Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 517.538.3

О ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ В ДИСКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Б. П. Осиленкер

Аннотация. Изучаются дискретные пространства Соболева со скалярным произведением

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\,dx + A_1 f(1)g(1) + B_1 f(-1)g(-1) + A_2 f'(1)g'(1) + B_2 f'(-1)g'(-1) = \langle f, g\rangle.$$

Получены результаты о линейных методах суммирования рядов Фурье по многочленам, ортонормированным в дискретных пространствах Соболева.

Ключевые слова: дискретное пространство Соболева, ортогональные многочлены, ряд Фурье, линейный метод суммирования, методы Чезаро, симметричные многочлены Гегенбауэра — Соболева.

1. Введение

Рассмотрим нестандартное скалярное произведение

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)w(x)\,dx + A_1 f(1)g(1) + B_1 f(-1)g(-1) + A_2 f'(1)g'(1) + B_2 f'(-1)g'(-1), \quad (1.1)$$

где $w(x)$ — положительная почти всюду на $[-1,1]$ весовая функция, A_1, A_2, B_1, B_2 — неотрицательные числа. Пространство Соболева со скалярным произведением (1.1) называется *дискретным пространством Соболева*. В случае $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$ получаем стандартное скалярное произведение, всюду в дальнейшем рассматриваем случай $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $B_1 > 0$, $B_2 > 0$.

С помощью процесса ортогонализации Грама — Шмидта построим последовательность многочленов n-й степени с положительным старшим коэффициентом $\{q_n(x)\} : q_n(x) \equiv q_n(x; A_1, A_2, B_1, B_2)$ $(n = 0, 1, 2, \dots;\ x \in [-1,1])$, ортонормированных по отношению к скалярному произведению (1.1):

$$\langle q_n, q_m\rangle = \int_{-1}^{1} q_n(x)q_m(x)w(x)\,dx + A_1 q_n(1)q_m(1) + B_1 q_n(-1)q_m(-1) + A_2 q_n'(1)q_m'(1) + B_2 q_n'(-1)q_m'(-1) = \delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, \dots) \quad (1.2)$$

(их называют ортонормированными многочленами Соболева).

Многочлены $q_n(x)$ привлекают внимание многих исследователей в связи с задачами теории функций, функционального анализа, математической физики, теории вероятностей, квантовой механики и вычислительной математики [1–4].

В прикладных задачах они имеют прямое отношение к важным и часто решаемым на практике типам инженерных задач с характерным сочетанием многообразий различной размерности [5–7].

Многочлены $q_n(x)$ и их частные случаи изучались в работах [8–12] (см. библиографию в них). Они не обладают рядом свойств, характерных для ортогональных многочленов: не удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению, нули их могут не принадлежать промежутку ортогональности, и т. д. (подробнее об этом см. ниже в п. 4). В статьях [9–13] получены результаты о сходимости рядов Фурье по системе $\{q_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ c \in [-1, 1])$.

Нашей целью является изучение регулярных по Теплицу линейных методов суммирования рядов Фурье по многочленам $q_n(x)$.

2. Представления ядер

Лемма 2.1 [11]. *Для любой непрерывной на $[-1, 1]$ функции f и произвольных фиксированных $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f(x) q_n(x) q_{n+k}(x) w(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2.1}$$

где

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x) \quad (x \in [-1, 1];\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

— многочлены Чебышева первого рода порядка k.

Лемма 2.2. *Ортонормированные многочлены $q_n(x)$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots;$ $x \in [-1, 1]$ удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$\begin{aligned}(x^3 - 3x) q_n(x) = \alpha_{n+3} q_{n+3}(x) + \beta_{n+2} q_{n+2}(x) + \gamma_{n+1} q_{n+1}(x) + \delta_n q_n(x) \\ + \gamma_n q_{n-1}(x) + \beta_n q_{n-2}(x) + \alpha_n q_{n-3}(x)\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$(q_{-3}(x) \equiv 0,\ q_{-2}(x) \equiv 0,\ q_{-1}(x) \equiv 0),$$

при этом

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{1}{8}, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = -\frac{9}{8}, \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Рекуррентное соотношение (2.2) получено в [8] (оно имеет наименьший порядок). Найдем предельные соотношения для рекуррентных коэффициентов. Из (1.2) получаем

$$\begin{aligned}\alpha_{n+3} = \langle (x^3 - 3x) q_n, q_{n+3} \rangle = \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x) q_n(x) q_{n+3}(x) w(x)\, dx - 2A_1 q_n(1) q_{n+3}(1) \\ + 2B_1 q_n(-1) q_{n+3}(-1) - 2A_2 q_n'(1) q_{n+3}'(1) + 2B_2 q_n'(-1) q_{n+3}'(-1).\end{aligned}$$

Как показано в [11],

$$\lim_{n\to\infty} q_n(\pm 1) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} q_n'(\pm 1) = 0, \tag{2.4}$$

поэтому соотношение (2.1) дает

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_{n+3}=\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}(x^3-3x)q_n(x)q_{n+3}(x)w(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(x^3-3x)T_3(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(x^3-3x)(4x^3-3x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{8},$$

что доказывает первое соотношение в (2.3). С помощью аналогичных рассуждений получаются и остальные предельные соотношения в (2.3). Лемма 2.2 доказана.

Обозначим ядро Дирихле системы $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ через

$$D_n(t,x)=\sum_{k=0}^{n}q_k(t)q_k(x)\quad (n=0,1,2,\dots;\ x\in[-1,1]).$$

Следующий аналог формулы Кристоффеля — Дарбу непосредственно вытекает из рекуррентного соотношения (2.2).

