Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 517.54

ЕМКОСТНЫЕ ОЦЕНКИ, ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ И ОБ УСТРАНЕНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ (p, q)–ИСКАЖЕНИЕМ

А. Н. Байкин, С. К. Водопьянов

Аннотация. Отображения с ограниченным весовым (p, q)-искажением представляют собой естественное обобщение известного в литературе класса отображений с ограниченным искажением, входящего в двухиндексную шкалу при $p = q = n$ и отсутствии весовых функций. В случае $n - 1 < q \leq p = n$ отображения с ограниченным (p, q)-искажением исследовались ранее в ряде работ при дополнительном предположении $\mathscr{N}$-свойства Лузина данного отображения. В данной работе изложены первоначальные сведения теории отображений с ограниченным (p, q)-искажением, полученные без дополнительных аналитических предположений. Основу теории составляют новые аналитические свойства перенесенных функций: в частности, доказано, что на образе точек ветвления градиент перенесенной функции равен нулю почти всюду. Выведены оценки на емкости образов конденсаторов для отображений с ограниченным (p, q)-искажением. Получены теоремы типа Лиувилля, теоремы о затирании особенностей для отображений данного класса и дано их применение к классификации многообразий.

Ключевые слова: отображение с ограниченным весовым (p, q)-искажением, емкостная оценка, теорема типа Лиувилля, теорема о затирании особенностей.

Введение

Напомним основные определения и обозначения теории пространств Соболева, необходимые для введения исследуемых в работе объектов.

Определение 1 [1]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное открытое множество, $n \geq 2$. Пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — функция класса $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Предположим, что существует функция $g_i \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такая, что выполнено равенство

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) u(x)\, dx = -\int\limits_{\Omega} \varphi(x) g_i(x)\, dx$$

для всякой тестовой функции $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$. В этом случае говорят, что g_i есть *обобщенная частная производная* $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ функции u: $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$. Набор частных производных функции u называется ее *обобщенным градиентом* $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 14–01–00552) и Совета по грантам Президента Российской Федерации (проект НШ–2263.2014.1).

Пусть $p \geq 1$. Будем говорить, что функция $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ принадлежит (*однородному*) *классу* Соболева $L^1_p(\Omega)$, если она имеет в Ω первые обобщенные производные по всем переменным и модуль $|\nabla u|(x) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \big(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\big)^2}$ ее обобщенного градиента принадлежит $L_p(\Omega)$. Функция $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ принадлежит *классу* Соболева $W^1_p(\Omega)$, если $u \in L_p(\Omega) \cap L^1_p(\Omega)$.

В пространстве $L^1_p(\Omega)$ ($W^1_p(\Omega)$) введем полунорму (норму)

$$\big\|u \mid L^1_p(\Omega)\big\| = ||\nabla u \mid L_p(\Omega)|| \quad \big(\big\|u \mid W^1_p(\Omega)\big\| = ||u \mid L_p(\Omega)|| + ||\nabla u \mid L_p(\Omega)||\big).$$

Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ принадлежит *классу* $W^1_p(\Omega)$ ($W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$), если все координатные функции f принадлежат $W^1_p(\Omega)$ (если f принадлежит $W^1_p(D)$ для любой области $D \Subset \Omega$, т. е. для области, у которой замыкание $\overline{D}$ компактно и $\overline{D} \subset \Omega$).

В 60-е гг. прошлого века Ю. Г. Решетняк заложил основы теории отображений с ограниченным искажением, которую можно рассматривать как естественное обобщение теории аналитических функций на евклидовы пространства произвольной размерности (см. [2]).

Определение 2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Отображение $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если

$$|Df(x)|^n \leq KJ(x,f) \quad \text{для почти всех } x \in \Omega,$$

где K — константа, $J(x,f) = \det Df(x)$. Здесь $|Df(x)|$ — норма матрицы Якоби $Df(x) = \big\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\big\}_{i,j=1,2,\dots,n}$.

Ю. Г. Решетняк установил основные топологические свойства этих отображений, доказав, что всякое непостоянное отображение с ограниченным искажением непрерывно, открыто и дискретно [2]. Заметим, что для $n = 2$ аналитические функции удовлетворяют этому определению при $K = 1$.

Основная задача данной работы — исследовать геометрические и аналитические свойства более общего класса отображений с ограниченным искажением, определяемых ниже.

Далее будем рассматривать неотрицательные измеримые функции (называемые *весовыми*) $\theta, \sigma : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ такие, что $0 < \theta < \infty$ и $0 < \sigma < \infty$ почти всюду. Все весовые функции предполагаются локально суммируемыми, их дополнительные свойства каждый раз оговариваются специально.

Определение 3. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным* (θ,σ)*-весовым* (p,q)*-искажением,* $n - 1 < q \leq p < \infty$, если

1) f непрерывно, открыто и дискретно;

2) f принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$;

3) $J(x,f) \geq 0$ для почти всех $x \in \Omega$;

4) отображение f имеет *конечное искажение*: $Df(x) = 0$, тогда и только тогда, когда $J(x,f) = 0$, за исключением, быть может, множества точек нулевой меры;

5) функция локального (θ,σ)-весового q-искажения:

$$\Omega \ni x \mapsto K_q^{\theta,\sigma}(x,f) = \begin{cases} \frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df|(x)}{\sigma^{\frac{1}{p}}(f(x))J(x,f)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } J(x,f) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{1}$$

принадлежит классу $L_\varkappa(\Omega)$, где $\varkappa$ находится из условия $\frac{1}{\varkappa}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ ($\varkappa=\infty$ при $q=p$).

