Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 517.55+512.626

О МОНОДРОМИИ ОБЩЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Е. Н. Михалкин

Аннотация. Рассматривается общее приведенное алгебраическое уравнение степени n с комплексными коэффициентами. Многозначная функция, представляющая решение этого уравнения, называется *общей алгебраической функцией.* В пространстве коэффициентов рассматривается дискриминантное множество ∇ указанного уравнения и в его дополнении выбирается максимальная поликруговая область D, содержащая начало координат. Описывается монодромия общей алгебраической функции в окрестности множества D. В частности доказывается, что ∇ пересекает границу ∂D в n вещественных алгебраических поверхностях $\mathscr{S}^{(j)}$ размерности $n-2$. При этом всякая ветвь $y_j(x)$ общей алгебраической функции имеет в D ветвление лишь на паре поверхностей $\mathscr{S}^{(j)}$, $\mathscr{S}^{(j-1)}$.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, гипергеометрическая функция, дискриминант, интегральное представление, монодромия.

Введение

В статье будем рассматривать общее алгебраическое уравнение

$$y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \dots + x_1 y - 1 = 0. \tag{1}$$

Главным решением уравнения (1) называется ветвь $y_0(x) = y_0(x_1, \dots, x_{n-1})$ решения с условием $y_0(0) = 1$. Для указанного решения Меллином [1] получены интегральное представление (в виде интеграла по мнимому подпространству), а также разложение в гипергеометрический ряд. Также отмечено, что остальные решения уравнения (1) получаются из главного по формуле

$$y_j(x) = \varepsilon_j y_0\big(\varepsilon_j x_1, \varepsilon_j^2 x_2, \dots, \varepsilon_j^{n-1} x_{n-1}\big),$$

где $\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi i}{n} j}$ — первообразный корень из единицы степени n. Поэтому имеются все n решений $y_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, в виде степенных рядов с центром $x = 0$.

Область сходимости указанных степенных рядов является полной поликруговой (точнее $(n-1)$-круговой) логарифмически выпуклой областью [2]. Описание этой области приведено в [3].

Интегральные представления Меллина для решений $y_j(x)$ сходятся в полиугловых областях [4]. Поскольку всякая пара, состоящая из поликруговой и полиугловой областей, имеет непустое пересечение, представленные решения

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–31265–мол_а), а также гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006).

в виде соответствующих рядов и интегралов являются аналитическими продолжениями друг в друга. Такая схема аналитических продолжений описана в [5].

В настоящей статье реализуем некоторые аналитические продолжения общей алгебраической функции, основанные на другом ее интегральном представлении. А именно, в статье [6] для уравнения (1) получено решение в виде интеграла по отрезку. Область сходимости этого интеграла представляет собой дополнение к комплексно-линейчатой поверхности: эта область ни поликруговая, ни полиугловая.

На основе полученного интегрального представления в [6] описана монодромия решения $y(x)$ уравнения (1) с одним параметром, т. е. когда в (1) лишь одна из переменных x_j отлична от нуля.

Для пояснения сути исследования заметим, что дискриминантное множество уравнения (1) допускает n-значную параметризацию Горна — Капранова $x = \Psi(s)$ [3] (см. формулу (4) в § 1), где s пробегает комплексное проективное пространство размерности $n-2$. Каждая из n ветвей параметризации определяет так называемую струну, которая получается сужением $\Psi(s)$ на вещественное подпространство $\mathbb{RP}_{n-2}$. Область сходимости D гипергеометрического ряда (сходящегося в окрестности $x = 0$), представляющего решение уравнения (1), примыкает к дискриминантному множеству ∇ по части границы ∂D, состоящей из n струн $\mathscr{S}^{(0)}, \mathscr{S}^{(1)}, \ldots, \mathscr{S}^{(n-1)}$ (их точное определение см. в § 2). В данной статье описывается характер ветвления решения $y(x)$ уравнения (1) при продолжении из области D вокруг струн.

Предложение 2 утверждает, что комплексная прямая, выпущенная из начала координат $x = 0$ через произвольную точку на любой струне $\mathscr{S}^{(j_0)}$, пересекает каждую из струн $\mathscr{S}^{(j)}$ в единственной точке. На каждой такой комплексной прямой можно выбрать n петель σ_j с началом в $x = 0$, окружающих струны $\mathscr{S}^{(j)}$. Основной результат о монодромии общей алгебраической функции $y(x)$ содержится в теореме 3 и состоит в том, что при продолжении через границу ∂D области D всякая ветвь $y_j(x)$ решения уравнения (1) имеет ветвление лишь в паре струн $\mathscr{S}^{(j)}$ и $\mathscr{S}^{(j-1)}$, причем второго порядка.