Лемма 2.3. *Для ядра Дирихле $D_n(t,x)$ ортонормированной системы многочленов $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ справедливо представление*

$$[(t^3-3t)-(x^3-3x)]D_n(t,x)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_{n+i}[q_{n+i}(t)q_{n+i-3}(x)-q_{n+i-3}(t)q_{n+i}(x)]$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\beta_{n+j}[q_{n+j}(t)q_{n+j-2}(x)-q_{n+j-2}(t)q_{n+j}(x)]$$
$$+\gamma_{n+1}[q_{n+1}(t)q_n(x)-q_n(t)q_{n+1}(x)]. \quad (2.5)$$

Введем ядра Валле — Пуссена для ортонормированной системы многочленов $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$: при всех $t,x\in[-1,1]$ положим

$$V_{m,m-k}(t,x):=\frac{1}{m-k+1}\sum_{l=k}^{m}D_l(t,x)\quad (k=0,1,\dots,m;\ m=0,1,\dots), \quad (2.6)$$

где $D_l(t,x)$ — ядра Дирихле полиномиальной системы. В частности, при $k=0$ получаем ядра Фейера: при всех $t,x\in[-1,1]$

$$F_m(t,x):=\frac{1}{m+1}\sum_{l=0}^{m}D_l(t,x)\quad (m=0,1,\dots). \quad (2.7)$$

Лемма 2.4. *Для ядер Валле — Пуссена ортонормированной системы многочленов $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ при всех $t,x\in[-1,1]$ и $k=0,1,\dots,m$, $m=0,1,2,\dots$ имеет место представление*

$$(m-k+1)[(t^3-3t)-(x^3-3x)]^2V_{m,m-k}(t,x)=\sum_{j=1}^{9}\sigma_{mk}^{(j)}(t,x), \quad (2.8)$$

где

$$\sigma_{mk}^{(1)}(t,x)=\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{s=k+i-3}^{k+i-1}\alpha_{s+3}^2q_s(t)q_s(x)\right.$$

$$
- \sum_{s=m+i-2}^{m+i} \alpha_{s+3}^2 q_s(t) q_s(x) + \sum_{s=k+i}^{m+i} \left(\alpha_{s+3}^2 - \alpha_s^2\right) q_s(t) q_s(x) \Bigg\}
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{2} \Bigg\{ \sum_{s=k+j-2}^{k+j-1} \beta_{s+2}^2 q_s(t) q_s(x) - \sum_{s=m+j-1}^{m+j} \beta_{s+3}^2 q_s(t) q_s(x)
$$

$$
+ \sum_{s=k+j}^{m+j} \left(\beta_{s+2}^2 - \beta_s^2\right) q_s(t) q_s(x) \Bigg\} + \gamma_k^2 q_k(t) q_k(x) - \gamma_{m+1}^2 q_{m+1}(t) q_{m+1}(x)
$$

$$
+ \sum_{s=k}^{m} \left(\gamma_{s+1}^2 - \gamma_s^2\right) q_s(t) q_s(x);
$$

$$
\sigma_{mk}^{(2)}(t,x) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{s=m+i-5}^{m+i-3} \alpha_{s+3} \alpha_{s+6} q_{s+6}(t) q_s(x) - \sum_{i=1}^{3} \sum_{s=k+i-6}^{k+i-4} \alpha_{s+3} \alpha_{s+6} q_{s+6}(t) q_s(x);
$$

$$
\sigma_{mk}^{(3)}(t,x) = \sum_{i=1}^{3} \Bigg\{ - \sum_{s=k+i-5}^{k+i-4} \alpha_{s+5} \beta_{s+2} q_{s+5}(t) q_s(x)
$$

$$
+ \sum_{s=k+i-3}^{m+i-5} [(\alpha_{s+3} - \alpha_{s+5}) \beta_{s+5} + \alpha_{s+5}(\beta_{s+5} - \beta_{s+2})] q_{s+5}(t) q_s(x) \Bigg\}
$$

$$
+ \sum_{s=m+i-4}^{m+i-3} \alpha_{s+3} \beta_{s+5} q_{s+5}(t) q_s(x) + \sum_{j=1}^{2} \Bigg\{ - \sum_{s=k+j-5}^{k+j-3} \alpha_{s+3} \beta_{s+5} q_{s+5}(t) q_s(x)
$$

$$
+ \sum_{s=k+j-2}^{m+j-5} [(\alpha_{s+3} - \alpha_{s+5}) \beta_{s+2} + \alpha_{s+3}(\beta_{s+2} - \beta_{s+5})] q_{s+5}(t) q_s(x)
$$

$$
+ \sum_{s=m+j-4}^{m+j-2} \alpha_{s+5} \beta_{s+2} q_{s+5}(t) q_s(x) \Bigg\};
$$

$$
\sigma_{mk}^{(4)}(t,x) = - \sum_{i=1}^{3} \alpha_{k+i} \gamma_{k+i-3} q_{k+i}(t) q_{k+i-4}(x)
$$

$$
+ \sum_{i=1}^{3} \alpha_{m+i} \gamma_{m+i+4} q_{m+i+1}(t) q_{m+i-3}(x)
$$

$$
+ \sum_{i=1}^{3} \sum_{s=k+i-3}^{m+i-4} [(\alpha_{s+3} - \alpha_{s+4}) \gamma_{s+4} + \alpha_{s+4}(\gamma_{s+4} - \gamma_{s+1})] q_{s+4}(t) q_s(x)
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{2} \{ \beta_{m+j} \beta_{m+j+2} q_{m+j+2}(t) q_{m+j-2}(x) + \beta_{m+j-1} \beta_{m+j+1} q_{m+j+1}(t) q_{m+j-3}(x)
$$

$$
- \beta_{k+j} \beta_{k+j-2} q_{k+j}(t) q_{k+j-4}(x) - \beta_{k+j+1} \beta_{k+j-1} q_{k+j+1}(t) q_{k+j-3}(x) \}
$$

$$
+ \sum_{s=m-2}^{m} \alpha_{s+3} \gamma_{s+4} q_{s+4}(t) q_s(x) - \sum_{l=k-3}^{k-1} \alpha_{l+4} \gamma_{l+1} q_{l+4}(t) q_l(x)
$$

$$
+ \sum_{l=k}^{m} [(\alpha_{l+4} - \alpha_{l+3}) \gamma_{l+1} + \alpha_{l+3}(\gamma_{l+1} - \gamma_{l+4})] q_{l+4}(t) q_l(x);
$$

$$\sigma^{(5)}_{mk}(t,x)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{s=k+i-3}^{m+i-3}\alpha_{s+3}(\delta_{s+3}-\delta_s)q_{s+3}(t)q_s(x)$$
$$-\sum_{j=1}^{2}\beta_{k+j}\beta_{k+j-2}q_{k+j}(t)q_{k+j-3}(x)$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=k+j-2}^{m+j-3}[\beta_{s+2}(\gamma_{s+3}-\gamma_{s+1})+\gamma_{s+1}(\beta_{s+2}-\beta_{s+3})]q_{s+3}(t)q_s(x)$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\beta_{m+j}\gamma_{m+j+1}q_{m+j+1}(t)q_{m+j-2}(x);$$