Введем следующее обозначение: $K^{\theta,\sigma}_{q,p}(f;\Omega)=\left\|K^{\theta,\sigma}_{q}(y,f)\mid L_\varkappa(\Omega)\right\|$.

В случае $\theta(x)\equiv\sigma(y)\equiv 1$ отображение f будем называть просто *отображением с ограниченным* (p,q)*-искажением.*

Заметим, что отображение с ограниченным (n,n)-искажением — это известное в литературе непостоянное отображение с ограниченным искажением (см. определение 2).

Из условия (1) выводим

Предложение 1. *Совокупность точек $x\in\Omega$, в которых знаменатель $\sigma^{\frac{1}{p}}(f(x))J(x,f)^{\frac{1}{p}}$ в формуле (1) равен нулю, с точностью до множества нулевой меры совпадает с множеством точек, в которых $J(x,f)=0$.*

Доказательство. Включение

$$\{x\in\Omega: J(x,f)=0\}\subset\{x\in\Omega:\sigma^{\frac{1}{p}}(f(x))J(x,f)^{\frac{1}{p}}=0\}$$

очевидно.

Для доказательства обратного включения надо лишь убедиться в том, что якобиан $J(x,f)$ обращается в нуль почти всюду на множестве $A=f^{-1}(\{y\in\mathbb{R}^n:\sigma(y)=0\})$, или, другими словами, мера дополнения $A\setminus Z$ равна нулю, где $Z=\{x\in\Omega: J(x,f)=0\}$. Возьмем в формуле (2) замены переменной в интеграле Лебега (формулировка приведена ниже после доказательства предложения) в качестве функции $u(x)$ композицию $\chi(f(x))$, где $\chi(y)$ — характеристическая функция множества $E=\{y\in\mathbb{R}^n:\sigma(y)=0\}$ нулей функции σ. Тогда

$$\int\limits_{A\setminus\Sigma_f}|J(x,f)|\,dx=\int\limits_{\Omega\setminus\Sigma_f}\chi(f(x))|J(x,f)|\,dx=\int\limits_{E}\chi(y)\mathscr{N}(\Omega\setminus\Sigma_f;y,f)\,dy=0,$$

так как мера множества E равна нулю (здесь $\Sigma_f\subset\Omega$ — некоторое множество нулевой меры, $\mathscr{N}(\Omega\setminus\Sigma_f;y,f)=\#\{x\in\Omega\setminus\Sigma_f: f(x)=y\}$ — функция кратности, или индикатриса Банаха, отображения $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$). Отсюда выводим, что $J(x,f)=0$ почти всюду на множестве A. $\square$

Здесь и ниже мы применяем следующий вариант формулы замены переменной.

Предложение 2 [3–6]. *Пусть $A\subset\mathbb{R}^n$ — измеримое множество. Предположим, что отображение $f:A\to\mathbb{R}^n$ имеет аппроксимативные частные производные на A. Тогда существует множество $\Sigma_f\subset A$ нулевой меры такое, что для любой неотрицательной измеримой функции $u:A\to\mathbb{R}$ верна формула замены переменной:*

$$\int\limits_A u(x)|J(x,f)|\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{x\in f^{-1}(y)\cap(A\setminus\Sigma_f)}u(x)\Big)\,dy. \qquad (2)$$

Если f удовлетворяет $\mathscr{N}$-свойству Лузина, то $\Sigma_f=\varnothing$.

Напомним основные факты теории весовых соболевских пространств. Весовое пространство Соболева $L^1_q(\Omega,\theta)$, $1\le q<\infty$, состоит из локально суммируемых функций $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$, имеющих обобщенный градиент и конечную полунорму

$$\left\|f\mid L^1_q(\Omega,\theta)\right\|=\Big(\int\limits_\Omega|\nabla f|^q(x)\theta(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Одно из важнейших свойств отображений с ограниченным (θ,σ)-весовым (p,q)-искажением сформулировано в следующем утверждении. Это утверждение является одной из мотиваций для изучения введенного в данной работе класса отображений.

Заметим, что функция искажения (1) может быть определена для всех $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Напомним, что непрерывное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega)$, если на почти всех линиях L_i, параллельных координатной оси x_i, отображение f абсолютно непрерывно на каждом компактном промежутке $[\alpha,\beta] \subset L_i \cap \Omega$, $i = 1,\dots,n$.

Теорема 1. *Гомеоморфизм $f : (\Omega,\theta) \to (\Omega',\sigma)$ индуцирует ограниченный оператор*

$$f^* : L^1_p(\Omega',\sigma) \cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega') \to L^1_q(\Omega,\theta), \quad 1 \leq q \leq p < \infty, \tag{3}$$

однородных весовых пространств Соболева по правилу $f^*(g) = g \circ f$ тогда и только тогда, когда

1) $f \in \mathrm{ACL}(\Omega)$*;*
2) f *имеет конечное искажение;*
3) *функция локального (θ,σ)-весового q-искажения:*

$$\Omega \ni x \mapsto K_q^{\theta,\sigma}(x,f) = \begin{cases} \frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df|(x)}{\sigma^{\frac{1}{p}}(f(x))|J(x,f)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } J(x,f) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{4}$$

принадлежит классу $L_\varkappa(\Omega)$, где $\varkappa$ находится из условия $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\varkappa = \infty$ при $q = p$).