Приведем геометрическую интерпретацию вышесказанного для кубического уравнения

$$y^3 + x_2y^2 + x_1y - 1 = 0, \tag{2}$$

дискриминант которого есть полином

$$\Delta(x_1, x_2) = 27 + 4x_1^3 - 4x_2^3 + 18x_1x_2 - x_1^2x_2^2.$$

На рис. 1 изображены в логарифмической шкале

$$\ln : (x_1, x_2) \longrightarrow (\ln|x_1|, \ln|x_2|)$$

дискриминантное множество $\nabla = \{(x_1, x_2) : \Delta(x_1, x_2)) = 0\}$ уравнения (2) (темнозакрашенная область) и область D сходимости соответствующего гипергеометрического ряда (светлозакрашенная область). Параметризация ∇ определяет три струны, которые на рисунке проектируются в жирную кривую. Мы доказываем, что при продолжении через границу ∂D каждое решение $y_j(x)$ уравнения (2) имеет ветвление лишь в точках двух струн.

В случае уравнения (1) таких струн будет n. Однако при продолжении через ∂D любое из решений $y_j(x)$, $j = 0, \ldots, n-1$, по-прежнему имеет ветвление лишь в двух струнах из n.

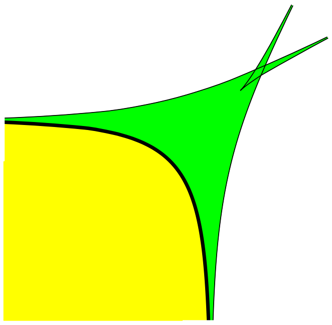

Рис. 1. Примыкание области к ∇ для кубического уравнения в логарифмической шкале.

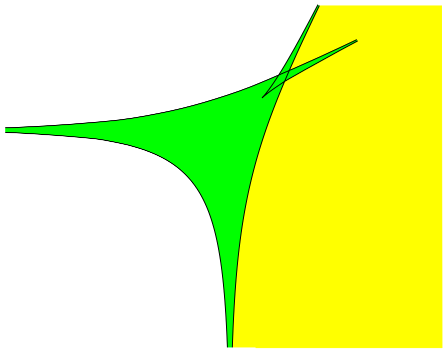

Рис. 2. Область сходимости одного из рядов Лорана, представляющего решение уравнения (2).

В основе доказательства теоремы 3 лежит конструкция двух разрезов Σ_+ и Σ_- в виде вещественных гиперповерхностей, полученных на основе упомянутого интегрального представления для $y_0(x)$ из [6] (точную формулировку см. в теореме 1 ниже). В § 2 описывается дифференциальная геометрия этих разрезов. А именно, доказывается, что разрезы $\Sigma_\pm$ не пересекают область D и примыкают к ее границе лишь по двум струнам $\mathscr{S}^{(0)}$ и $\mathscr{S}^{(n-1)}$, касаясь дискриминантного множества (предложение 1, теорема 2).

Отметим, что в статьях [7, 8] рассмотрена монодромия решения системы дифференциальных уравнений Меллина.

§ 1. Степенной ряд и интегральное представление для $y_0(x)$

Согласно [1] гипергеометрический ряд, представляющий главное решение уравнения (1), следующий:

$$y_0(x) = \frac{1}{n}\sum_{|k|\geq 0}\frac{(-1)^{|k|}\Gamma\bigl(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}k_1+\dots+\frac{n-1}{n}k_{n-1}\bigr)}{k_1!\dots k_{n-1}!\Gamma\bigl(\frac{1}{n}-\frac{n-1}{n}k_1-\dots-\frac{1}{n}k_{n-1}+1\bigr)}\,x_1^{k_1}\dots x_{n-1}^{k_{n-1}}, \tag{3}$$

где $|k| = k_1+\dots+k_{n-1}$, $k_i\geq 0$.

Опишем область сходимости ряда (3). Для этого обозначим через $\Delta(x) = \Delta(x_1,\dots,x_{n-1})$ дискриминант уравнения (1). Его нулевое множество $\nabla = \{x\in\mathbb{C}^{n-1} : \Delta(x)=0\}$ называется *дискриминантным множеством уравнения*. Введем следующие векторы:

$$\alpha = (n-1,\dots,2,1),\quad \beta = (1,2,\dots,n-1),$$

с помощью которых дискриминантное множество ∇ уравнения (1) допускает параметризацию $\Psi:\mathbb{CP}^{n-2}_s\to\mathbb{C}^{n-1}_x$ по формуле [3, 4]

$$x_k = \Psi_k(s) = \frac{ns_k}{\langle\alpha,s\rangle}\biggl(-\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\biggr)^{\frac{k}{n}},\quad k=1,\dots,n-1,\ s\in\mathbb{CP}_{n-2} \tag{4}$$

(здесь $\langle\,,\rangle$ — знак скалярного произведения). Тогда область сходимости D ряда (3) определяется из параметризации (4). А именно, поверхность

$$|x_k| = |\Psi_k(s)|, \quad k = 1, \dots, n-1, \ s \in \mathbb{R}_+^{n-1},$$

задает границу $\partial|D|$ изображения $|D|$ области D на диаграмме Рейнхардта [3, 9].