$$\sigma^{(6)}_{mk}(t,x)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{s=k+i-2}^{m+i-3}[(\alpha_{s+3}-\alpha_{s+2})\gamma_{s+3}+\alpha_{s+2}(\gamma_{s+3}-\gamma_s)]q_{s+2}(t)q_s(x)$$
$$+\sum_{i=1}^{3}[\alpha_{k+i}\gamma_{k+i}q_{k+i-1}(t)q_{k+i-3}(x)-\alpha_{m+i}\gamma_{m+i-2}q_{m+i}(t)q_{m+i-2}(x)]$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=k+j-2}^{m+j-2}\beta_{s+2}(\delta_{s+2}-\delta_s)q_{s+2}(t)q_s(x)$$
$$+\gamma_m\gamma_{m+1}q_{m+2}(t)q_m(x)-\gamma_k\gamma_{k+1}q_{k+1}(t)q_{k-1}(x);$$

$$\sigma^{(7)}_{mk}(t,x)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{s=k+i-3}^{k+i-2}\alpha_{s+3}\beta_{s+3}q_{s+1}(t)q_s(x)-\sum_{i=1}^{3}\sum_{s=m+i-2}^{m+i-1}\alpha_{s+1}\beta_s q_{s+1}(t)q_s(x)$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\sum_{s=k+i-1}^{m+i-3}[(\alpha_{s+3}-\alpha_{s+1})\beta_{s+3}+\alpha_{s+1}(\beta_{s+1}-\beta_s)]q_{s+1}(t)q_s(x)$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\beta_{k+j}\gamma_{k+j}q_{k+j-1}(t)q_{k+j-2}(x)-\sum_{j=1}^{2}\beta_{m+j}\gamma_{m+j-1}q_{m+j}(t)q_{m+j-1}(x)$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=k+j-1}^{m+j-2}[(\beta_{s+2}-\beta_{s+1})\gamma_{s+2}+\beta_{s+1}(\gamma_{s+2}-\gamma_s)]q_{s+1}(t)q_s(x)$$
$$+\sum_{l=k}^{m}\gamma_{l+1}(\delta_{l+1}-\delta_l)q_{l+1}(t)q_l(x);$$

$$\sigma^{(8)}_{mk}(t,x)=\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=k+j-1}^{m+j-1}\alpha_{s+3}\beta_{s+3}q_s(t)q_{s+1}(x)-\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=m+j-2}^{m+j}\alpha_{s+1}\beta_s q_s(t)q_{s+1}(x)$$
$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{s=k+j}^{m+j-3}[(\alpha_{s+3}-\alpha_{s+1})\beta_{s+3}+\alpha_{s+1}(\beta_{s+1}-\beta_s)]q_s(t)q_{s+1}(x)$$
$$+\beta_{k+1}\gamma_{k+1}q_{k-1}(t)q_k(x)+\sum_{s=k}^{m}\beta_{s+2}(\gamma_{s+2}-\gamma_s)q_s(t)q_{s+1}(x)$$
$$-\beta_{m+2}\gamma_{m+2}q_m(t)q_{m+1}(x)+\beta_{k+2}\gamma_k q_k(t)q_{k+1}(x)-\beta_{m+3}\gamma_{m+1}q_{m+1}(x)q_{m+2}(x);$$

$$\sigma_{mk}^{(9)}(t,x) = \sum_{s=k-2}^{k-1} \alpha_{s+3}\gamma_{s+3}q_s(t)q_{s+2}(x)$$
$$+ \sum_{s=k}^{m}[(\alpha_{s+3}-\alpha_{s+2})\gamma_{s+3} + \alpha_{s+2}(\gamma_{s+3}-\gamma_s)]q_s(t)q_{s+2}(x)$$
$$- \sum_{s=m-1}^{m} \alpha_{s+3}\gamma_{s+3}q_s(t)q_{s+2}(x) + \alpha_{k+2}\gamma_k q_k(t)q_{k+2}(x) - \alpha_{m+3}\gamma_{m+1}q_{m+1}(t)q_{m+3}(x).$$

Доказательство представления ядер Валле — Пуссена (2.8) громоздко и проводится по единой схеме. Прежде всего нетрудно видеть, что из представления (2.5) ядра Дирихле вытекает

$$[(t^3-3t)-(x^3-3x)]D_t(t,x) = \zeta_l(t,x) + \zeta_l(x,t),$$

где

$$\zeta_l(t,x) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{l+i}[(t^3-3t)q_{l+i}(t)q_{l+i-3}(x) - q_{l+i}(t)(x^3-3x)q_{l+i-3}(x)]$$
$$+ \sum_{j=1}^{2} \beta_{l+j}[(t^3-3t)q_{l+j}(t)q_{l+j-2}(x) - q_{l+j}(t)(x^3-3x)q_{l+j-2}(x)]$$
$$+ \gamma_{l+1}[(t^3-3t)q_{l+1}(t)q_l(x) - q_{l+1}(t)(x^3-3x)q_l(x)].$$

Достаточно рассмотреть представление лишь слагаемого $\zeta_l(t,x)$. Воспользуемся рекуррентным соотношением (2.2) и перегруппируем полученные соотношения. Покажем, например, как получается слагаемое $\sigma_{mk}^{(1)}(t,x)$, остальные получаются аналогичным способом. Объединим члены, содержащие множитель $q_r(t)q_s(x)$, где $r=s$, и обозначим полученное выражение через $\sigma_{mk}^{(1)}(t,x)$. Имеем

$$\sigma_{mk}^{(1)}(t,x) = \sum_{l=k}^{m}\Bigg\{\sum_{i=1}^{3}\alpha_{l+i}^2 q_{l+i-3}(t)q_{l+i-3}(x) - \sum_{i=1}^{3}\alpha_{l+i}^2 q_{l+i}(t)q_{l+i}(x)$$
$$+ \sum_{j=1}^{2}\beta_{l+j}^2 q_{l+j-2}(t)q_{l+i-2}(x) - \sum_{j=1}^{2}\beta_{l+j}^2 q_{l+j}(t)q_{l+j}(x)\Bigg\}$$
$$+ \sum_{l=k}^{m}\gamma_{l+1}^2 q_l(t)q_l(x) - \sum_{l=k}^{m}\gamma_{l+1}^2 q_{l+1}(t)q_{l+1}(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{s=k+i-3}^{m+i-3}\alpha_{s+3}^2 q_s(t)q_s(x)$$
$$- \sum_{i=1}^{3}\sum_{s=k+i}^{m+i}\alpha_s^2 q_s(t)q_s(x) + \sum_{j=1}^{2}\sum_{s=k+j-2}^{m+j-2}\beta_{s+2}^2 q_s(t)q_s(x)$$
$$- \sum_{j=1}^{2}\sum_{s=k+j}^{m+j}\beta_s^2 q_s(t)q_s(x) + \sum_{l=k}^{m}\gamma_{l+1}^2 q_l(t)q_l(x) - \sum_{s=k+1}^{m+1}\gamma_s^2 q_s(t)q_s(x),$$

и осталось сделать приведение подобных. Лемма 2.4 доказана.