При этом норма $\|f^*\|$ оператора (3) эквивалентна величине $K^{\theta,\sigma}_{q,p}(f;\Omega) = \big\|K_q^{\theta,\sigma}(\cdot,f) \mid L_\varkappa(\Omega')\big\|$ в следующем смысле:

$$\alpha_{p,q}\big\|K_q^{\theta,\sigma}(\cdot,f) \mid L_\varkappa(\Omega')\big\| \leq \|f^*\| \leq \big\|K_q^{\theta,\sigma}(\cdot,f) \mid L_\varkappa(\Omega')\big\|,$$

где $\alpha_{p,q}$ — положительная постоянная.

Заметим, что в отличие от определения 3 отображение f в теореме 1 может иметь отрицательный якобиан.

Для доказательства теоремы 1 потребуются формулируемые ниже понятия и вспомогательные утверждения.

Для $k \geq 0$, $\delta \in (0,\infty]$ и $A \subset \mathbb{R}^n$ определим величину

$$\mathscr{H}^k_\delta(A) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} S_i)^k : \operatorname{diam} S_i < \delta, A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i\Big\},$$

где $\omega_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$, а нижняя грань берется по всем счетным покрытиям $\{S_i\}$ множества A. Если множество A нельзя покрыть счетной совокупностью множеств указанного вида, то полагаем $\mathscr{H}^k_\delta(A) = \infty$. Предел $\mathscr{H}^k(A) = \lim\limits_{\delta\to 0} \mathscr{H}^k_\delta(A)$ называется *k-мерной мерой Хаусдорфа множества A*. В пространстве $\mathbb{R}^n$ n-мерная мера Хаусдорфа множества $A \subset \mathbb{R}^n$ совпадает с n-мерной мерой Лебега.

Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *аппроксимативно дифференцируемым в точке* $x \in \Omega$, если существует линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^n(\{y \in B(x,r) : |f(y) - f(x) - L(y-x)| > \varepsilon\})}{r^n} = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Известно [3, 7], что всякое отображение класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ аппроксимативно дифференцируемо почти всюду.

Доказательство теоремы 1. Покажем, как из результатов работы [8], обобщающей более раннюю работу [9], получить теорему 1. В [8, утверждение 2.1] доказано, что если оператор (3) ограничен, то $f \in \mathrm{ACL}(\Omega)$. Кроме того, в [8, теорема 2.3] установлено, что для ограниченности оператора (3) однородных весовых пространств Соболева, действующего по правилу $f^*(g) = g \circ f$, где $f : \Omega \to \Omega'$ — произвольное непрерывное отображение, необходимо и достаточно, чтобы f принадлежало $\mathrm{ACL}(\Omega)$, имело конечное искажение и величина

$$\Omega' \ni y \mapsto H_q^{\theta,\sigma}(y, f) = \begin{cases} \sigma^{-\frac{1}{p}}(y)\big(\sum\limits_{x \in f^{-1}(y)\setminus(\Sigma_f \cup Z)} \frac{|Df|^q(x)\theta(x)}{|J(x,f)|}\big)^{\frac{1}{q}}, \\ 0, \quad \text{если } f^{-1}(y) \setminus (\Sigma_f \cup Z) = \varnothing, \end{cases} \tag{5}$$

принадлежала $L_\varkappa(\Omega')$, где $\varkappa$ находится из условия $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\varkappa = \infty$ при $q = p$). При этом $\beta_{p,q}\big\|H_q^{\theta,\sigma}(\cdot, f) \mid L_\varkappa(\Omega')\big\| \le \|f^*\| \le \big\|H_q^{\theta,\sigma}(\cdot, f) \mid L_\varkappa(\Omega')\big\|$, где $\beta_{p,q}$ — положительная константа.

Если f — гомеоморфизм, то выражение для функции искажения $H_q^{\theta,\sigma}(\cdot)$ упрощается, что позволяет сделать в интеграле замену переменной:

$$\begin{aligned} \big\|H_q^{\theta,\sigma}(\cdot, f) \mid L_\varkappa(\Omega')\big\|^\varkappa &= \int\limits_{\Omega'\setminus f(\Sigma_f)} \sigma^{-\frac{\varkappa}{p}}(y) \left(\frac{|Df|^q(f^{-1}(y))\theta(f^{-1}(y))}{|J(f^{-1}(y), f)|}\right)^{\frac{\varkappa}{q}} dy \\ &= \int\limits_{\Omega\setminus Z} \sigma^{-\frac{\varkappa}{p}}(f(x)) \left(\frac{|Df|^q(x)\theta(x)}{|J(x,f)|}\right)^{\frac{\varkappa}{q}} |J(x,f)|\, dx \\ &= \int\limits_{\Omega\setminus Z} \left(\frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df|(x)}{\sigma^{\frac{1}{p}}(f(x))|J(x,f)|^{\frac{1}{p}}}\right)^\varkappa dx = \big\|K_q^{\theta,\sigma}(\cdot, f) \mid L_\varkappa(\Omega')\big\|^\varkappa. \end{aligned} \tag{6}$$

Последнее равенство доказывает теорему.