В [5] получены аналитические продолжения ряда (3), представленные рядами Лорана — Пюизо в других областях, определенным образом примыкающих к дискриминантному множеству (см., например, светлозакрашенную область на рис. 2).

Выпишем представление для $y_0(x)$ в виде интеграла по отрезку. Для участвующей в этом представлении логарифмической функции ее ветви выбираются условием $\ln 1 = 0$.

Теорема 1 [6]. *Ветвь $y_0(x)$ решения уравнения* (1) *представляется интегралом*

$$y_0(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n}\int_0^1 t^{\frac{1-n}{n}}(1-t)^{-\frac{1+n}{n}}\left[e^{\frac{\pi i}{n}}\ln\left(1+\sum_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{k}{n}\pi i}x_k t^{\frac{n-k}{n}}(1-t)^{\frac{k}{n}}\right)\right.$$
$$\left. - e^{-\frac{\pi i}{n}}\ln\left(1+\sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{k}{n}\pi i}x_k t^{\frac{n-k}{n}}(1-t)^{\frac{k}{n}}\right)\right] dt, \qquad (5)$$

сходящимся в области $\mathbb{C}^{n-1}\setminus(\Sigma_-\cup\Sigma_+)$, *где* $\Sigma_\mp = \bigcup\limits_{t\in[0;1]}\Sigma_\mp(t)$ — *семейства гиперплоскостей*

$$\Sigma_\mp(t) = \left\{x\in\mathbb{C}^{n-1} : \sum_{k=1}^{n-1} e^{\mp\frac{n-k}{n}\pi i}x_k t^{\frac{n-k}{n}}(1-t)^{\frac{k}{n}} = 1\right\}.$$

Отметим, что так как логарифмические функции в (5) голоморфны и однозначны в области $\mathbb{C}^{n-1}\setminus(\Sigma_-\cup\Sigma_+)$, то $y_0(x)$ голоморфна в этой области. Каждое из семейств Σ_-, Σ_+ является вещественной гиперповерхностью, и они служат разрезами, т. е. препятствиями к многозначности $y_0(x)$ в $\mathbb{C}^{n-1}\setminus(\Sigma_-\cup\Sigma_+)$.

§ 2. Геометрия разрезов Σ_+ и Σ_-

Рассмотрим логарифмическую проекцию дискриминантной гиперповерхности ∇:

$$\ln : \nabla \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \to (\ln|x_1|, \dots, \ln|x_{n-1}|).$$

Образ $\ln\nabla \subset \mathbb{R}^{n-1}$ называется *амебой алгебраической гиперповерхности* (см. [3, 10]). Обозначим через K множество критических точек этой проекции. Известно [11, 12], что K равно образу $\Psi(\mathbb{RP}_{n-2})$ вещественного проективного пространства относительно отображения (4).

Предложение 1. *Комплексные гиперплоскости семейств $\Sigma_\pm$ касаются дискриминантного множества ∇ вдоль подмножеств*

$$K_\pm = \left\{\Psi^\pm(s) : s\in\mathbb{RP}_{n-2},\ \frac{\langle\alpha, s\rangle}{\langle\beta, s\rangle} > 0\right\} \subset K,$$

где $\Psi^{\pm}(s)$ *— ветви параметризации* (4), *определяемые условиями* $\arg\big(-\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\big)^{\frac{1}{n}} = \mp\frac{\pi}{n}$. *В точке* $x=\Psi^{\pm}(s)$ *с* ∇ *касается гиперплоскость* $\Sigma_{\pm}(t)$ *семейства* $\Sigma_{\pm}$, *соответствующая параметру* $t=\frac{\langle\beta,s\rangle}{\langle\alpha,s\rangle+\langle\beta,s\rangle}$.

На рис. 3 в логарифмической шкале изображено указанное в предложении 1 свойство касания. В них, как и на рис. 1, рассмотрен дискриминант уравнения (2), а в качестве прямых $\Sigma_{\pm}(t)$ берутся прямые для значений $t=0,15$, $t=0,5$, $t=0,9$.

