Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 512.54

ПРОПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ PST–ГРУПП И PT–ГРУПП

С. Йи

Аннотация. Пусть H и X — подгруппы группы G. Говорят, что подгруппа H *X-проперестановочна* в G, если существует подгруппа B из G такая, что $G = N_G(H)B$ и H является X-перестановочной (в смысле [1]) со всеми подгруппами из B. В данной работе представлен анализ влияния X-проперестановочных подгрупп на строение группы G. В частности, доказано, что в том и только в том случае G является разрешимой PST-группой, когда все холловы подгруппы и все максимальные подгруппы любой холловой подгруппы из G X-проперестановочны в G, где $X = Z_\infty(G)$.

Ключевые слова: конечная группа, X-проперестановочная подгруппа, PT-группа, PST-группа, холлова подгруппа, сверхразрешимая группа.

1. Введение

Все рассматриваемые в работе группы конечны, и символ G обозначает конечную группу. Символ $\pi(n)$ обозначает множество всех простых чисел, делящих число n, $\pi(G) = \pi(|G|)$, символ $G^{\mathfrak{N}}$ обозначает сверхразрешимый корадикал G, т. е. наименьшую нормальную подгруппу из G с нильпотентным фактором.

Пусть A, B и X — подгруппы из G. Тогда A *перестановочна* с B, если $AB = BA$; A *X-перестановочна* с B [1], если $AB^x = B^xA$ по крайней мере для одного элемента $x \in X$.

Подгруппа A называется *перестановочной* (*S-перестановочной*) в G, если A перестановочна со всеми подгруппами (со всеми силовскими подгруппами соответственно) из G. Группа G называется *PT-группой*, если перестановочность является транзитивным отношением на G, т. е. всякая перестановочная подгруппа перестановочной подгруппы из G перестановочна в G. Группа G называется *PST-группой*, если S-перестановочность является транзитивным отношением на G.

Так же, как и T-группы, PT-группы и PST-группы имеют много интересных свойств (см. [2, разд. 2]). Описания PT-групп и PST-групп было впервые получено [3, 4] в разрешимом случае и в [5] в общем случае. Однако в дальнейших публикациях авторы (см. [2] или недавние публикации [6–16]) обнаружили многие другие описания разрешимых PT-групп и PST-групп.

В данной работе приведены новые характеризации разрешимых PST-групп и PT-групп на основе следующего определения.

Определение 1.1. Пусть H и X — подгруппы из G. Будем говорить, что H *X-проперестановочна* в G, если найдется такая подгруппа B из G, что $G = N_G(H)B$ и H X-перестановочна со всеми подгруппами из B.

Если в данном определении $X = 1$, то H называется *проперестановочной* в G. Говорят, что H *полностью проперестановочна* в G (в связи с этим см. вопрос 18.91 в [17]), если H проперестановочна в каждой подгруппе из G, содержащей H.

Основной целью статьи является доказательство следующей теоремы.

Теорема A. *Пусть $X = Z_\infty(G)$. В том и только в том случае G является разрешимой PST-группой, когда все холловы подгруппы из G и все максимальные подгруппы каждой холловой подгруппы из G X-проперестановочны в G.*

Доказательство теоремы A проводится пошагово, многие из шагов обеспечиваются следующими тремя полезными результатами.

Предложение 1.2. *Пусть $X = F(G)$ — подгруппа Фиттинга из G и H — холлова X-проперестановочная подгруппа из G. Если $p > q$ для всех таких простых чисел p и q, что p делит $|H|$ и q делит $|G : H|$, то H нормальна в G.*

Подгруппа A из G называется *X-полуперестановочной* в G [18], если G содержит такую подгруппу B, что $G = AB$ и A X-перестановочна со всеми подгруппами из B.

Пример 1.3. Пусть p, q — простые числа такие, что q делит $p - 1$. Пусть $G = A \times B$, где A — неабелева группа порядка pq и B — группа порядка p. Пусть H — подгруппа порядка q из G. Тогда, очевидно, H полностью проперестановочна в G и H не является G-полуперестановочной в G.

Следующее свойство из предложения 1.2 эквивалентно теореме 5.4 из [18].

Следствие 1.4. *Пусть $X = F(G)$ и H — холлова подгруппа из G. Предположим, что H X-полуперестановочна в G и $p > q$ для всех таких простых чисел p и q, что p делит $|H|$ и q делит $|G : H|$. Тогда H нормальна в G.*

Следствие 1.5 (см. [19, теорема 3]). *Пусть p — наибольший простой делитель $|G|$. Если силовская p-подгруппа P из G 1-полуперестановочна в G, то P нормальна в G.*

Предложение 1.6. *Пусть $X = F(G)$ — подгруппа Фиттинга из G. Если каждая силовская подгруппа из G X-проперестановочна в G, то G сверхразрешима.*

Следствие 1.7 (см. [19, теорема 5]). *Если каждая силовская подгруппа из G 1-полуперестановочна в G, то G сверхразрешима.*

Предложение 1.8. *Пусть G — сверхразрешимая группа, $X = F(G)$ и $\pi = \pi(G^{\mathfrak{N}})$. Предположим, что каждая подгруппа из G, которая является либо субнормальной π-подгруппой в G, либо максимальной подгруппой некоторой силовской p-подгруппы из G для некоторого $p \in \pi$, X-проперестановочна в G. Тогда $G^{\mathfrak{N}}$ является холловой подгруппой в G.*

На основе теоремы A и предложения 1.8 получаем также следующий результат.