Определение 4. Говорят, что весовая функция $\theta : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ *удовлетворяет A_q-условию Макенхаупта*, $q \in (1, \infty)$, если

$$\sup_{B \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \theta\right)\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \theta^{\frac{1}{1-q}}\right)^{q-1} < \infty,$$

где верхняя грань берется по всем шарам $B \subset \mathbb{R}^n$.

Если $\theta \in A_q$, то $L^1_q(\Omega, \theta)$ — полное полунормированное пространство и в этом случае гладкие функции плотны в нем относительно соответствующей полунормы [10].

Если в условиях теоремы 1 весовая функция $\sigma : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ ($\theta : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$) удовлетворяет A_p- (A_q)-условию Макенхаупта, то в силу [8] гомеоморфизм $f : (\Omega, \theta) \to (\Omega', \sigma)$ индуцирует ограниченный оператор

$$f^* : L^1_p(\Omega', \sigma) \to L^1_q(\Omega, \theta), \quad 1 < q \le p < \infty, \tag{7}$$

однородных весовых пространств Соболева по правилу $f^*(g) = g \circ f$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $f \in \mathrm{ACL}(\Omega)$,

2) f имеет конечное искажение,

3) величина $H_q^{\theta,\sigma}(\cdot, f)$ принадлежит $L_{\varkappa}(\Omega')$.

В силу равенств (6) последние условия эквивалентны условиям 1 и 2 теоремы 1. Отметим, что условия Макенхаупта на весовую функцию нужны только для того, чтобы распространить по непрерывности оператор (3) до оператора (7) при $1 < q \le p < \infty$.

В теории аналитических функций на комплексной плоскости известна следующая теорема Лиувилля: *ограниченная аналитическая функция на комплексной плоскости является константой.* Ю. Г. Решетняк доказал следующее ее обобщение: *ограниченное отображение с ограниченным искажением постоянно.*

В [11] доказано следующее обобщение теоремы Решетняка.

Теорема 2 [11, следствие 2.12]. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным искажением и $\operatorname{cap}\bigl(\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R}^n); W_n^1(\mathbb{R}^n)\bigr) > 0$. Тогда f — постоянное отображение.*

Сформулируем еще несколько результатов из [11] о свойствах отображений с ограниченным искажением, обобщающих результаты классической теории функций. Первый из них — это теорема о затирании особенностей.

Теорема 3 [11, теорема 2.9]. *Пусть $f : \Omega \setminus F \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным искажением, $F \subset \Omega$ — замкнутое подмножество в Ω такое, что $\operatorname{cap}\bigl(F; W_n^1(\mathbb{R}^n)\bigr) = 0$. Если $\operatorname{cap}\bigl(\mathbb{R}^n \setminus f(\Omega \setminus F); W_n^1(\mathbb{R}^n)\bigr) > 0$, то отображение f продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^n$.*

Здесь $\overline{\mathbb{R}}^n$ — одноточечная компактификация пространства $\mathbb{R}^n$.

Второе утверждение представляет собой обобщение классической теоремы Сохоцкого — Вейерштрасса.

Предложение 3 [11, 2.11]. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непостоянное отображение с ограниченным искажением и b — изолированная точка $\partial\Omega$. Также предположим, что f не имеет предела в точке b. Тогда*

1) *$\operatorname{cap}\bigl(\mathbb{R}^n \setminus f(U \setminus \{b\}); W_n^1(\mathbb{R}^n)\bigr) = 0$ для любой окрестности $U \subset \Omega \cup \{b\}$ точки b;*

2) *существует σ-множество $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ емкости $\operatorname{cap}\bigl(E; W_n^1(\mathbb{R}^n)\bigr) = 0$ такое, что $N(z, f, U \setminus \{b\}) = \infty$ для любой точки $z \in \overline{\mathbb{R}}^n \setminus E$ и любой окрестности $U \subset \Omega \cup \{b\}$ точки b.*

Заметим, что сформулированные выше результаты обобщались для невесовых отображений с ограниченным (p, q)-искажением в [12, 13] при $n - 1 < p = q < n$ и в [14] при $n - 1 < q \le p \le n$ в предположении, что отображение f обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина: образ множества меры нуль имеет нулевую меру.

Одна из целей настоящей работы — привести доказательство этих теорем для одновесовых отображений с ограниченным (p, q)-искажением без предположения об $\mathscr{N}$-свойстве Лузина для отображения f. Метод, позволяющий это сделать, основан на результатах из [15–18].

В § 1 мы исследуем свойства двух перенесенных функций. Произвольной финитной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ сопоставляем две функции, определенные на образе $f(\Omega)$: функцию

$$f(\Omega) \ni y \mapsto v(y) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in f^{-1}(y)} i(x,f)u(x), & y \in f(\operatorname{supp} u), \\ 0, & y \notin f(\operatorname{supp} u), \end{cases}$$