3. Линейные треугольные методы суммирования рядов Фурье — Соболева

Обозначим через $\mathfrak{R}$ множество функций, определенных на промежутке $[-1,1]$:

$$\mathfrak{R} = \left\{ f : \int_{-1}^{1} |f(x)| w(x)\,dx < \infty;\ f(\pm 1), f'(\pm 1) \text{ существуют и конечны} \right\}.$$

Каждой функции $f \in \mathfrak{R}$ поставим в соответствие ряд Фурье — Соболева

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) q_k(x),$$

$$c_k(f) = \int_{-1}^{1} f(t) q_k(t) w(t)\,dt + A_1 f(1) q_k(1) + B_1 f(-1) q_k(-1) + A_2 f'(1) q_k'(1) + B_2 f'(-1) q_k'(1) \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{3.1}$$

Рассмотрим треугольную матрицу вещественных чисел

$$\Lambda = \left\{ \lambda_k^{(n)},\ k = 0, 1, \dots, n, n+1;\ \lambda_0^{(n)} = 1,\ \lambda_{n+1}^{(n)} = 0,\ n = 0, 1, \dots \right\}. \tag{3.2}$$

Матрица Λ называется *регулярной по Теплицу* (*T-регулярной*), если выполняются следующие условия:

(а) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$ фиксировано);

(б) $\sum\limits_{k=0}^{n} \left| \lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)} \right| \le C$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

T-регулярные матрицы преобразуют сходящиеся ряды (к сумме s) в сходящиеся ряды (к той же сумме s). Регулярными по Теплицу являются матрицы средних Чезаро $(C, \alpha > 0)$, средних Вороного — Нерлунда, средних Рисса и т. д. [14].

Каждой функции $f \in \mathfrak{R}$ по ее ряду Фурье — Соболева (3.1) с помощью регулярной по Теплицу матрицы (3.2) поставим в соответствие последовательность Λ-средних

$$\mathbb{U}_n(f; x; \Lambda) := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} c_k(f) q_k(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots;\ x \in [-1, 1]). \tag{3.3}$$

Исследуем задачу о Λ-суммируемости рядов Фурье — Соболева, т. е. при каких условиях на элементы матрицы Λ и ортонормированную систему многочленов $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ равномерно или почти всюду выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{U}_n(f; x; \Lambda) = f(x). \tag{3.4}$$

Лемма 3.1. *Пусть на промежутке* $[c, d] \subset (-1, 1)$ *ортонормированная система многочленов* $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ *равномерно ограничена:*

$$\max_{c \le x \le d} |q_n(x)| \le C < \infty, \tag{3.5}$$

и для рекуррентных коэффициентов (2.2) *при всех* $n = 0, 1, 2\dots$ *выполняется соотношение*

$$\sum_{k=0}^{n}(|\alpha_k - \alpha_{k+1}| + |\beta_k - \beta_{k+1}| + |\gamma_k - \gamma_{k+1}| + |\delta_k - \delta_{k+1}|) \le C. \tag{3.6}$$

Тогда при всех $t, x \in [c, d]$ *и* $k = 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, 2, \dots$ *имеют место следующие равномерные оценки:*

$$|V_{n,n-k}(t, x)| \le C(n + k + 1), \quad |t - x| \ge 0, \tag{3.7a}$$

$$|V_{n,n-k}(t, x)| \le C\frac{1}{|t - x|}, \quad |t - x| > 0, \tag{3.7b}$$

$$|V_{n,n-k}(t, x)| \le C\frac{1}{(n - k + 1)(t - x)^2}, \quad |t - x| > 0, \tag{3.7c}$$

где постоянные $C > 0$ *не зависят от* $k, n = 0, 1, 2, \dots$ *и* $t, x \in [c, d]$.

Действительно, оценки (3.7a), (3.7c) непосредственно вытекают из (2.5), (2.8). С другой стороны, из определения ядра Дирихле и (2.5) следуют

$$|D_n(t, x)| \le n + 1, \quad \text{если } t, x \in [c, d],\ |t - x| \ge 0, \tag{3.8a}$$

$$|D_n(t, x)| \le C\frac{1}{(1 - x^2)|t - x|}, \quad \text{если } t, x \in [c, d],\ |t - x| > 0, \tag{3.8b}$$

так как при $t, x \in [c, d]$ $(-1 < c < d < 1)$ имеем $\frac{1}{3-t^2-x^2-tx} \ge C_0 > 0$, где постоянная C_0 не зависит от t, x. Отсюда получаем соотношение (3.7b).

В частности, при всех $t, x \in [c, d]$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ для ядер Фейера (2.7) справедливы оценки

$$|F_n(t, x)| \le n + 1, \quad |t - x| \ge 0, \tag{3.9a}$$

$$|F_n(t, x)| \le C\frac{1}{(n + 1)(t - x)^2}, \quad |t - x| > 0, \tag{3.9b}$$

где постоянные $C > 0$ не зависят от $n = 0, 1, 2, \dots$ и $t, x \in [c, d]$.

Точка $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ называется *точкой Лебега функции* f, если выполняется соотношение

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(t) - f(x)|w(t)\,dt = 0. \tag{3.10}$$

Как известно [14], точки Лебега функции $f \in L^1_w(a, b)$ расположены почти всюду в (a, b).

Лемма 3.2. *Пусть многочлены* $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям* (3.5) *и* (3.6). *Тогда для любой функции* $f \in L^1_w[c, d]$ *в каждой точке Лебега* $x \in (c, d)$ *(и, следовательно, почти всюду в* (c, d)*) справедлива оценка*

$$\int_c^d [f(t) - f(x)]V_{n,n-k}(t, x)w(t)\,dt = o_x(1)\left[1 + \ln\frac{n + 1}{n - k + 1}\right] \quad (n \to \infty). \tag{3.11}$$

Доказательство. Положим

$$\delta_{n,k} = \frac{d - c}{n + k + 1}, \quad \varepsilon_{n,k} = \frac{d - c}{n - k + 1} \quad (k = 0, 1, \dots, n;\ n = 0, 1, 2, \dots). \tag{3.12}$$