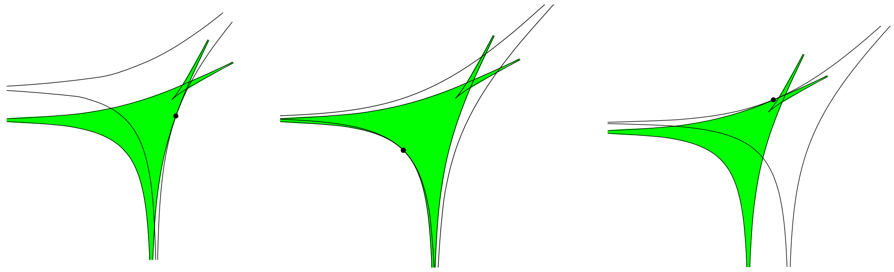

Рис. 3. Касание ∇ гиперплоскостями из $\Sigma_{\pm}$ при $t=0,15;0,5;0,9$.

Доказательство предложения 1. Пусть $F_{\pm}(x;t)$ — аффинные функции (переменного $x=(x_1,\dots,x_{n-1})$), определяющие $\Sigma_{\pm}(t)$:

$$F_{\pm}(x;t)=\sum_{k=1}^{n-1}x_k t^{\frac{k}{n}}(1-t)^{\frac{n-k}{n}}e^{\pm\frac{k}{n}\pi i}-1=:\sum_{k=1}^{n-1}x_k A_k^{\pm}(t)-1.$$

Для рассматриваемых s точки касания ∇ и $\Sigma_{\pm}(t)$ определяются системой уравнений (относительно $t=t(s)$)

$$F_{\pm}(\Psi(s);t(s))=0,\quad \operatorname{grad}_s F_{\pm}(\Psi(s);t(s))=0.$$

Пусть $s\in\mathbb{RP}_{n-2}$, причем $\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}>0$. Для таких s параметризацию (4) можно записать в виде n ветвей $x=\Psi^{(j)}(s)$:

$$x_k=\Psi_k^{(j)}(s)=e^{-\frac{\pi k i}{n}(1+2j)}\frac{ns_k}{\langle\alpha,s\rangle}\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}},\quad k=1,\dots,n-1,$$

где в качестве радикала степени $\frac{k}{n}$ берется арифметическое значение, а j принимает значения $0,1,\dots,n-1$. Очевидно, $\Psi^{(0)}(s)=\Psi^{+}(s)$, $\Psi^{(n-1)}(s)=\Psi^{-}(s)$. Вычислим частные производные $\frac{\partial\Psi_k^{(j)}}{\partial s_\nu}$. Для $k\neq\nu$ имеем

$$\frac{\partial\Psi_k^{(j)}}{\partial s_\nu}=B_{k\nu}^{(j)}(s),$$

где

$$B_{k\nu}^{(j)}(s)=e^{-\frac{\pi k i}{n}(1+2j)}\frac{ns_k}{\langle\alpha,s\rangle^2\langle\beta,s\rangle}\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}}[(k+\nu-n)\langle\beta,s\rangle-\nu k|s|].$$

Функция $B^{(j)}_{k\nu}(s)$ определена также при $k=\nu$, и производная $\frac{\partial\Psi^{(j)}_\nu}{\partial s_\nu}$ выражается через нее по формуле

$$\frac{\partial\Psi^{(j)}_\nu}{\partial s_\nu}=e^{-\frac{\pi\nu i}{n}(1+2j)}\frac{n}{\langle\alpha,s\rangle}\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{\nu}{n}}+B^{(j)}_{\nu\nu}(s).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F_\pm(\Psi^{(j)}(s);t)}{\partial s_\nu}=A^\pm_\nu(t)e^{-\frac{\pi\nu i}{n}(1+2j)}\frac{n}{\langle\alpha,s\rangle}\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{\nu}{n}}+\sum_{k=1}^{n-1}A^\pm_k(t)B^{(j)}_{k\nu}(s).$$

Заметим, что

$$A^+_\nu(t)e^{-\frac{\pi\nu i}{n}(1+2j)}\big|_{j=0}=t^{\frac{\nu}{n}}(1-t)^{\frac{n-\nu}{n}}=A^-_\nu(t)e^{-\frac{\pi\nu i}{n}(1+2j)}\big|_{j=n-1}.$$

Аналогично в произведениях $A^+_kB^{(0)}_{k\nu}$ и $A^-_kB^{(n-1)}_{k\nu}$ степень экспоненты исчезает, поэтому

$$F_\pm(\Psi^\pm(s);t)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{ns_k}{\langle\alpha,s\rangle}\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}}t^{\frac{k}{n}}(1-t)^{\frac{n-k}{n}}-1=\sum_{k=1}^{n-1}|x_k(s)|t^{\frac{k}{n}}(1-t)^{\frac{n-k}{n}}-1. \tag{6}$$

Следовательно, для производной получаем

$$\frac{\partial F_\pm(\Psi^\pm(s);t)}{\partial s_\nu}=t^{\frac{\nu}{n}}(1-t)^{\frac{n-\nu}{n}}\frac{n}{\langle\alpha,s\rangle}\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{\nu}{n}}$$
$$+\frac{n}{\langle\alpha,s\rangle^2\langle\beta,s\rangle}\sum_{k=1}^{n-1}t^{\frac{k}{n}}(1-t)^{\frac{n-k}{n}}s_k\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}}((k+\nu-n)\langle\beta,s\rangle-\nu k|s|). \tag{7}$$