где $i(x,f)$ — локальный индекс отображения f в точке x, и функцию

$$f(\Omega) \ni y \mapsto w(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} u(x), & y \in f(\operatorname{supp} u), \\ 0, & y \notin f(\operatorname{supp} u). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что если f — квазиконформное отображение, то $v(y) = w(y) = u(f^{-1}(y))$ и $v, w \in L^1_n(f(\Omega))$. Известно [11], что если f — отображение с ограниченным искажением, то функции v и w также принадлежат классу Соболева $L^1_n(f(\Omega))$ и L^1_n-нормы функций v и w оцениваются через L^1_n-нормы функции u. Доказательство этого результата в [11] основывается в конечном итоге на классическом подходе к доказательству абсолютной непрерывности на почти всех линиях, установленном Д. Е. Меньшовым [19], и его обобщении в [20], а получение оценки в $L^1_n(f(\Omega))$ для функций v и w существенно базируется на том, что мера образа точек ветвления нулевая [11, 21]. Следует отметить, что этот способ рассуждений и его модификации неоднократно применялись в различных работах (см., например, [12–14, 22–25]) при доказательствах абсолютной непрерывности функций и отображений и оценок на норму Соболева. Заметим, что возникающее в этих и других работах требование на отображение f обладать $\mathscr{N}$-свойством Лузина обусловлено техническим ограничением, а именно необходимостью обеспечения того, чтобы образ множества точек ветвления имел нулевую меру.

В лемме 2 (лемме 8) следующего раздела мы доказываем, что функция v (соответственно w) абсолютно непрерывна в области $f(\Omega)$ на почти всех линиях, параллельных координатным осям, и $\nabla v = 0$ ($\nabla w = 0$) почти всюду на образе точек ветвления при условии, что $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $q > n-1$, — непрерывное открытое и дискретное отображение с конечным искажением: $Df(x) = 0$ почти всюду на множестве $Z = \{x \in \Omega : J(x,f) = 0\}$ нулей якобина. Доказательство лемм 2 и 8 базируется на работах [15–18] и не имеет ничего общего с описанным выше классическим подходом.

Заметим, что при $q \in (n-1, n)$ отображение f может и не обладать $\mathscr{N}$-свойством Лузина (см. примеры в [26]).

Понятно, что обращение в нуль градиентов функций v и w на образе множества точек ветвления приводит к тому, что при оценке их нормы в пространстве Соболева интегрирование по образу точек ветвления можно не учитывать. Это наблюдение позволяет получить для функций v и w оценки их нормы в подходящих классах Соболева и вывести отсюда емкостные неравенства. Полученное в теореме 6 новое соотношение для емкости образа конденсатора применяется затем в § 2, 3 при обобщении теорем 2, 3 и предложения 3 на одновесовые отображения с ограниченным (p,q)-искажением.

Приведем емкостное неравенство теоремы 6 для случая, когда весовые функции θ и σ тождественно равны единице. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным (p,q)-искажением, $n-1 < q \le p < \infty$. Для конденсатора $E = (A, C)$ в Ω, у которого открытое множество A компактно вложено в Ω, а $C \subset A$ — компакт, имеем

$$(\operatorname{cap}_s f(E))^{\frac{1}{s}} \le K^{1,1}_{p,q}(f;\Omega)^{n-1} (\operatorname{cap}_r E)^{\frac{1}{r}}, \tag{8}$$

где $s = \frac{p}{p-(n-1)}$ и $r = \frac{q}{q-(n-1)}$. Если $n \leq q \leq p < \infty$, то $n-1 < s \leq r \leq n$ и получаем возможность изучать локальное поведение отображения f, выбирая подходящие конденсаторы. Например, полагая $E = (B(x,R), B(x,\rho))$, для $\rho < n$ имеем $\operatorname{cap}_r E \leq \alpha|x-y|^{n-r}$ при $|y-x| = \rho \leq R/2$, а $\operatorname{cap}_s f(E) \geq \beta|f(x) - f(y)|^{n-s}$, где $\alpha, \beta > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от f. Отсюда возникает возможность оценить локальное поведение отображения f. Если, наоборот, устремить $R \to \infty$, то возникает возможность доказывать теоремы типа теоремы Лиувилля при условии, что $\operatorname{cap}_r E \to \infty$ при $R \to \infty$.

Далее рассматриваем только случай отображения с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением, т. е. когда $\sigma \equiv 1$. Для таких отображений в правой части формулы (8) вместо емкости $\operatorname{cap}_r E$ конденсатора E будет стоять весовая емкость $\operatorname{cap}_r^\omega E$, где $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$, т. е. весовая функция ω определяется по весовой функции θ и, естественно, предполагается локально суммируемой. Отметим, что в случае $n = 2$ данному условию удовлетворяет, например, весовая функция, удовлетворяющая A_q-условию Макенхаупта. Поэтому весовые функции $\theta \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, для которых веса $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируемы, можно рассматривать как естественное обобщение класса Макенхаупта.

Заметим, что в ряде работ (см. библиографию в [25]) изучаются классы отображений, в которых соотношение вида $\operatorname{cap}_n f(E) \leq K \operatorname{cap}_n^Q E$ для кольцевых конденсаторов $E = (B(x,R), B(x,r)) \Subset \Omega$ и некоторой специальной весовой функции Q берется в качестве определения.

В § 2 мы применяем полученные емкостные оценки для вывода теорем типа теоремы Лиувилля, обобщающих сформулированную выше теорему 2.

В § 3 полученные емкостные оценки применяются для изучения свойств затираемости исследуемого класса отображений. Доказанные результаты обобщают сформулированные выше теорему 3 и предложение 3.

В § 4 полученные емкостные оценки применяются для вывода классифицирующих признаков римановых многообразий. Результаты этого параграфа обобщают результаты работы [13].