Можно считать, что $\varepsilon_{n,k} \to 0$ $(n \to \infty)$, так как в противном случае можно в последующих рассуждениях воспользоваться соотношениями (3.9a), (3.9b) вместо оценок (3.7a)–(3.7c). В силу (3.7a)–(3.7c) имеем

$$I_{n,k}(x) := \left| \int_{-1}^{1} [f(t) - f(x)] V_{n,n-k}(t,x) w(t)\,dt \right|$$
$$\leq C(n+k+1) \int_{0 \leq |t-x| \leq \delta_{n,k}} |f(t) - f(x)| w(t)\,dt$$
$$+ C \int_{\delta_{n,k} \leq |t-x| \leq \varepsilon_{n,k}} \left| \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \right| w(t)\,dt + C \frac{1}{n-k+1} \int_{|t-x| > \varepsilon_{n,k}} \frac{|f(t)-f(x)|}{(t-x)^2} w(t)\,dt$$
$$= I^{(1)}_{n,k}(x) + I^{(2)}_{n,k}(x) + I^{(3)}_{n,k}(x). \quad (3.13)$$

Ввиду определения точки Лебега (3.10) и (3.12) имеем

$$I^{(1)}_{n,k}(x) = o_x(1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n;\ n \to \infty). \quad (3.14)$$

Интегралы $\int\limits_{x+\delta_{n,k}}^{x+\varepsilon_{n,k}}$ и $\int\limits_{x-\varepsilon_{n,k}}^{x+\varepsilon_{n,k}}$ оцениваются аналогичным образом, поэтому ограничимся оценкой следующего интеграла:

$$I^{(2)}_{n,k}(x) = \int_{x+\delta_{n,k}}^{x+\varepsilon_{n,k}} \frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|} \varphi(t) w(t)\,dt.$$

Введем натуральное число $N_1 = N_1(n,k,x)$ такое, что

$$2^{N_1 - 1}\delta_{n,k} \leq \varepsilon_{n,k} \leq 2^{N_1}\delta_{n,k}. \quad (3.15)$$

Тогда

$$I^{(2)}_{n,k}(x) \leq \sum_{m=1}^{N_1} \int_{x+2^{m-1}\delta_{n,k}}^{x+2^m\delta_{n,k}} \frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|} w(t)\,dt$$
$$\leq C \sum_{m=1}^{N_1} \frac{1}{2^m \delta_{n,k}} \int_{x+2^{m-1}\delta_{n,k}}^{x+2^m\delta_{n,k}} |f(t - f(x)|(t) w(t)\,dt$$

и в силу определения точки Лебега $I^{(2)}_{n,k}(x) = o_x(1) N_1$. Используя (3.15), получаем

$$I^{(2)}_{n,k}(x) = o_x(1) \ln \frac{n+k+1}{n-k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n;\ n \to \infty),$$

поэтому

$$I^{(2)}_{n,k}(x) = o_x(1) \left[1 + \ln \frac{n+1}{n-k+1} \right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n;\ n \to \infty). \quad (3.16)$$

Рассмотрим последнее слагаемое в (3.13). Оценим только интеграл

$$I^{(3)}_{n,k}(x) := \frac{1}{n-k+1} \int_{x+\varepsilon_{n,k}}^{d} \frac{|f(t)-f(x)|}{(t-x)^2} w(t)\,dt,$$

так как интеграл $\frac{1}{n-k+1}\int\limits_c^{x-\varepsilon_{n,k}}\frac{|f(t)-f(x)|}{(t-x)^2}w(t)\,dt$ рассматривается аналогичным образом. Как и выше, введем натуральное число $N_2 = N_2(k,n;x)$ такое, что $x+2^{N_2-1}\varepsilon_{n,k}\le 1 < x+2^{N_2}\varepsilon_{n,k}$. Тогда

$$I^{(3)}_{n,k}(x) \le \frac{C}{n-k+1}\sum_{m=1}^{N_2}\int\limits_{x+2^{m-1}\varepsilon_{n,k}}^{x+2^m\varepsilon_{n,k}}\frac{|f(t)-f(x)|}{(t-x)^2}w(t)\,dt$$

$$\le C\frac{1}{n-k+1}\sum_{m=1}^{N_2}\frac{1}{2^{2m}(\varepsilon_{n,k})^2}\int\limits_{x+2^{m-1}\varepsilon_{n,k}}^{x+2^m\varepsilon_{n,k}}|f(t)-f(x)|w(t)\,dt.$$

Отсюда

$$I^{(3)}_{n,k}(x) = o_x(1)\frac{1}{n-k+1}\frac{1}{\varepsilon_{n,k}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}\quad (n\to\infty)$$

и, следовательно,

$$I^{(3)}_{n,k}(x) = o_x(1)\quad (k=0,1,2,\dots,n;\ n\to\infty). \tag{3.17}$$

Оценка (3.11) вытекает из соотношений (3.14), (3.16), (3.17). Лемма 3.2 полностью доказана.

Лемма 3.3. *Пусть ортонормированная система многочленов удовлетворяет условиям* (3.5), (3.6) *и*

$$w(x)\le C\quad (x\in[c,d]). \tag{3.18}$$

Тогда для функции Лебега

$$L_{n,n-k}(x) := \int\limits_c^d |V_{n,n-k}(t,x)|w(t)\,dt$$

равномерно по $x\in[c,d]$ *выполняется оценка*

$$L_{n,n-k}(x)\le C\left[1+\ln\frac{n+1}{n-k+1}\right],$$

где $C>0$ *не зависит от* $k=0,1,\dots,n$; $n=0,1,\dots$ *и* $x\in[c,d]$.

Доказательство. Имеем (см. (3.13))

$$L_{n,n-k}(x) = \left(\int\limits_c^{x-\varepsilon_{n,k}} + \int\limits_{x-\varepsilon_{n,k}}^{x-\delta_{n,k}} + \int\limits_{x-\delta_{n,k}}^{x+\delta_{n,k}} + \int\limits_{x+\delta_{n,k}}^{x+\varepsilon_{n,k}} + \int\limits_{x+\varepsilon_{n,k}}^{d}\right)|V_{n,n-k}(t,x)|w(t)\,dt,$$

и осталось воспользоваться оценками (3.7a)–(3.7c) ядра $V_{n,n-k}(t,x)$.