Теорема B. *В том и только в том случае разрешимая группа G с нечетным порядком является PT-группой, когда все холловы подгруппы и все субнормальные подгруппы из G полностью проперестановочны в G.*

2. Основные леммы

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.1. *Пусть A, B и X — подгруппы из G и N — нормальная подгруппа из G.*

(1) *Если A X-перестановочна с B, то AN/N (XN/N)-перестановочна с BN/N в G/N.*

(2) *Если $N \leq A$ и A/N (XN/N)-перестановочны с BN/N в G/N, то A X-перестановочна с B в G.*

Лемма 2.2. *Пусть H и X — подгруппы из G и N — нормальная подгруппа из G.*

(1) *Если H X-проперестановочна в G, то HN/N (XN/N)-проперестановочна в G/N.*

(2) *Если H проперестановочна в G, то H перестановочна с некоторой силовской p-подгруппой из G для всякого простого числа p, делящего $|G|$.*

(3) *Если $N \leq H$ и H/N (XN/N)-проперестановочны в G/N, то H X-проперестановочна в G.*

(4) *Если H проперестановочна в G, то NH проперестановочна в G.*

(5) *Если H полностью проперестановочна в G, то HN/N полностью проперестановочна в G/N.*

Доказательство. (1) По условию существует такая подгруппа B из G, что $G = N_G(H)B$ и H X-перестановочна со всеми подгруппами из B. Очевидно, что
$$G/N = (N_G(H)N/N)(BN/N) = N_{G/N}(HN/N)(BN/N).$$
Пусть K/N — произвольная подгруппа из BN/N. Тогда $K = (K \cap B)N$, поэтому HN/N (XN/N)-перестановочна с K/N в G/N по лемме 2.1. Значит, HN/N (XN/N)-проперестановочна в G/N.

(2) По условию найдется такая подгруппа B из G, что $G = N_G(H)B$ и H перестановочна со всеми подгруппами из B. По [20, VI, 4.6] существуют такие силовские p-подгруппы P_1, P_2 и P из $N_G(H)$, B и G соответственно, что $P = P_1P_2$. Следовательно, H перестановочна с P.

(3) Пусть B/N — подгруппа из G/N такая, что $G/N = N_{G/N}(H/N)(B/N)$ и H/N (XN/N)-перестановочна с каждой подгруппой из B/N. Тогда $G = N_G(H)B$ и если $A \leq B$, то $AN/N \leq B/N$. Следовательно, H/N (XN/N)-перестановочна с AN/N. Значит, H X-перестановочна с A по лемме 2.1.

(4) По условию найдется такая подгруппа B из G, что $G = N_G(H)B$ и H перестановочна со всеми подгруппами из B. Тогда NH перестановочна со всеми подгруппами из B. С другой стороны, поскольку $N_G(H) \leq N_G(NH)$, то $G = N_G(NH)B$. Следовательно, NH проперестановочна в G.

(5) Пусть $HN/N \leq E/N \leq G/N$. Тогда по условию H проперестановочна в E, поэтому HN проперестановочна в E по (4). Стало быть, утверждение (5) вытекает из утверждения (1).

Нам понадобятся следующие свойства p-сверхразрешимых групп.

Лемма 2.3. (1) *Если $G/\Phi(G)$ p-сверхразрешима, то G p-сверхразрешима* [20, IV, 8.6].

(2) *Пусть N и R — различные минимальные нормальные подгруппы из G. Если G/N и G/R p-сверхразрешимы, то G p-сверхразрешима.*

(3) *Пусть* $A = G/O_{p'}(G)$. *В том и только в том случае* G p*-сверхразрешима, когда* $A/O_p(A)$ *является абелевой группой экспоненты, делящей* $p-1$, p *является наибольшим простым делителем* $|A|$ *и* $F(A) = O_p(A)$ *— нормальная силовская подгруппа в* A.

Доказательство. (2) Следует из G-изоморфизма $NR/N \simeq R$.

(3) Поскольку G является p-сверхразрешимой группой в том и только в том случае, когда $G/O_{p'}(G)$ p-сверхразрешима, не нарушая общности доказательства, можем считать, что $O_{p'}(G) = 1$.

Сначала предположим, что G p-сверхразрешима. Тогда $G/C_G(H/K)$ является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$ для всякого такого главного фактора H/K из G, что $|H/K|$ делится на p. С другой стороны,

$$O_{p',p}(G) = O_p(G) = \bigcap\{C_G(H/K) \mid H/K \text{ является главным фактором в } G \\ \text{и } p \in \pi(H/K)\}$$

по [21, A, 13.2]. Следовательно, $G/O_p(G)$ является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$. Значит, p — наибольший простой делитель $|G|$, и $F(G) = O_p(G)$ — нормальная силовская p-подгруппа в G.