Положим $t=\frac{\langle\beta,s\rangle}{n|s|}$, где $|s|=s_1+\dots+s_{n-1}$. Так как $n|s|=\langle\alpha,s\rangle+\langle\beta,s\rangle$, несложно проверить, что $t\in(0;1)$ тогда и только тогда, когда $\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}>0$. Покажем, что при указанном $t=t(s)$ справедливы тождества

$$F_\pm(\Psi^\pm(s);t(s))\equiv0,\quad \frac{\partial F_\pm(\Psi^\pm(s);t(s))}{\partial s_\nu}\equiv0,\quad \nu=1,\dots,n-1.$$

Действительно, в этом случае

$$F_\pm(\Psi^\pm(s);t(s))=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{ns_k}{\langle\alpha,s\rangle}\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}}\left(\frac{\langle\beta,s\rangle}{n|s|}\right)^{\frac{k}{n}}\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{n|s|}\right)^{\frac{n-k}{n}}-1$$
$$=\frac{1}{|s|}\sum_{k=1}^{n-1}s_k-1=0.$$

Аналогично

$$\frac{\partial F_\pm(\Psi^\pm(s);t(s))}{\partial s_\nu}$$
$$= \frac{1}{\langle\alpha,s\rangle^2\langle\beta,s\rangle}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\langle\beta,s\rangle^{\frac{k}{n}}\langle\alpha,s\rangle^{\frac{n-k}{n}}}{|s|}s_k\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}}((k+\nu-n)\langle\beta,s\rangle-\nu k|s|)$$
$$+\frac{1}{\langle\alpha,s\rangle}\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{\nu}{n}}\frac{\langle\beta,s\rangle^{\frac{\nu}{n}}\langle\alpha,s\rangle^{\frac{n-\nu}{n}}}{|s|}$$
$$=\frac{1}{\langle\alpha,s\rangle\langle\beta,s\rangle|s|}\sum_{k=1}^{n-1}s_k((k+\nu-n)\langle\beta,s\rangle-\nu k|s|)+\frac{1}{|s|}$$
$$=\frac{1}{\langle\alpha,s\rangle\langle\beta,s\rangle|s|}(\langle\beta,s\rangle^2+(\nu-n)\langle\beta,s\rangle|s|-\nu\langle\beta,s\rangle|s|)+\frac{1}{|s|}$$
$$=\frac{1}{\langle\alpha,s\rangle|s|}(\langle\beta,s\rangle-n|s|)+\frac{1}{|s|}=0.$$

Предложение 1 доказано.

При доказательстве предложения 1 мы определили $\Psi^{(j)}(s)$ как ветви параметризации (4) с условием

$$\arg\left(-\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{1}{n}}=-\frac{\pi}{n}(1+2j)$$

и отметили справедливость равенств $\Psi^+(s)=\Psi^{(0)}(s)$, $\Psi^-(s)=\Psi^{(n-1)}(s)$. Назовем *струной* поверхность

$$\mathscr{S}^{(j)}:=\left\{\Psi^{(j)}(s):s\in\mathbb{R}_+^{n-1}\right\}\subset\nabla,\quad j=0,\dots,n-1.$$

Для формулировки следующего утверждения напомним, что D обозначает область сходимости ряда (3).

Теорема 2. *Разрезы Σ_+, Σ_- не пересекают область D и примыкают к ее границе лишь по двум струнам $\mathscr{S}^{(0)}$ и $\mathscr{S}^{(n-1)}$. Таким образом, при продолжении через границу ∂D главное решение уравнения* (1) *испытывает ветвление только в точках $\mathscr{S}^{(0)}$, $\mathscr{S}^{(n-1)}$.*

Доказательство. Покажем, что при $s\in\mathbb{R}_+^{n-1}$ частные производные $\frac{\partial F_\pm(\Psi^\pm(s);t)}{\partial s_\nu}$ одновременно обращаются в нуль лишь при $t=\frac{\langle\beta,s\rangle}{n|s|}$. Ввиду (7) уравнение $\frac{\partial F_\pm(\Psi^\pm(s);t)}{\partial s_1}=0$ равносильно следующему:

$$\frac{1}{\langle\alpha,s\rangle\langle\beta,s\rangle}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{t}{1-t}\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}}s_k((n-k-1)\langle\beta,s\rangle+k|s|)$$
$$-\left(\frac{t}{1-t}\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{1}{n}}=0.$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{n-2}f_{k+1}(s)b^k=0, \tag{8}$$