Лемма 3.4. *Пусть многочлены* $q_n(x)$ *и функция* $f\in L^2_w(E)$, $E=[-1,c)\cup(d,1]$, *удовлетворяют условиям* (3.5), (3.6). *Тогда в каждой точке* $x\in(c,d)$ *справедливо соотношение*

$$\int\limits_E [f(t)-f(x)]F_n(t,x)w(t)\,dt = O_x(1)\frac{1}{n+1}\quad (n=0,1,2,\dots). \tag{3.19}$$

Если, кроме того, выполняется (3.18), *то оценка* (3.19) *имеет место равномерно на каждом компакте* $K \subset (c,d)$.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что в каждой точке $x \in (c,d)$ и $t \in E$ выполняется оценка $\frac{1}{(t-x)^2(3-t^2-x^2-tx)} = O_x(1)$ и эта оценка равномерна для $x \in K \subset (c,d)$. Кроме того, в силу неравенства Коши — Буняковского

$$\left|\int\limits_E [f(t)-f(x)]q_n(t)w(t)\,dt\right|$$
$$\le \left\{\int\limits_E |f(t)-f(x)|^2 w(t)\,dt\right\}^{1/2} \left\{\int\limits_{-1}^{1} q_n^2(t)w(t)\,dt\right\}^{1/2} < \infty.$$

Поэтому оценка (3.19) вытекает непосредственно из представления ядра Фейера (см. лемму 2.4 при $m=n$, $k=0$). Лемма 3.4 доказана.

Лемма 3.5. *Пусть на промежутке* $[c,d] \subset (-1,1)$ *ортонормированная система многочленов* $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ *равномерно ограничена* (*см.* (3.5)). *Тогда равномерно на* $[c,d]$ *выполняются соотношения*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k(\pm 1)q_k(x) = 0, \tag{3.20}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_k'(\pm 1)q_k(x) = 0. \tag{3.21}$$

Доказательство. Докажем соотношение (3.20). В силу равенства (2.5) ядро $\sum\limits_{k=0}^{n} q_k(\pm 1)q_k(x)$ состоит из конечного числа слагаемых вида

$$h_n(x) := \varepsilon_{n+s}\frac{q_{n+k}(\pm 1)q_{n+m}(x)}{(x-1)^2(x+2)} \quad (s,\ k,\ m \text{ фиксированы}).$$

Числа ε_i ограничены (см. (2.3)), многочлены $q_{n+m}(x)$ равномерно ограничены на $[c,d]$ (см. (3.5)), и первое из соотношений (2.4) приводит к равенству $\lim\limits_{n\to\infty}(x)h_n = 0$, что и доказывает (3.20). Разделим обе части формулы (2.2) на множитель $[(t^3-3t)-(x^3-3x)]$ и продифференцируем по переменной t полученное выражение. Тогда

$$\begin{aligned}
-(x-1)^2(x+2)\sum_{k=0}^{n} q_k'(1)q_k(x) &= \gamma_{n+1}[q_{n+1}'(1)q_n(x) - q_n'(1)q_{n+1}(x)] \\
&+ \sum_{i=1}^{3}\alpha_{n+i}[q_{n+i}'(1)q_{n+i-3}(x) - q_{n+i-3}'(1)q_{n+i}(x)] \\
&+ \sum_{j=1}^{2}\beta_{n+j}[q_{n+j}'(1)q_{n+j-2}(x) - q_{n+j-2}'(1)q_{n+j}(x)].
\end{aligned}$$

Рассуждая, как и выше, с использованием второго из соотношений (2.4) получаем (3.21). Лемма 3.6 доказана.

Замечание. Как показано в [11], для функции из L_w^2 ряд Фурье (3.1) и продифференцированный ряд сходятся в точках ± 1.

Определим Λ-ядро системы $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ по формуле

$$K_n(t,x;\Lambda)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}q_k(t)q_k(x)\quad(k=0,1,2,\dots,n;\ n=0,1,2\dots;\ t,x\in[-1,1]).\tag{3.22}$$

Используя преобразование Абеля, нетрудно видеть, что имеет место представление

$$\begin{aligned}K_n(t,x;\Lambda)&=\sum_{k=0}^{v-1}(k+1)\Delta^2\lambda_k^{(n)}F_k(t,x)+(v+1)\Delta\lambda_v^{(n)}F_v(t,x)\\&+(n-v)\Delta\lambda_{v+1}^{(n)}V_{n,n-v-1}(t,x)-\sum_{k=v+1}^{n-1}(n-k)\Delta^2\lambda_k^{(n)}V_{n,n-k-1}(t,x),\end{aligned}\tag{3.23}$$

где $v=[n/2]$ ($[a]$ — целая часть числа a),

$$\Delta\lambda_k^{(n)}=\lambda_k^{(n)}-\lambda_{k+1}^{(n)},\quad \Delta^2\lambda_k^{(n)}=\Delta\bigl(\Delta\lambda_k^{(n)}\bigr)=\lambda_k^{(n)}-2\lambda_{k+1}^{(n)}+\lambda_{k+2}^{(n)}$$
$$(k=0,1,\dots,n;\ n=0,1,2,\dots).$$

Теорема 3.1. *Пусть ортонормированная система многочленов $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям* (3.5), (3.6) *и для элементов T-регулярной матрицы* (3.2) *имеет место оценка*

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)(n-k+1)}{n+1}\left[1+\ln\frac{n+1}{n-k+1}\right]\bigl|\Delta^2\lambda_k^{(n)}\bigr|\le C\quad(n=0,1,2,\dots).\tag{3.24}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *если $f\in L^1_w[c,d]\cup L^2_w(E)$, то в каждой точке Лебега $x\in(c,d)$ ряд Фурье — Соболева* (3.1) *Λ-суммируется к $f(x)$;*

2) *если функция f непрерывна на $[-1,1]$ и выполняется* (3.18), *то равномерно на каждом компакте $K\subset(c,d)$ справедливо соотношение* (3.4).

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}U_n(f;x;\Lambda)&=\int_{-1}^{1}f(t)K_n(t,x;\Lambda)w(t)\,dt+A_1f(1)K_n(t,x;1)\\&+B_1f(-1)K_n(t,x;-1)+A_2f'(1)\frac{\partial K_n(t,x;\Lambda)}{\partial t}\Big|_{t=1}+B_2f'(-1)\frac{\partial K_n(t,x;\Lambda)}{\partial t}\Big|_{t=-1}.\end{aligned}$$

Из (1.2) вытекает

$$\begin{aligned}U_n(f;x;\Lambda)-f(x)&=\int_{-1}^{1}[f(t)-f(x)]K_n(t,x;\Lambda)w(t)\,dt+A_1[f(1)-f(x)]K_n(1,x;\Lambda)\\&+B_1[f(-1)-f(x)]K_n(-1,x;\Lambda)+A_2f'(1)\frac{\partial K_n(t,x;\Lambda)}{\partial t}\Big|_{t=1}\\&+B_2f'(-1)\frac{\partial K_n(t,x;\Lambda)}{\partial t}\Big|_{t=-1}.\end{aligned}$$