Если, наконец, $G/O_p(G)$ является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$, то всякий главный фактор H/K из G ниже $O_p(G)$ циклический по [21, B, 9.8(d)]. Следовательно, G p-сверхразрешима.

Лемма 2.4 (см. [22]). *Если* G *имеет три нильпотентные подгруппы* A_1, A_2, A_3, *индексы которых* $|G : A_1|$, $|G : A_2|$, $|G : A_3|$ *попарно взаимно просты, то* G *нильпотентна.*

Лемма 2.5. *Пусть* $G = P \rtimes E$, *где* P *— силовская* p*-подгруппа из* G *и* E *— группа с силовской башней. Предположим, что для всякой силовской подгруппы* Q *из* E *найдется такая подгруппа* B *из* P, *что* $P = N_P(Q)B$ *и* Q *перестановочна со всеми подгруппами из* B. *Тогда* G p*-сверхразрешима.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Очевидно, что G разрешима и $|P| > p$. Пусть $p_1 > \dots > p_t$ — множество всех простых делителей $|E|$ и P_i — силовская p_i-подгруппа из E.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда условие леммы справедливо для G/N, поэтому ввиду выбора группы G и леммы 2.3 получаем, что N — единственная минимальная подгруппа из G и $N \nleq \Phi(G)$. Следовательно, $N = C_G(N) = F(G) = P$ по [21, A, 15.2], тем самым E является максимальной подгруппой в G.

Предположим, что $|\pi(E)| > 2$. Тогда $t > 2$. Пусть E_i — холлова p_i'-подгруппа из E. Тогда условие леммы справедливо для PE_i, поэтому PE_i p-сверхразрешима по выбору G. Более того, поскольку $P = C_G(P)$, то $O_{p'}(PE_i) = 1$. Тем самым PE_i сверхразрешима по лемме 2.3(3) и $F(PE_i) = P$. Стало быть, $PE_i/P \simeq E_i$ является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$. Следовательно, E имеет по крайней мере три абелевы подгруппы E_i, E_j и E_k экспоненты, делящей $p-1$, индексы которых $|E : E_i|$, $|E : E_j|$, $|E : E_k|$ попарно взаимно просты. Тогда ввиду леммы 2.4 E нильпотентна и каждая силовская подгруппа из E является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$. Стало быть, E является абелевой группой экспоненты, делящей $p-1$, откуда $|P| = p$. Данное противоречие показывает, что $|\pi(E)| = 2$.

Поскольку E является группой с силовской башней, P_1 нормальна в E, и поэтому $N_G(P_1) \cap P = 1$. Значит, P_1 перестановочна со всеми подгруппами из P. Если $P \leq N_G(P_2)$, то $PP_2 = P \times P_2$. Тем самым в этом случае $P_2 \leq C_G(P) = P$. Полученное противоречие показывает, что $N_G(P_2) \cap P \neq P$, стало быть, существует такая неединичная подгруппа $B < P$, что $P_2B = BP_2$. Следовательно, $BE = B(P_1P_2) = (P_1P_2)B = BE$ — подгруппа в G, что противоречит максимальности подгруппы $E = P_1P_2$.

Лемма 2.6. *Если G является неабелевой группой порядка p^3 и экспоненты p, то некоторая подгруппа из G не проперестановочна в G.*

Доказательство. Пусть L — минимальная подгруппа из G такая, что $L \nleq Z(G)$. Тогда $N_G(L) = L \times Z(G)$ — максимальная подгруппа в G. Пусть x — произвольный элемент из G, не содержащийся в $N_G(L)$. Тогда $|\langle x \rangle| = p$, поэтому L не перестановочна с $\langle x \rangle$. Значит, L не проперестановочна в G.

В частности, хорошо известно следующее наблюдение.

Лемма 2.7. *Если H является субнормальной π-подгруппой в G, то $H \leq O_\pi(G)$.*

Доказательство. Пусть $H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_t = G$, где H_{i-1} нормальна в H_i $(i = 1, \dots, t)$. Тогда по индукции $H \leq O_\pi(H_{t-1}) \leq O_\pi(G)$.

3. Доказательство предложений 1.2, 1.6 и 1.8

Доказательство предложения 1.2. Предположим, что предложение неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть π — множество всех простых делителей $|H|$. По условию существует такая подгруппа B из G, что $G = N_G(H)B$ и H X-перестановочна с каждой подгруппой из B. Пусть $x \in X$ и $HB^x = B^xH$. Тогда $\langle H, B^x \rangle = HB^x$ и $G = N_G(H)B^x$. Поэтому $H^G = H^{N_G(H)B^x} = H^{B^x} \leq HB^x$. Следовательно, $H^G = H(H^G \cap B^x)$.

(1) HN нормальна в G для всякой неединичной нормальной подгруппы N из G. Следовательно, $O_\pi(G) = 1$.