Постановку задачи и метод ее решения сформулировал С. К. Водопьянов, § 1, 2 написаны при участии А. Н. Байкина.

§ 1. Емкостные оценки

Далее полагаем весовую функцию σ тождественно равной единице. В данном параграфе доказаны оценки на емкость образов конденсаторов при действии отображений с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением.

1.1. Свойства перенесенных функций. Символом Ω будем обозначать произвольную область (т. е. открытое связное множество) в $\mathbb{R}^n$. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, а область $U \Subset \Omega$ компактно вложена (т. е. область U ограничена и $\overline{U} \subset \Omega$). Для $y \notin f(\partial U)$ обозначим символом $\mu(y, f, U)$ *степень отображения f в точке y относительно U*.

Определим локальный индекс отображения.

Определение 5. Рассмотрим непрерывное открытое и дискретное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ и точку $x \in \Omega$. Тогда существует область V, содержащая точку x, такая, что $\overline{V} \cap f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$. *Локальным индексом отображения f в точке x* называется величина $i(x,f) = \mu(f(x), f, V)$.

Локальный индекс определен корректно и не зависит от рассматриваемой области V (см., например, [2, 11]).

Определение 6. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение. Будем говорить, что f *сохраняет ориентацию*, если $\mu(y, f, D) > 0$ для любой области $D \Subset \Omega$ и для любой точки $y \in f(D) \setminus f(\partial D)$.

Замечание 1. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ с ограниченным (θ, σ)-весовым (p, q)-искажением сохраняет ориентацию, если $q > n - 1$. Действительно, если f — гомеоморфизм, то не может быть такого, чтобы $J(x, f) = 0$ почти всюду в Ω, так как в этом случае $Df(x) = 0$ почти всюду и отображение f не могло бы быть открытым. Следовательно, $J(x, f) > 0$ на множестве положительной меры и существует (см., например, [27, предложение 1]) точка $x \in \Omega$ дифференцируемости отображения f, в которой дифференциал будет невырожденным, а якобиан положительным. Из известных свойств степени отображения вытекает, что f сохраняет ориентацию. Общий случай сводится к предыдущему, так как образ множества точек ветвления замкнут в $f(\Omega)$.

Определение 7. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое и дискретное отображение, сохраняющее ориентацию, Λ — произвольное положительное число. Для произвольной гладкой финитной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ определим *перенесенную функцию* $v = f_* u : f(\Omega) \to \mathbb{R}$ по правилу

$$f(\Omega) \ni y \mapsto v(y) = \begin{cases} \Lambda \sum\limits_{x \in f^{-1}(y)} i(x, f) u(x), & y \in f(\operatorname{supp} u), \\ 0, & y \notin f(\operatorname{supp} u). \end{cases} \tag{9}$$

Здесь Λ — положительная постоянная, которая фиксируется позже.

Так как $\operatorname{supp} u$ — компактное множество в Ω, а отображение f непрерывно и дискретно, сумма в (9) содержит лишь конечное число слагаемых, что обеспечивает корректность определения функции v.

В следующей лемме сформулируем топологические свойства перенесенной функции v, доказательство которых не зависит от дифференциальных свойств отображения f.

Лемма 1 [11, 21]. *Функция v обладает следующими свойствами:*
1) $\operatorname{supp} v = f(\operatorname{supp} u)$ — *компактное множество;*
2) *функция v непрерывна.*

Докажем основные дифференциальные свойства функции v.

Определение 8. Рассмотрим непрерывное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Точка $x \in \Omega$ называется *точкой ветвления* отображения f, если f не является гомеоморфизмом ни в какой окрестности точки x. Совокупность всех точек ветвления отображения f обозначается символом B_f.

Лемма 2. *Предположим, что $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $q > n - 1$, — непрерывное, открытое и дискретное отображение с конечным искажением: $Df(x) = 0$ почти всюду на $Z = \{x \in \Omega : J(x, f) = 0\}$. Тогда перенесенная функция v обладает свойством* ACL *на множестве $f(\Omega)$. Более того, $\nabla v = 0$ почти всюду на множестве $f(B_f)$.*

Для доказательства леммы 2 потребуются формулируемые ниже понятия и вспомогательные утверждения.

Определение 9. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное, открытое и дискретное отображение. Область $D \Subset \Omega$ называется *нормальной*, если $f(\partial D) = \partial f(D)$.

Определение 10. *Нормальной окрестностью точки* $x \in \Omega$ называется нормальная область $U \subset \Omega$ такая, что $U \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$.

Для непрерывного, открытого и дискретного отображения $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ и точки $x \in \Omega$ обозначим символом $U(x, r)$ компоненту связности $f^{-1}(B(f(x), r))$, содержащую x.

Для произвольного множества $A \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ введем обозначение $\mathbf{C}A = \overline{\mathbb{R}}^n \setminus A$, где $\overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$.

Определение 11. Область $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *кольцом*, если $\mathbf{C}D$ имеет ровно две компоненты связности.