Из регулярности по Теплицу матрицы Λ и леммы 3.5 следует

$$\lim_{n\to\infty}[U_n(f;x;\Lambda)-f(x)]=\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}[f(t)-f(x)]K_n(t,x;\Lambda)w(t)\,dt,$$

поэтому предельное равенство (3.4) будет доказано, если установить соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}[f(t)-f(x)]K_n(t,x;\Lambda)w(t)\,dt=0. \tag{3.25}$$

Воспользуемся представлением (3.23) и оценками (3.19), (3.24), тогда в точке Лебега $x\in(c,d)$ получаем

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}[f(t)-f(x)]K_n(t,x;\Lambda)w(t)\,dt&=\int_{c}^{d}[f(t)-f(x)]K_n(t,x;\Lambda)w(t)\,dt\\ +\int_{E}[f(t)-f(x)]K_n(t,x;\Lambda)w(t)\,dt&=0_x(1)\Biggl\{\sum_{k=0}^{v-1}(k+1)\bigl|\Delta^2\lambda_k^{(n)}\bigr|+(v+1)\bigl|\Delta\lambda_v^{(n)}\bigr|\\ &+(n-v)\bigl|\Delta\lambda_{v+1}^{(n)}\bigr|+\sum_{k=v+1}^{n-1}(n-k)\biggl(1+\ln\frac{n+1}{n-k}\biggr)\bigl|\Delta^2\lambda_k^{(n)}\bigr|\Biggr\}\\ &+O_x(1)\sum_{k=0}^{n}\bigl|\Delta^2\lambda_k^{(n)}\bigr|.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Нетрудно показать [14], что условие (3.24) влечет

$$\sum_{k=0}^{n}\bigl|\Delta^2\lambda_k^{(n)}\bigr|=o(1)\quad(n\to\infty),$$

$$\sum_{k=0}^{v-1}(k+1)\bigl|\Delta^2\lambda_k^{(n)}\bigr|+(v+1)\bigl|\Delta\lambda_v^{(n)}\bigr|+(n-v)\bigl|\Delta\lambda_{v+1}^{(n)}\bigr| +\sum_{k=v+1}^{n-k}(n-k)\biggl(1+\ln\frac{n+1}{n-k}\biggr)\bigl|\Delta^2\lambda_k^{(n)}\bigr|\le C.$$

Поэтому из соотношения (3.26) следует (3.25) почти всюду в (c,d). Вопрос о равномерной Λ-суммируемости вытекает из аналогичных рассуждений, надо лишь учесть равномерную оценку Λ-функции Лебега

$$L_n(x;\Lambda):=\int_{c}^{d}|K_n(t,x;\Lambda)|w(t)\,dt\le C\quad(n=0,1,\dots,;\ x\in K\subset(c,d)).$$

которая следует из леммы 3.4.

Следствие 3.1. *При выполнении условий теоремы* 3.1 *для системы* $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ *утверждения* 1 *и* 2 *теоремы* 3.1 *имеют место для средних Чезаро ряда Фурье — Соболева*

$$\sigma_n^{\alpha}(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n-k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}c_k(f)q_k(x)\quad(n=0,1,2\dots;\ x\in[-1,1]).$$

Действительно, как показано в [14], *средние Чезаро* (C,α) $(\alpha>0)$ *удовлетворяют условию* (3.24).

4. О рядах Фурье — Гегенбауэра — Соболева

Рассмотрим гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle_\alpha = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^\alpha\,dx + M[f(1)g(1)+f(-1)g(-1)]$$
$$+ N[f'(1)g'(1)+f'(-1)g'(-1)] \quad (M\ge 0,\ N\ge 0;\ \alpha>-1). \qquad (4.1)$$

Пусть $\{\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x)\equiv \widehat{B}_n^{(\alpha)}(x;M,N)\}$ $(n=0,1,2\ldots;\ x\in[-1,1])$ — система симметричных ортонормированных многочленов Гегенбауэра — Соболева, ортонормированных относительно скалярного произведения (4.1).

При $\alpha=0$ получаем систему симметричных ортонормированных многочленов Лежандра — Соболева. Многочлены $\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x;M,N)$ при $M>0$, $N>0$ обладают рядом свойств, отличных от соответствующих свойств классических многочленов Гегенбауэра $\widehat{P}_n^{(\alpha)}(x)$ (ультрасферических многочленов), ортонормированных по весу $w_\alpha(x)=(1-x^2)^\alpha$ (случай $M=0$, $N=0$). Приведем некоторые из них [8; 15–17] (см. библиографию в них).

1. При $N>0$ для достаточно больших n существует одна пара вещественных корней, лежащих вне промежутка $[-1,1]$ (все корни $\widehat{P}_n^{(\alpha)}(x)$ лежат в интервале $(-1,1)$).

2. Многочлены являются собственными функциями линейного дифференциального оператора обычно бесконечного порядка. Только в случае, когда $\alpha=0,1,2,\ldots,$ этот класс содержит оператор конечного порядка. В случае $M>0$, $N>0$ порядок равен $4\alpha+10$.

3. Для значений в концах промежутка ортогональности имеют место соотношения

$$\bigl|\widehat{B}_n^{(\alpha)}(\pm1)\bigr|\simeq n^{-\alpha-3/2}\bigl|\bigl(\widehat{B}_n^{(\alpha)}\bigr)'(\pm1)\bigr|\simeq n^{-\alpha-7/2}\quad(n\to\infty), \qquad (4.2)$$

где $A_n\simeq B_n$ $(n\to\infty)$ означает $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=1$. Напомним, что в отличие от (4.2)

$$\bigl|\widehat{P}_n^{(\alpha)}(\pm1)\bigr|\simeq n^{\alpha+1/2},\quad \bigl|\bigl(\widehat{P}_n^{(\alpha)}\bigr)'(\pm1)\bigr|\simeq n^{\alpha+5/2}\quad(n\to\infty).$$

4. Справедливо рекуррентное соотношение

$$(x^3-3x)\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x)=\alpha_{n+3}\widehat{B}_{n+3}^{(\alpha)}(x)+b_{n+1}\widehat{B}_{n+1}^{(\alpha)}(x)+b_n\widehat{B}_{n-1}^{(\alpha)}(x)+a_n\widehat{B}_{n-3}^{(\alpha)}(x), \quad (4.3)$$

где

$$a_n=\frac{1}{8}+\frac{C_1}{n}+O\biggl(\frac{1}{n^2}\biggr),\quad b_n=-\frac{9}{8}+\frac{C_2}{n}+O\biggl(\frac{1}{n^2}\biggr), \qquad (4.4)$$

при этом постоянные C_1 и C_2 не зависят от n. Для девятичленного рекуррентного соотношения асимптотика (4.4) получена в [15], для рекуррентного соотношения (4.3) доказательство аналогично. Многочлены $\widehat{B}_n^{(\alpha)}(x)$ (как и классические многочлены Гегенбауэра $\widehat{P}_n^{(\alpha)}(x)$) равномерно ограничены на каждом компакте [15].