Очевидно, что HN/N является холловой π-подгруппой в G/N и по лемме 2.2(1) условие предложения справедливо для $(G/N, HN/N)$. Следовательно, HN/N нормальна в G ввиду выбора G. Значит, HN нормальна в G. Поскольку $O_\pi(G) \leq H$, в случае, когда $O_\pi(G) \neq 1$, подгруппа $O_\pi(G)H = H$ нормальна в G, что противоречит выбору G. Тем самым получаем (1).

(2) $X = F(G)$ является π'-группой. Поскольку подгруппа $O_\pi(F(G))$ характеристична в $F(G)$, она нормальна в G. Следовательно, $O_\pi(F(G)) \leq O_\pi(G) = 1$ ввиду (1).

(3) $X = O_p(G)$ для некоторого простого числа $p \notin \pi$. Пусть p — простой делитель $|X|$ и P — силовская p-подгруппа из X. Тогда $p \notin \pi$ ввиду (2). Предположим, что $P \neq X$. Тем самым $X = P \times E$, где $E \neq 1$ — холлова p'-подгруппа из X. Так как P и E — характеристические подгруппы в X, обе эти подгруппы нормальны в G. Но тогда HP и HE нормальны в G по (1), поэтому $H = HP \cap HE$ нормальна в G. Полученное противоречие показывает, что $X = P$.

(4) X — элементарная абелева p-группа. Предположим, что это не так. Тогда $\Phi(X) \neq 1$. Поскольку $\Phi(X)$ характеристична в X, то $\Phi(X)$ нормальна в G. Следовательно, ввиду (1) $\Phi(X)H$ нормальна в G. Но $\Phi(X)H$ является

p-разрешимой группой, поэтому любые две холловы π-подгруппы из $\Phi(X)H$ сопряжены в $\Phi(X)H$. Значит, по лемме Фраттини

$$G = (\Phi(X)H)N_G(H) = \Phi(X)N_G(H) = N_G(H),$$

поскольку $\Phi(X) \le \Phi(G)$; противоречие. Следовательно, имеем (4).

(5) $G \ne HB$. Предположим, что $G = HB$. Не нарушая общности доказательства, можем предполагать, что B является минимальным добавлением подгруппы H в G. Сначала предположим, что H перестановочна со всеми подгруппами из B. Тогда условие предложения справедливо для каждой подгруппы из G, содержащей H. Следовательно, ввиду выбора группы G для любой максимальной подгруппы V из B имеем $V \le N_G(H)$. Поэтому V является единственной максимальной подгруппой в B. Следовательно, B является циклической группой порядка q^n для некоторого простого числа q. Очевидно, что q — наименьший простой делитель $|G|$ и в силу (1)

$$(H \cap B)^G = (H \cap B)^{HB} = (H \cap B)^H \le H_G = 1.$$

Следовательно, $H \cap B = 1$. Поэтому $|G : HV| = q$, что влечет нормальность подгруппы HV в G. Тогда H нормальна в G ввиду $V \le N_G(H)$. Данное противоречие показывает, что $HA \ne AH$ для некоторой подгруппы A из B. Значит, $X \ne 1$. Более того, поскольку $G = HB$, $X \le B$ по (3). Стало быть, в силу (4) условие предложения справедливо для (HX, H). Поэтому если $HX \ne G$, то H нормальна (и характеристична) в HX. Следовательно, в данном случае H нормальна в G по (1). Значит, $HX = G$, поэтому из минимальности B получаем, что $B = X$. Тогда $HA = AH$ ввиду (4). Полученное противоречие показывает, что справедливо (5).

(6) H перестановочна с каждой подгруппой из $B \cap O_p(G)$ (утверждение прямо следует из (4)).

(7) $O_p(G) = 1$. Предположим, что $X = O_p(G) \ne 1$. Тогда

(a) $O_p(G)N_G(H) = G$. Ввиду (1) $HO_p(G)$ нормальна в G. С другой стороны, $HO_p(G)$ является p-разрешимой группой, поэтому любые две холловы π-подгруппы из $HO_p(G)$ сопряжены в $HO_p(G)$. Следовательно, по лемме Фраттини $G = (HO_p(G))N_G(H) = O_p(G)N_G(H)$.

(b) $H^G = H(H^G \cap O_p(G))$. В силу (a) имеем

$$H^G = H^{O_p(G)N_G(H)} = H^{O_p(G)} \le HO_p(G),$$

поэтому $H^G = H^G \cap HO_p(G) = H(H^G \cap O_p(G))$.

(c) $H^G \cap O_p(G)$ является подгруппой в B. Ввиду (b) $H^G = H(H^G \cap B^x) = H(H^G \cap O_p(G))$. Следовательно, $H^G \cap O_p(G) \le B$ по (3).

Заключительное противоречие для (7). С учетом (6), 7(b) и 7(c) условие предложения справедливо для H^G. Следовательно, в случае, когда $H^G \ne G$, H является нормальной подгруппой в H^G, что влечет нормальность подгруппы H в G. Значит, $H^G = G$. Тогда

$$G = H^G = H(H^G \cap B^x) = HB^x = HB,$$

что противоречит утверждению (5).