Лемма 3 [11, лемма 4.1]. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое и дискретное отображение. Тогда для любой точки $x \in \Omega$ существует число $\sigma_x > 0$ такое, что для всякого $0 < r \le \sigma_x$ верны следующие утверждения:*

1) *$U(x, r)$ — нормальная окрестность точки x;*
2) *$U(x, r) = U(x, \sigma_x) \cap f^{-1}(B(f(x), r))$;*
3) *если $r < \sigma_x$, то $\partial U(x, r) = U(x, \sigma_x) \cap f^{-1}(S(f(x), r))$;*
4) *множества $\mathbf{C}U(x, r)$ и $\mathbf{C}\overline{U}(x, r)$ связны;*
5) *область $U(x, r) \setminus \overline{U}(x, t)$ — кольцо для любых $0 < t < r \le \sigma_x$.*

Замечание 2 [2]. Если x — точка дифференцируемости f и $J(x, f) = 0$, то $x \in B_f$.

Определение 12. Рассмотрим непрерывное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. *Функцией кратности* называется отображение $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto N(y, f, D) = \#\{f^{-1}(y) \cap D\}$, $D \subset \Omega$. Кроме того, введем обозначение $N(f, D) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} N(y, f, D)$.

Лемма 4 [11, предложение 4.10]. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное, открытое и дискретное отображение, сохраняющее ориентацию. Тогда*

1) *если $A \Subset \Omega$ — компакт в области Ω, то $N(f, A) < \infty$;*
2) *если $U \Subset \Omega$ — область, то $N(y, f, U) \le \mu(y, f, U)$ для всех точек $y \in \mathbf{C}f(\partial U)$ и $N(y, f, U) = \mu(y, f, U)$ для всех точек $y \in \mathbf{C}f(\partial U \cup (U \cap B_f))$;*
3) *если U — нормальная область, то $N(f, U) = \mu(x, f, U)$ для всех точек $x \in f(U)$;*
4) *если U — нормальная область, то для всех точек $y \in f(U)$ выполняется $\mu(y, f, U) = \sum\limits_{j=1}^{k} i(x_j, f)$, где $k = N(y, f, U)$, а $\{x_1, \dots, x_k\} = f^{-1}(y) \cap U$;*
5) *для любой точки $x \in \Omega$ существует окрестность V такая, что для любой точки x окрестности $V \subset U$ выполняется $i(x, f) = N(f, U)$;*
6) *точка x принадлежит B_f, если и только если $i(x, f) \ge 2$.*

Отметим, что величину $\mu(f, U) = \mu(x, f, U)$ для всех точек $x \in f(U)$ в утверждении 3 последней теоремы можно определить только для нормальных областей.

Определение 13. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное, открытое и дискретное отображение, сохраняющее ориентацию. Для $x \in \Omega$ рассмотрим кривую $\beta : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ такую, что $\beta(a) = f(x)$. Кривую $\alpha : \Delta_c \to \Omega$, где $c \le b$ и $\Delta_c = [a, c)$ или $\Delta_c = [a, b]$, назовем *поднятием кривой β с началом в точке x*, если $\alpha(a) = x$ и $f \circ \alpha = \beta|_{\Delta_c}$. Кривая α называется *максимальным поднятием кривой β*, если область определения α совпадает с $[a, b]$.

Лемма 5 [11, следствие 3.4]. *Пусть D — нормальная область для непрерывного, открытого и дискретного отображения f, сохраняющего ориентацию, и $y \in f(D)$. Обозначим $f^{-1}(y) \cap D = \{x_1, \dots, x_k\}$, где $k = N(f, D)$, причем каждая точка считается с кратностью, равной ее индексу $i(x, f)$. Если $\beta : [a, b] \to f(D)$ — кривая такая, что $\beta(a) = y$, то*

1) *существуют максимальные поднятия* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ *кривой* β *с началом в точках* x_i, $i = 1, \dots, k$;

2) $\#\{l : a_l(t) = a_j(t)\} = i(a_j(t), f)$ *для всех точек* $t \in [a, b]$ *и любого* $j \in \{1, \dots, k\}$;

3) $f^{-1}(\beta(t)) \cap D = \{\alpha_1(t), \dots, \alpha_k(t)\}$ *для всех* $t \in [a, b]$.

Доказательство леммы 2. Свойство непрерывности функции v сформулировано в лемме 1.

Шаг 1. Достаточно доказать, что v — ACL-функция в некоторой окрестности каждой точки из $\operatorname{supp} v$. Фиксируем $y_0 \in \operatorname{supp} v$. Поскольку отображение f непрерывно и дискретно, а $\operatorname{supp} u$ — компакт, то пересечение $f^{-1}(y_0) \cap \operatorname{supp} u = \{q_1, \dots, q_s\}$ — конечное множество.

По леммам 3 и 4 существует $r_0 > 0$ такое, что нормальные окрестности $U(q_i, f, r_0)$, $i = 1, \dots, s$, не пересекаются. Выберем $r_1 \leq r_0$ так, чтобы $B(y_0, r_1) \cap f\Big(D \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} U(q_i, f, r_0)\Big) = \varnothing$, $D = \operatorname{supp} u$. Тогда компоненты связности $f^{-1}(B(y_0, r_1))$, пересекающие $\operatorname{supp} u$, суть множества $U(q_i, f, r_1)$, $i = 1, \dots, s$. Положим

$$U = \bigcup_{i=1}^{s} U(q_i, f, r_1) = \bigcup_{i=1}^{s} U_i, \quad \text{где } U_i = U(q_i, f, r_1).$$

Введем отображения $\mathrm{Pr}_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{pr}_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, по следующим правилам:

$$\mathrm{Pr}_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad \mathrm{pr}_j(x_1, \dots, x_n) = x_j.$$

С помощью сдвига пространства можно добиться того, что $y_0 = 0$. Выделим j-ю координатную ось в пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим n-мерный куб

$$Q = \{x = (x_1, \dots, x_n) : |x_l| \leq M, \ l = 1, \dots, n\} \subset B(y_0, r_1)$$

и проекцию

$$S = \mathrm{Pr}_j Q = \{(x = (x_1, \dots, x_n) : x_j = 0, \ |x_l| \leq M, \ l = 1, \dots, n, \ l \neq j\}.$$

Для любого $z \in S$ зададим отрезок $|\beta_z| = \{\beta_z(t) = z + te_j \mid t \in [-M, M]\}$.