где $b = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{n}}$,

$$f_k(s) = \frac{1}{\langle\alpha,s\rangle\langle\beta,s\rangle}\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}} s_k((n-k-1)\langle\beta,s\rangle + k|s|) \quad \text{при } k>1,$$

$$f_1(s) = \frac{1}{\langle\alpha,s\rangle\langle\beta,s\rangle}\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{1}{n}} s_1((n-2)\langle\beta,s\rangle + |s|) - \left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Рассмотрим (8) как алгебраическое уравнение относительно b. Заметим, что при $s \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ коэффициенты $f_2(s),\dots,f_{n-1}(s)$ этого уравнения положительные. Поэтому (8) может иметь не более одного положительного корня $b=b(s)$. Поскольку функция $b = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{n}}$ монотонно возрастает на интервале $(0,1)$, корню $b(s)$ может соответствовать только одно значение $t=t(s)$. Но выше было показано, что таковым $t(s)$ является $t = \frac{\langle\beta,s\rangle}{n|s|}$.

Обозначим через $|D|$ изображение области D на диаграмме Рейнхардта. По теореме Пассаре — Циха [3] система функций

$$r_k(s) = \frac{ns_k}{\langle\alpha,s\rangle}\left(\frac{\langle\alpha,s\rangle}{\langle\beta,s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}}, \quad k=1,\dots,n-1,$$

задает параметризацию границы $\partial|D|$. Обозначим $A_k(t) := t^{\frac{k}{n}}(1-t)^{\frac{n-k}{n}}$. Согласно представлению (6) для $F_\pm(\Psi^\pm(s);t)$ и следующему за ним доказательству предложения 1, каждая из вещественных гиперплоскостей $F_\pm(\Psi^\pm(s);t)=0$ касается $\partial|D|$, причем в точках $t = \frac{\langle\beta,s\rangle}{n|s|}$. Так как $A_k>0$, $k=1,\dots,n-1$, область $|D|$ лежит под каждой $\Sigma_{\mathrm{real}}(t) = \left\{r \in \mathbb{R}_+^{n-1} : A_1(t)r_1 + \dots + A_{n-1}(t)r_{n-1} = 1\right\}$ и потому выпукла.

Обозначим

$$\widetilde{F}(x;t) = A_1(t)x_1 + \dots + A_{n-1}(t)x_{n-1}$$

и заметим, что $\widetilde{F}(r;t) \le 1$ для всех r из замыкания $|\overline{D}|$, причем равенство достигается лишь в точке $r(s)$ при $t = \frac{\langle\beta,s\rangle}{n|s|}$. Рассмотрим функцию $\widetilde{F}(x;t)$ для комплексных $x = (r_1e^{i\theta_1},\dots,r_{n-1}e^{i\theta_{n-1}}) \in \overline{D}$. Для нее $\operatorname{Re}\widetilde{F}(x;t) \le \widetilde{F}(r;t)$, причем равенство имеет место лишь при вещественных x. Отсюда следует, что

$$\Sigma_\pm(t) = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} : \widetilde{F}(x_1e^{\pm\frac{\pi i}{n}},\dots,x_{n-1}e^{\pm\frac{\pi(n-1)i}{n}}) = 1\}$$

не пересекают D, а ее границу ∂D пересекают лишь в точках $\Psi^\pm(s)$, $s \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, обеспечивающих согласно (6) равенство

$$\widetilde{F}(x_1(s)e^{\pm\frac{\pi i}{n}},\dots,x_{n-1}(s)e^{\pm\frac{\pi(n-1)i}{n}}) = \widetilde{F}(|x_1|,\dots,|x_{n-1}|).$$

Теорема 2 доказана.

§ 3. Монодромия для $y(x)$ вблизи области D

Отметим, что для введенных в предыдущем параграфе струн выполняется условие цикличности: $\mathscr{S}^{(j)} = \mathscr{S}^{(j+nk)}$ (при $k \in \mathbb{Z}$), поэтому достаточно рассматривать $\mathscr{S}^{(j)}$ для $j=0,\dots,n-1$.

Используя формулу, выражающую остальные решения уравнения (1) через главное:

$$y_j(x) = \varepsilon_j y_0\big(\varepsilon_j x_1, \varepsilon_j^2 x_2, \dots, \varepsilon_j^{n-1}x_{n-1}\big), \quad j=1,\dots,n-1,$$

получаем

Следствие 1. *При продолжении через границу ∂D области D каждая ветвь $y_j(x)$ уравнения* (1) *испытывает ветвление лишь в точках $\mathscr{S}^{(j-1)}$ и $\mathscr{S}^{(j)}$.*

Далее перейдем к нахождению порядка ветвления каждой из указанных струн. Для этого заметим, что в силу однородности параметризации (4) одну из координат вектора $s = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ можно считать равной единице. Пусть $s_{n-1} = 1$, тем самым будем рассматривать вектор $s = (s_1, \dots, s_{n-2}, 1)$.