Заключительное противоречие. Поскольку ввиду (7)

$$X = F(G) = O_p(G) = 1,$$

условие предложения справедливо для $H^G = H(H^G \cap B)$. Следовательно, $H^G = G$, откуда $G = HB$, что противоречит утверждению (5). Предложение доказано.

Доказательство предложения 1.6. Предположим, что предложение неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть p — наибольший простой делитель $|G|$ и P — силовская p-подгруппа из G. Тогда P нормальна в G ввиду предложения 1.2.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G. Тогда по лемме 2.2(1) условие предложения справедливо для G/N. Следовательно, G/N сверхразрешима ввиду выбора группы G. Более того, ввиду выбора G и леммы 2.3 N является единственной минимальной нормальной подгруппой в G, $N \leq P$ и $N \nleq \Phi(G)$. Стало быть, $G = N \rtimes M$ для некоторой максимальной подгруппы M из G, $|N| > p$ и $N = C_G(N) = P$ по [21, A, 15.2]. Пусть Q — произвольная силовская подгруппа из M. Тогда Q является силовской подгруппой в G, поэтому по условию существует такая подгруппа B из G, что $G = N_G(Q)B$ и Q X-перестановочна с каждой подгруппой из B. Очевидно, что

$$P = (P \cap N_G(Q))(P \cap B) = N_P(Q)(P \cap B)$$

и Q перестановочна с каждой подгруппой из $P \cap B$, поскольку $X = N = P$. Поэтому G является p-сверхразрешимой группой по лемме 2.5, откуда $|N| = p$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения.

Доказательство предложения 1.8. Предположим, что предложение неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть $D = G^{\mathfrak{N}}$. Тогда найдется такое простое число p, делящее $|D|$, что $P < G_p$ для всякой силовской p-подгруппы P из D, где G_p — силовская p-подгруппа из G. Заметим также, что D нильпотентна, поскольку G сверхразрешима по условию предложения. Поэтому каждая силовская подгруппа Q из D нормальна в G, так как Q характеристична в D.

(1) Условие предложения справедливо для G/N для всякой минимальной нормальной подгруппы N из G. Поскольку G сверхразрешима, N является r-группой для некоторого простого числа r. Пусть E/N — подгруппа из G/N. Предположим, что E/N — субнормальная $\pi((G/N)^{\mathfrak{N}})$-подгруппа из G/N. Тогда E субнормальна в G, и поскольку

$$(G/N)^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}}N/N \simeq G^{\mathfrak{N}}/G^{\mathfrak{N}} \cap N,$$

$\pi((G/N)^{\mathfrak{N}}) \subseteq \pi$. В частности, E/N — π-группа. Следовательно, в случае, когда N — π-группа, E — субнормальная π-подгруппа в G, поэтому E X-проперестановочна в G ввиду условия. Значит, E/N (XN/N)-проперестановочна в G/N по лемме 2.2(1). Также очевидно, что $XN/N \leq F(G/N)$, тем самым E/N $F(G/N)$-проперестановочна в G/N. Предположим теперь, что N не является π-группой. Поскольку E/N — π-группа, $E = N \rtimes V$ для некоторой холловой π-подгруппы V из E. Также очевидно, что $N \nleq D$, поэтому из G-изоморфизма $N \simeq ND/D$ получаем, что $N \leq Z(G)$. Следовательно, $E = N \times V$, таким образом, V — субнормальная π-подгруппа в G. Значит, V X-проперестановочна в G, стало быть, как и выше, снова получаем, что $E/N = NV/N$ $F(G/N)$-проперестановочна в G/N.

Пусть E/N — максимальная подгруппа силовской p-подгруппы P/N из G/N для некоторого $p \in \pi((G/N)^{\mathfrak{N}}) \subseteq \pi$. Тогда найдутся силовская p-подгруппа P_0 из P и максимальная подгруппа V_0 из P_0 такие, что $P_0N/N = P/N$ и $V_0N/N =$

E/N. Очевидно, что P_0 является силовской p-подгруппой в G, поэтому V_0 X-проперестановочна в G, следовательно, $V_0N/N = E/N$ $F(G/N)$-проперестановочна в G/N.

(2) $D = P$ является минимальной нормальной подгруппой в G. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в D. Поскольку G сверхразрешима, N является r-группой для некоторого простого числа r. Ввиду (1) условие предложения справедливо для G/N, поэтому $D/N = (G/N)^{\mathfrak{N}}$ является холловой подгруппой в G по выбору группы G. Поэтому если S — силовская подгруппа из D такая, что $(|S|, r) = 1$, то $S \simeq NS/N$ — силовская подгруппа в G/N, откуда получаем, что S является силовской подгруппой в G. Следовательно, $r = p$, $N = P$ — силовская p-подгруппа в D, и $N = D$ ввиду нормальности в G каждой силовской подгруппы из D.

(3) $O_{p'}(G) = 1$. Предположим, что $O_{p'}(G) \neq 1$, и пусть R — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в $O_{p'}(G)$. Ввиду (2) $R \cap D = 1$. Более того, в силу (1) условие предложения справедливо для G/R. Поэтому $(G/R)^{\mathfrak{N}} = DR/R \simeq D$ является холловой подгруппой в G/R. Но тогда $P = G_p$; противоречие. Следовательно, имеем (3).