Обозначим

$$\mathfrak{R}_\alpha=\biggl\{f:\int_{-1}^{1}|f(x)|(1-x^2)^\alpha(x)\,dx<\infty,\ f(\pm1),f'(\pm1)\text{ существуют и конечны}\biggr\}.$$

Каждой функции $f \in \mathfrak{R}_\alpha$ $(\alpha > -1)$ поставим в соответствие ряд Фурье — Гегенбауэра — Соболева $(M > 0,\ N > 0)$:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) \widehat{B}_k^{(\alpha)}(x),$$

$$c_k(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\widehat{B}_k^{(\alpha)}(x)(1-x^2)^\alpha\,dx + M\bigl[f(1)\widehat{B}_n^{(\alpha)}(1) + f(-1)\widehat{B}_n^{(\alpha)}(-1)\bigr]$$
$$+ N\bigl[f'(1)\bigl(\widehat{B}_n^{(\alpha)}\bigr)'(1) + f'(-1)\bigl(\widehat{B}_n^{(\alpha)}\bigr)'(-1)\bigr].$$

Рассмотрим скалярное произведение (4.1) при $M > 0$, $N > 0$. Тогда, как доказано в [18], существует функция $f \in L^1[-1,1]$, ряд Фурье — Лежандра — Соболева расходится почти всюду. Обозначим через $U_n^{(\alpha)}(f;x;\Lambda)$ Λ-средние ряда Фурье — Гегенбауэра — Соболева, построенные с помощью регулярной по Теплицу треугольной матрицы (3.2):

$$U_n^{(\alpha)}(f;x;\Lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} c_k(f)\widehat{B}_k^{(\alpha)}(x) \quad (n = 0,1,2\ldots;\ x \in [-1,1]).$$

Так как в силу (4.4) условие (3.6) выполняется и многочлены Гегенбауэра — Соболева равномерно ограничены на компактах из $(-1,1)$, из теоремы 3.1 вытекает

Теорема 4.1. *Пусть для элементов регулярной по Теплицу матрицы* (см. (3.2)) *имеет место оценка* (3.24) *и* $[c,d]$ *— произвольный промежуток из* $(-1,1)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если функция* $f \in \mathfrak{R}_{w_\alpha}$ *удовлетворяет предположению* $f \in L^1_w[c,d] \cup L^2_w(E)$ *на промежутке* $E = [-1,c) \cup (d,1]$, *то в каждой точке Лебега* $x \in (c,d)$ *функции* f (*и, значит, почти всюду в* (c,d)) *выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} U_n^{(\alpha)}(f;x;\Lambda) = f(x).$$

2. *Если функция* f *непрерывна на* $[-1,1]$, *то равномерно на каждом компакте* $K \subset (c,d)$ *ряд Фурье — Гегенбауэра — Соболева* Λ*-суммируется к* $f(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1951.
2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004.
3. *Marcellan F., Alfaro M., Rezola M. L.* Orthogonal polynomials in Sobolev spaces: old and new directions // J. Comp. Appl. Math. 1993. V. 48. P. 113–132.
4. *Костенко И. А., Маламуд М. М.* Об одномерном операторе Шредингера с δ-взаимодействием // Функцион. анализ и его прил. 2010. Т. 44, № 2. С. 87–92.
5. *Базов И. А., Задорожный А. И.* Собственные поперечные колебания нагруженной вязкоупругой консоли // Междунар. Симп. «Ряды Фурье и их приложения»: Тез. докл. Ростов-на-Дону, 2006. С. 117.
6. *Ильин В. А.* Смешанная задача, описывающая процесс успокоения стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2010. Т. 269. С. 133–142.
7. *Капустин Н. Ю., Моисеев Ю. И.* О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 1. С. 115–119.

8. *Arvesu J., Alvarez-Nodarse R., Marcellan F., Pan K.* Jacobi–Sobolev-type orthogonal polynomials: Second order differential equations and zeros // J. Comp. Appl. Math. 1998. V. 90. P. 135–156.
9. *Marcellan F., Osilenker B. P., Rocha I. A.* On Fourier series of Jacobi–Sobolev orthogonal polynomials // J. Ineq. Appl. 2002. V. 7. P. 673–699.
10. *Marcellan F., Osilenker B. P., Rocha I. A.* On Fourier series of a discrete Jacobi–Sobolev inner product // J. Approx. Theory. 2002. V. 117. P. 1–22.
11. *Rocha I. A., Marcellan F., Salto L.* Relative asymptotics and Fourier series of orthogonal polynomials with a discrete Sobolev inner product // J. Approx. Theory. 2003. V. 121. P. 336–356.
12. *Осиленкер Б. П.* О рядах Фурье по симметричным ортогональным полиномам Гегенбауэра — Соболева // Вестн. МГСУ. 2011. № 4. С. 74–79.
13. *Осиленкер Б. П.* Сходимость и суммируемость рядов Фурье — Соболева // Вестн. МГСУ. 2012. № 5. С. 34–39.
14. *Osilenker B. P.* Fourier series in orthogonal polynomials. Singapore: World Sci., 1999.
15. *Osilenker B. P.* Generalized trace formula and asymptotics of the averaged Turan determinant for orthogonal polynomials // J. Approx. Theory. 2006. V. 141. P. 70–94.
16. *Foulquie A. Moreno, Marcellan F., Osilenker B. P.* Estimates for polynomials orthogonal with respect to some Gegenbauer–Sobolev inner product // J. Ineq. Appl. 1999. V. 3. P. 401–419.
17. *Koekoek R.* Differential equations for symmetric generalized ultraspherical polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 345. P. 47–72.
18. *Fejzullahu B. Xh.* Divergent Legendre–Sobolev polynomial series // Novi Sad. J. Math. 2006. V. 38, N 1. P. 35–41.

Статья поступила 14 февраля 2013 г, окончательный вариант — 7 июля 2014 г.

Осиленкер Борис Петрович
Московский инженерно-строительный университет,
кафедра высшей математики,
Ярославское шоссе, 26, Москва 129337
b_osilenker@mail.ru