. Вместо переменных x_{i_1} и x_{j_1} подставим соответственно скобки $(y_1 \dots y_{k-q})$ и $(z_1 \dots z_k)$. Получаем, что в многообразии $\mathbf{W}$ выполнено нетривиальное полилинейное тождество вида

$$\sum_{\substack{i_2 < \dots < i_q, \\ j_2 < \dots < j_p}} \alpha^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_{q-1}} (y_1 \dots y_{k-q} x_{i_2} \dots x_{i_q})(z_1 \dots z_k x_{j_2} \dots x_{j_p}) = 0,$$

в котором числа p, q и k фиксированы. Переименовав переменные в данном тождестве, получим полилинейное тождество вида

$$\begin{aligned}(y_1 &\dots y_{k-q} x_1 \dots x_{q-1})(z_1 \dots z_k x_q \dots x_{q+p-2}) \\ &= \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_{q-1}, \\ \{i_1, \dots, i_{q-1}\} \neq \{1, \dots, q-1\}, \\ j_1 < \dots < j_{p-1}, \\ \{j_1, \dots, j_{p-1}\} \neq \{q, \dots, q+p-2\}}} \beta^{i_1, \dots, i_p}_{j_1, \dots, j_{q-1}} (y_1 \dots y_{k-q} x_{i_1} \dots x_{i_{q-1}})(z_1 \dots z_k x_{j_1} \dots x_{j_{p-1}}). \end{aligned} \tag{15}$$

С учетом тождества (15) пространство $P_n(\mathbf{W})$ для всех достаточно больших n является линейной оболочкой таких элементов вида (13) и (14), что для элементов вида (14) при $s = k-1$ не выполнено неравенство

$$\{i_{k-q+1}, \dots, i_{k-1}\} < \{j_{t-p+2}, \dots, j_t\}.$$

Заметим, что число элементов вида (14), для которых выполнено данное неравенство, не менее чем $(k-2)(n-k)C^{k-1}_{n-p}$. Поэтому

$$c_n(\mathbf{W}) \leq c_n(R_k) - (k-2)(n-k)C^{k-1}_{n-p} = f(n).$$

Остается заметить, что степень полинома $f(n)$ по переменной n строго меньше чем k.

(b) $q = k-1$. В полученной нетривиальной линейной комбинации элементов вида (14) при $s = k-1$ зафиксируем любое слагаемое с ненулевым коэффициентом и сделаем в линейной комбинации такую подстановку: $x_{j_1} \to (z_1 z_2)$. Тогда в многообразии $\mathbf{W}$ выполнено нетривиальное полилинейное тождество вида

$$\sum_{\substack{i_1 > i_2 < \dots < i_{k-1}, \\ j_2 < \dots < j_p}} \alpha^{i_1, \dots, i_{k-1}}_{j_2, \dots, j_p} (x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}})(z_1 z_2 x_{j_2} \dots x_{j_p}) = 0, \quad \alpha^{i_1, \dots, i_{k-1}}_{j_2, \dots, j_p} \in K,$$

в котором числа p и k фиксированы. Переименовав переменные в данном тождестве, получим, что элемент $(x_{k-1} x_1 \dots x_{k-2})(z_1 z_2 x_k \dots x_{k+p-2})$ равен линейной комбинации элементов вида $(x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}})(z_1 z_2 x_{j_1} \dots x_{j_{p-1}})$, для которых

$i_1 > i_2 < \dots < i_{k-1}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_{p-1}$, причем либо не выполнено неравенство $\{i_1, \dots, i_{k-1}\} < \{j_1, \dots, j_{p-1}\}$, либо не выполнено неравенство $i_1 > i_{k-1}$. Поэтому пространство $P_n(\mathbf{W})$ для всех достаточно больших n является линейной оболочкой таких элементов вида (14), что для элементов с $s = k-1$ либо не выполнено неравенство $\{i_1, \dots, i_{k-1}\} < \{j_{t-p+2}, \dots, j_t\}$, либо не выполнено неравенство $i_1 > i_{k-1}$. Стало быть,

$$c_n(\mathbf{W}) \le c_n(R_k) - (n-k)C_{n-p}^{k-1}. \quad \square$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кемер А. Р.* Шпехтовость T-идеалов со степенным ростом коразмерностей // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 1. С. 54–69.
2. *Mattina D. La.* Varieties of almost polynomial growth: classifying their subvarieties // Manuscr. Math. 2007. V. 123, N 2. P. 185–203.
3. *Мищенко С. П.* Рост многообразий алгебр Ли // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 6. С. 25–45.
4. *Воличенко И. Б.* Об одном многообразии алгебр Ли, связанном со стандартными тождествами // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. наук. 1980. № 1. С. 23–30.
5. *Воличенко И. Б.* Об одном многообразии алгебр Ли, связанном со стандартными тождествами // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. наук. 1980. № 2. С. 22–29.
6. *Мищенко С. П.* Многообразия алгебр Ли с двуступенно нильпотентным коммутантом // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. наук. 1987. № 6. С. 39–43.
7. *Рацеев С. М.* Эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2012. Т. 67, № 5. С. 8–13.
8. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
9. *Drensky V.* Relations for the cocharacter sequences of T-ideals // Proc. Int. Conf. Algebra Honoring A. Malcev Contemp. Math. 1992. V. 131, N 2. P. 285–300.
10. *Рацеев С. М.* Алгебры Пуассона полиномиального роста // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 700–711.

Статья поступила 9 июня 2014 г.

Рацеев Сергей Михайлович
Ульяновский гос. университет,
кафедра информационной безопасности и теории управления,
ул. Л. Толстого, 42, Ульяновск 432970
ratseevsm@rambler.ru