(4) G_p является нормальной подгруппой в G. Поскольку G сверхразрешима, силовская r-подгруппа R из G, где r — наибольший простой делитель $|G|$, нормальна в G. Но $O_{p'}(G) = 1$ ввиду (3). Стало быть, $r = p$, поэтому G_p нормальна в G.

(5) $\Phi(G_p) = 1$, поэтому G_p является элементарной абелевой группой.

Предположим, что $\Phi(G_p) \neq 1$, и пусть R — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в $\Phi(G_p)$. Тогда $R \leq \Phi(G)$ ввиду (4). Если $R = D = G^{\mathfrak{N}}$, то G нильпотентна. Тогда $D = 1$; противоречие. Следовательно, $R \neq D$. Очевидно также, что $RD \neq G_p$. Но в силу (1) условие предложения справедливо для G/R, поэтому $DR/R = G_p/N$ ввиду выбора группы G. Значит, $RD = G_p$. Полученное противоречие показывает, что имеем (5).

(6) Каждая подгруппа из G_p нормальна в G. В силу (5) необходимо лишь показать, что каждая максимальная подгруппа V из G_p нормальна в G. Ввиду утверждений (3)–(5) и условия предложения V проперестановочна в G. Поэтому по лемме 2.2(2) для всякого простого числа $q \neq p$ существует такая силовская q-подгруппа Q из G, что $VQ = QV$, тем самым $V = VQ \cap G_p$ нормальна в VQ в силу п. (4). Стало быть, $|G : N_G(V)|$ — p-число. Поэтому V нормальна в G.

Заключительное противоречие. Поскольку ввиду (4) и (5) G_p — элементарная нормальная подгруппа в G, то $G_p = \langle a \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_t \rangle$, где $\langle a_i \rangle$ — минимальная нормальная подгруппа в G, $\langle a \rangle = D$. Пусть $a_1 = aa_2 \dots a_t$. Тогда поскольку $\langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \dots \langle a_t \rangle = 1$, получаем $G_p = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_t \rangle$. Заметим, что $\langle a_1 \rangle$ нормальна в G ввиду (6). Поэтому из G-изоморфизма $D\langle a_1 \rangle / D \simeq \langle a_1 \rangle$ получаем, что $\langle a_1 \rangle \leq Z(G)$. Очевидно также, что $\langle a_2 \rangle \times \dots \times \langle a_t \rangle \leq Z(G)$. Следовательно, $G_p \leq Z(G)$, что влечет нильпотентность группы G; противоречие. Поэтому D является холловой подгруппой в G.

4. Доказательство теорем A и B

Напомним, что G является разрешимой PST-группой в том и только в том случае, когда $G = D \rtimes M$, где $D = G^{\mathfrak{N}}$ — абелева холлова подгруппа нечетного порядка в G и каждый элемент $x \in M$ индуцирует степенной автоморфизм на D [4].

Доказательство теоремы A. Пусть $D = G^{\mathfrak{N}}$. Сначала предположим, что G — разрешимая PST-группа, и пусть H — максимальная подгруппа холловой подгруппы E из G. Пусть V — одна из подгрупп E или H. Покажем, что V проперестановочна в G. Пусть $\pi = \pi(D)$ и S — холлова π'-подгруппа из V. Поскольку G разрешима, не нарушая общности доказательства, можно предполагать, что $S \leq M$. Следовательно, $V = (D \cap V)S$, и S является либо холловой подгруппой в M, либо максимальной подгруппой некоторой холловой подгруппы из M. Поэтому $M \leq N_G(S) \leq N_G(V)$. Значит, $G = DM = DN_G(V)$, тем самым V проперестановочна в G.

Предположим, что всякая холлова подгруппа из G и всякая максимальная подгруппа любой холловой подгруппы из G X-проперестановочны в G. Тогда каждая силовская подгруппа из G и каждая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы из G $F(G)$-проперестановочны в G, поскольку $X = Z_\infty(G) \leq F(G)$. Поэтому ввиду предложений 1.6 и 1.8 G — сверхразрешимая группа и D — нильпотентная холлова подгруппа в G. Так как для всякого главного фактора H/K порядка 2 из G имеем $C_G(H/K) = G$, число $|D|$ нечетное.

Пусть W — дополнение подгруппы D в G. Тогда $W^G = G$. Действительно, поскольку G сверхразрешима, D нильпотентна. Поэтому $G/W^G = DW^G/W^G \simeq D/D \cap W^G$ нильпотентна, откуда $D = G^{\mathfrak{N}} \leq W^G$, тем самым $G = DW = W^G$.

По условию теоремы W X-проперестановочна в G, т. е. $G = N_G(W)B$ для некоторой такой подгруппы B из G, что W X-перестановочна с каждой подгруппой из B. В частности, для некоторого $x \in X$ имеем $WB^x = B^xW$. Тогда $G = N_G(W)B^x$, поэтому

$$G = W^G = W^{N_G(W)B^x} = W^{B^x} \leq WB^x.$$

Следовательно, $G = WB^x = WB$, откуда $D \leq B$.