Зафиксируем произвольную точку $s^{(0)} = \big(s_1^{(0)}, \dots, s_{n-2}^{(0)}, 1\big)$ с положительными координатами и проведем комплексную прямую $x = u\Psi^{(j_0)}(s^{(0)})$, $u \in \mathbb{C}$, через начало координат $x = 0$ и точку $\Psi^{(j_0)}(s^{(0)})$ на струне. Эта прямая имеет непустое пересечение с каждой из струн $\mathscr{S}^{(j)}$. Действительно, представив $u = \rho e^{i\varphi}$, приходим к системе уравнений

$$e^{i(\varphi - \frac{\pi}{n}(1+2j_0))}\rho \frac{ns_k^{(0)}}{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle} \left(\frac{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle}{\langle \beta, s^{(0)} \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} = e^{-\frac{\pi i}{n}(1+2j)} \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left(\frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}}, \ k = 1, \dots, n-1,$$

решением которой при $\varphi = \frac{2\pi}{n}(j_0 - j)$ является

$$(\rho, s_1, \dots s_{n-2}) = \big(1, s_1^{(0)}, \dots, s_{n-2}^{(0)}\big).$$

Таким образом, для каждого j при $\arg u = \frac{2\pi}{n}(j_0 - j)$ рассматриваемая прямая пересекает струну $\mathscr{S}^{(j)}$. Более того, справедливо

Предложение 2. *Комплексная прямая $\{x = u\Psi^{(j_0)}(s^{(0)}) : u \in \mathbb{C}\}$ пересекает каждую из струн $\mathscr{S}^{(j)}$ в единственной точке.*

Доказательство. Нужно показать, что система

$$\rho \frac{ns_k^{(0)}}{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle} \left(\frac{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle}{\langle \beta, s^{(0)} \rangle} \right)^{\frac{k}{n}} = \frac{ns_k}{\langle \alpha, s \rangle} \left(\frac{\langle \alpha, s \rangle}{\langle \beta, s \rangle} \right)^{\frac{k}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-1, \tag{9}$$

при выбранном $s^{(0)}$ имеет единственное решение. Для этого выразим из (9) s_k, $k = 1, \dots, n-3$, через s_{n-2} следующим образом. Сначала разделим каждое уравнение из (9) на последнее уравнение этой системы (т. е. при $k = n-1$), в результате получим новую систему уравнений:

$$s_k^{(0)} \left(\frac{\langle \beta, s^{(0)} \rangle}{\langle \alpha, s^{(0)} \rangle} \right)^{\frac{n-k-1}{n}} = s_k \left(\frac{\langle \beta, s \rangle}{\langle \alpha, s \rangle} \right)^{\frac{n-k-1}{n}}, \quad k = 1, \dots, n-2. \tag{10}$$

Теперь разделим каждое из уравнений полученной системы на последнее уравнение этой системы, возведенное в степень $n-k-1$, в результате чего придем к требуемой связи между s_k и s_{n-2}:

$$s_k = \frac{s_k^{(0)}}{\big(s_{n-2}^{(0)}\big)^{n-k-1}} s_{n-2}^{n-k-1}, \quad k = 1, \dots, n-3. \tag{11}$$

Представим $\langle \alpha, s \rangle$, $\langle \beta, s \rangle$ с учетом последнего выражения в виде многочленов с положительными коэффициентами:

$$\langle \alpha, s \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \frac{s_k^{(0)}}{\big(s_{n-2}^{(0)}\big)^{n-k-1}} s_{n-2}^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k s_{n-2}^{n-k-1},$$

$$\langle \beta, s \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{s_k^{(0)}}{\big(s_{n-2}^{(0)}\big)^{n-k-1}} s_{n-2}^{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k s_{n-2}^{n-k-1},$$

здесь по-прежнему $s_{n-1} = s_{n-1}^{(0)} = 1$. Учитывая полученные соотношения, запишем последнее уравнение системы (10) в виде

$$s_{n-2}^{(0)}\left(\frac{\langle\beta, s^{(0)}\rangle}{\langle\alpha, s^{(0)}\rangle}\right)^{\frac{1}{n}} = s_{n-2}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k s_{n-2}^{n-k-1}}{\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k s_{n-2}^{n-k-1}}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{12}$$

Несложно увидеть, что функция $g(s_{n-2}) = s_{n-2}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} b_k s_{n-2}^{n-k-1}}{\sum_{k=1}^{n-1} a_k s_{n-2}^{n-k-1}}\right)^{\frac{1}{n}}$ является строго возрастающей при $s_{n-2} > 0$. Для этого достаточно представить $g(s_{n-2})$ в виде

$$g(s_{n-2}) = s_{n-2}^{\frac{2}{n}}\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} b_k s_{n-2}^{n-k-1}}{a_1 + \sum\limits_{k=2}^{n-1} \frac{a_k}{s_{n-2}^{k-1}}}\right)^{\frac{1}{n}}$$

и учесть, что $a_k, b_k > 0$. Следовательно, уравнение (12) имеет лишь одно решение $s_{n-2} = s_{n-2}^{(0)}$. Из (11) получаем, что $s_k = s_k^{(0)}$ для $k = 1, \dots, n-3$. Предложение доказано.