Пусть H — произвольная подгруппа из D. Тогда для некоторого $x \in X$ имеем $WH^x = H^xW$. Поскольку $X = Z_\infty(G)$, то $G/C_G(X)$ — нильпотентная группа по теореме Холла об устойчивых группах автоморфизмов [23, II, 9.9]. Поэтому $D \leq C_G(X)$, откуда $WH^x = H^xW = HW$. Следовательно, $WH^y = H^yW$ для всех $y \in G$ ввиду нормальности D в G. Но если $WH^y = H^yW$, то $W^{y^{-1}}H = HW^{y^{-1}}$. Следовательно, для каждого $z \in G$ имеем $HW^z = W^zH$, что влечет нормальность подгруппы $H = D \cap HW^z$ в HW^z. Поэтому $W^G = G \leq N_G(H)$, стало быть, каждая подгруппа из D нормальна в G. В частности, D является группой Дедекинда нечетного порядка, поэтому абелева. Значит, G является PST-группой.

Теорема доказана.

Напомним, что G называется *группой Ивасава*, если все подгруппы из G перестановочны. Будем говорить, что G является *обобщенной* группой Ивасава, если каждая подгруппа из G полностью проперестановочна в G.

Пример 4.1. Пусть p — простое число и

$$G = \langle x, y \mid x^{p^{m-1}} = y^p = 1,\ x^p = x^{1+p^{m-2}} \rangle,$$

где $m > 3$, если $p = 2$, и $m > 2$, если p нечетное. Тогда G является обобщенной группой Ивасава, в которой подгруппа $\langle y \rangle$ не перестановочна.

В частности, ввиду [2, 2.1.12] теорема B вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4.2. *В том и только в том случае все холловы подгруппы и все субнормальные подгруппы из G полностью проперестановочны в G, когда G является разрешимой PST-группой, в которой все силовские 2-подгруппы являются обобщенными группами Ивасава и каждая силовская p-подгруппа из G, где p нечетное, является группой Ивасава.*

Доказательство. Пусть $D = G^{\mathfrak{N}}$. Сначала предположим, что G является разрешимой PST-группой, в которой все силовские 2-подгруппы являются обобщенными группами Ивасава и каждая силовская p-подгруппа из G, где p нечетное, является группой Ивасава. Покажем, что все холловы подгруппы и все субнормальные подгруппы из G полностью проперестановочны в G. Заметим, что условие теоремы справедливо для всякой подгруппы E из G. Действительно, ввиду [2, следствие 2.1.9] E является разрешимой PST-группой. С другой стороны, каждая силовская p-подгруппа из E содержится в некоторой силовской подгруппе из G, поэтому является либо группой Ивасава (если $p > 2$), либо обобщенной группой Ивасава (если $p = 2$). Следовательно, условие теоремы справедливо для E. Поэтому ввиду теоремы A нужно лишь показать, что каждая субнормальная подгруппа из G проперестановочна в G. Предположим, что это не так, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть H — субнормальная подгруппа из G такая, что H не проперестановочна в G. Заметим, что если N — нормальная подгруппа в G, то условие теоремы справедливо для G/N. Действительно, G/N является разрешимой PST-группой ввиду [2, следствие 2.0.4]. С другой стороны, для любой силовской p-подгруппы P/N из G/N существует такая силовская p-подгруппа Q из G, что $P/N = QN/N \simeq Q/Q \cap N$. Следовательно, ввиду леммы 2.2(5) P/N является группой Ивасава, если $p > 2$, и обобщенной группой Ивасава, если $p = 2$. Поэтому в случае, когда $H_G \neq 1$, H/H_G проперестановочна в G/H_G ввиду выбора группы G и, следовательно, H проперестановочна в G по лемме 2.2(3); противоречие. Значит, $H_G = 1$. Поскольку каждая подгруппа из D нормальна в G, то $H \cap D = 1$.

Пусть M — дополнение подгруппы D в G такое, что $H \leq M$. Тогда $G/D \simeq M$ нильпотентна. Пусть M_2 — силовская 2-подгруппа из M и H_2 — силовская 2-подгруппа из H. По условию теоремы найдется такая подгруппа B из M_2, что $M_2 = N_{M_2}(H_2)B$ и H_2 перестановочна со всеми подгруппами из B. Поскольку $H \leq M$, то $H = H_2 \times S$, где S — холлова $2'$-подгруппа из H. Пусть $\pi = \pi(S)$ и M_π — холлова π-подгруппа из M. Тогда $G = N_G(H)(DBM_\pi)$.

Покажем, что H перестановочна с любой подгруппой V из DBM_π. Заметим, что S перестановочна со всеми подгруппами из M_π, поскольку каждая силовская подгруппа из M_π является группой Ивасава. Очевидно, что $V = (D \cap V)(V_0)^x$ для некоторой подгруппы $V_0 \leq BM_\pi = B \times M_\pi$ и некоторого $x \in D$. Очевидно также, что $V_0 = X \times Y$, $X \leq B$ и $Y \leq M_\pi$. Следовательно, H перестановочна с V_0, так как $H = H_2S$. Поскольку H является такой субнормальной подгруппой в G, что $H \cap D = 1$, и D является холловой подгруппой в G, ввиду леммы 2.7 $H \leq O_{\phi'}(G)$, где $\phi = \pi(D)$. Тогда $D \leq C_G(H)$. Поэтому

$$HV = H((D \cap V)(V_0)^x) = ((D \cap V)(V_0)^x)H = VH.$$

Значит, H проперестановочна в G. Полученное противоречие завершает доказательство того факта, что каждая субнормальная подгруппа из G полностью проперестановочна.

Предположим, что все холловы подгруппы и все субнормальные подгруппы из G полностью проперестановочны в G. Покажем, что G — разрешимая

PST-группа, причем все силовские 2-подгруппы из G являются обобщенными группами Ивасава и каждая силовская p-подгруппа из G, где p нечетное, является группой Ивасава. Ввиду предложения 1.6 G сверхразрешима. Более того, ввиду предложения 1.8 D является холловой подгруппой в G. Очевидно также, что каждая подгруппа H/D из G/D субнормальна в G/D, поэтому H/D полностью пропереставовочна в G/D по лемме 2.2(5), так как H, очевидно, является субнормальной подгруппой в G. Поэтому необходимо лишь доказать, что каждая силовская p-подгруппа нечетного порядка P/D из G/D является группой Ивасава. Предположим, что это не так. Тогда ввиду [2, 1.4.4] существуют подгруппы A и B из P такие, что B нормальна в A и A/B — неабелева группа порядка p^3 и экспоненты p, что противоречит лемме 2.6. Данное противоречие завершает доказательство теоремы.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Го В., Скиба А. Н., Шам К. П.* X-перестановочные подгруппы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 742–759.
2. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.* Products of finite groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2010.
3. *Zacher G.* I gruppi risolubili finiti, in cui i sottogruppi di compositione coincidono con i sottogrupi quasi-normali // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1964. V. 8, N 37. P. 150–154.
4. *Agrawal R. K.* Finite groups whose subnormal subgroups permute with all Sylow subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. V. 47. P. 77–83.
5. *Robinson D. J. S.* The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation // J. Austral. Math. Soc. 2001. V. 70. P. 143–159.
6. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R.* Sylow permutable subnormal subgroups // J. Algebra. 2002. V. 251. P. 727–738.
7. *Ballester-Bolinches A., Beidleman J. C., Heineken H.* Groups in which Sylow subgroups and subnormal subgroups permute // Illinois J. Math. 2003. V. 47. P. 63-69.
8. *Ballester-Bolinches A., Beidleman J. C., Heineken H.* A local approach to certain classes of finite groups // Comm. Algebra. 2003. V. 31. P. 5931–5942.
9. *Asaad M.* Finite groups in which normality or quasinormality is transitive // Arch. Math. 2004. V. 83, N 4. P. 289–296.
10. *Ballester-Bolinches A., Cossey J.* Totally permutable products of finite groups satisfying SC or PST // Monatsh. Math. 2005. V. 145. P. 89–93.
11. *Al-Sharo K., Beidleman J. C., Heineken H., etc.* Some characterizations of finite groups in which semipermutability is a transitive relation // Forum Math. 2010. V. 22. P. 855–862.
12. *Lukyanenko V. O., Skiba A. N.* Finite groups in which τ-quasinormality is a transitive relation // Rend. Semin. Univ. Padova. 2010. V. 124. P. 231–246.
13. *Beidleman J. C., Ragland M. F.* Subnormal, permutable, and embedded subgroups in finite groups // Central Eur. J. Math. 2011. V. 9, N 4. P. 915–921.
14. *Ballester-Bolinches A., Beidleman J. C., Feldman A. D., Heineken H.* Finite solvable groups in which semi-normality is a transitive relation // Beitr. Algebra Geom. DOI 10.1007/s13366-012-0099-1.
15. *Ballester-Bolinches A., Beidleman J. C., Feldman A. D.* Some new characterizations of solvable PST-groups // Ricerche Mat. DOI 10.1007/s11587-012-0130-8.
16. *Yi X., Skiba A. N.* Some new characterizations of PST-groups // J. Algebra. 2014. V. 399. P. 39–54.
17. *Мазуров В. Д., Хухро Е. И.* Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Новосибирск: Ин-т математики, 2010. Вып. 17.
18. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* X-semipermutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 215. P. 31–41.

19. *Подгорная В. В.* Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп // Вести НАН Беларуси. Сер. физ. мат. науки. 2000. Т. 4. С. 22–25.
20. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
21. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
22. *Kegel O. H.* Zur Struktur mehrfach faktorisierbarer endlicher Gruppen // Math Z. 1965. Bd 87. S. 409–434.
23. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 6 июня 2014 г.

Yi Xiaolan (Йи Сяолан)
Жианский университет науки и технологии, математический факультет,
Ханчжоу 310018, Китай
yxlyixiaolan@163.com