Итак, согласно предложению 2 комплексная прямая $x = u\Psi^{(j_0)}(s^{(0)})$ пересекает каждую из n струн $\mathscr{S}^{(j)}$ ровно в одной точке. Обозначим через σ_j петлю, лежащую в указанной прямой, проходящую через $x = 0$ и окружающую лишь струну $\mathscr{S}^{(j)}$. Согласно следствию 1 каждая из струн $\mathscr{S}^{(j)}$ является точкой ветвления лишь двух ветвей $y_j(x)$ и $y_{j+1}(x)$ (с учетом цикличности) из набора $y_0(x), \dots, y_{n-1}(x)$ всех ветвей.

Также из следствия 1 несложно сделать вывод, что ветвь $y_j(x)$ при обходе петли σ_j переходит в ветвь $y_{j+1}(x)$ (здесь понимаем, что $j = 0, \dots, n-1$, т. е. учитываем условие цикличности по $\operatorname{mod} n$). Действительно, если предположить, что рассматриваемая ветвь переходит в отличную от $y_{j+1}(x)$ ветвь, то точка $\mathscr{S}^{(j)}$ будет являться точкой ветвления бесконечного порядка, так как лишь две ветви $y_j(x)$ и $y_{j+1}(x)$ имеют ветвление в этой точке. Аналогично получаем, что ветвь $y_j(x)$ при обходе петли σ_{j-1} переходит в ветвь $y_{j-1}(x)$.

Наконец, укажем порядок ветвления струн $\mathscr{S}^{(j)}$. Как было показано, ветвь $y_j(x)$ при обходе петли σ_j переходит в ветвь $y_{j+1}(x)$, а ветвь $y_{j+1}(x)$ при обходе петли σ_j — в ветвь $y_{(j+1)-1}(x) = y_j(x)$. Итак, ветвь y_j при двукратном обходе петли σ_j перешла сама в себя. Следовательно, порядок ветвления струн $\mathscr{S}^{(j)}$ равен двум. Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. *При продолжении через границу ∂D области D всякая ветвь $y_j(x)$ решения уравнения* (1) *имеет ветвление лишь в паре струн $\mathscr{S}^{(j)}$ и $\mathscr{S}^{(j-1)}$, причем второго порядка. При этом ветвь $y_j(x)$ при обходе петли σ_j переходит в ветвь y_{j+1}, а при обходе петли σ_{j-1} — в ветвь y_{j-1}.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mellin H. J.* Résolution de l'équation algébraique générale à l'aide de la fonction gamma // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. 1921. V. 172. P. 658–661.
2. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. Ч. 2.

3. *Passare M., Tsikh A.* Algebraic equations and hypergeometric series // The legacy of Niels Henrik Abel. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2004. P. 653–672.
4. *Антипова И. А.* Обращения многомерных преобразований Меллина и решение алгебраических уравнений // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 4. С. 3–20.
5. *Антипова И. А., Михалкин Е. Н.* Аналитические продолжения общей алгебраической функции с помощью рядов Пюизо // Тр. МИАН. 2012. Т. 279. С. 9–19.
6. *Михалкин Е. Н.* О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 365–371.
7. *Дикенштейн А., Садыков Т. М.* Алгебраичность решений системы уравнений Меллина и ее монодромия // Докл. АН. 2007. Т. 412, № 4. С. 448–450.
8. *Дикенштейн А., Садыков Т. М.* Базисы в пространстве решений системы уравнений Меллина // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 9. С. 59–80.
9. *Семушева А. Ю., Цих А. К.* Области сходимости гипергеометрических рядов многих комплексных переменных // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2009. Т. 2, № 2. С. 221–229.
10. *Gelfand I., Kapranov M., Zelevinsky A.* Discriminants, resultants and multidimensional determinants. Boston: Birkhäuser, 1994.
11. *Passare M., Tsikh A.* Amoebas: their spines and their contours // Contemp. Math. 2005. V. 377. P. 275–288.
12. *Mikhalkin G.* Real algebraic curves, the moment map and amoebas // Ann. Math. 2000. V. 151, N 2. P. 309–326.

Статья поступила 18 июля 2014 г.

Михалкин Евгений Николаевич
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
mikhalkin@bk.ru