Рассмотрим множество $f^{-1}(z - Me_j) \cap U_i = \{x_{i,1}, \dots, x_{i,k(i)}\}$. По лемме 5 существуют максимальные поднятия $\alpha_{i,k}$ кривой β_z с началом в точках $x_{i,p}$, $i = 1, \dots, s$, $p = 1, \dots, k(i)$.

Далее фиксируем произвольное $i = 1, \dots, s$.

Заметим, что отображение f имеет частные производные почти всюду. Следовательно, оно аппроксимативно дифференцируемо почти всюду [7]. Тогда в силу известного результата работ (см., например, [7; 3, теорема 3.1.8]) существует борелевское множество $\Sigma \subset U_i$ нулевой $\mathscr{H}^n$-меры, вне которого f обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Пусть $Z = \{x \in U_i \setminus \Sigma : J(x, f) = 0\}$. С точностью до множества нулевой меры множество Z можно считать борелевским. При этом можно сделать так, что $U_i \cap B_f \subset \Sigma \cup Z$, поскольку в точке $x \in B_f$ дифференцируемости отображения f дифференциал вырождается.

Дополнение $U_i \setminus \Sigma$ можно представить в виде счетной совокупности дизъюнктных измеримых множеств F_k, $k \in \mathbb{N}$, таких, что $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} F_k = U_i \setminus \Sigma$ и отображение $f|_{F_k} : F_k \to \mathbb{R}^n$ липшицево для всех $k \in \mathbb{N}$ (см. [7; 3, теорема 3.1.8]). Каждое множество $F_k \setminus Z$ представимо в виде объединения счетной совокупности дизъюнктных измеримых множеств F_{km}, $m \in \mathbb{N}$, таких, что $f|_{F_{km}} : F_{km} \to \mathbb{R}^n$ билипшицево [3, лемма 3.2.2]. В силу теоремы Радемахера [3, теорема 3.1.6] и теоремы Лебега о дифференцировании аддитивной функции [28, 29] множества F_{km} можно считать состоящими только из точек дифференцируемости отображения $f|_{F_{km}} : F_{km} \to \mathbb{R}^n$ и точек плотности 1. Переобозначим $\{F_{km}\}_{k,m\in\mathbb{N}}$ через $\{E_l\}_{l\in\mathbb{N}}$. Таким образом, имеем разложение

$$U_i = \Sigma \cup Z \cup \bigcup_{l\in\mathbb{N}} E_l,$$

в котором все множества правой части дизъюнктны. Ему соответствует разложение в образе $f(U_i) = Z' \cup \Sigma' \cup \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} E'_l$, где $Z' = f(\Sigma)$, $\Sigma' = f(Z)$, $E'_l = f(E_l)$. При этом очевидно имеем $f(U_i \cap B_f) \subset \Sigma' \cup Z'$.

Шаг 2. Так как f — отображение с конечным искажением, $Df(x) = 0$ для почти всех $x \in Z$. Применяя формулу коплощади [3, теорема 3.2.3] для липшицева отображения $\mathrm{Pr}_j \circ f : F_k \to \mathbb{R}^n$ и производя суммирование по $k \in \mathbb{N}$, получаем

$$0 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{Z\cap F_k} \mathscr{J}(x, \mathrm{Pr}_j\circ f)\, dx = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{\mathrm{Pr}_j \circ f(Z\cap F_k)} \mathscr{H}^1(\{x \in Z\cap F_k : \mathrm{Pr}_j\circ f(x) = z\})\, dz$$

$$= \int\limits_{\mathrm{Pr}_j(\Sigma')} \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{H}^1(\{x \in Z \cap F_k : \mathrm{Pr}_j \circ f(x) = z\})\Big)\, dz$$

$$= \int\limits_{\mathrm{Pr}_j(\Sigma')} \mathscr{H}^1(\{x \in Z : \mathrm{Pr}_j \circ f(x) = z\})\, dz = \int\limits_{\mathrm{Pr}_j(\Sigma')} \mathscr{H}^1\left(\bigcup_{p=1}^{k(i)} \alpha^z_{i,p}\big(\mathrm{Pr}_j^{-1}(z) \cap \Sigma'\big)\right) dz$$

$$= \sum_{p=1}^{k(i)} \int\limits_{\mathrm{Pr}_j(\Sigma')} \mathscr{H}^1\big(\alpha^z_{i,p}\big(\mathrm{Pr}_j^{-1}(z) \cap \Sigma'\big)\big)\, dz,$$

так как $f^{-1}(|\beta_z|) = \bigcup\limits_{p=1}^{k(i)} \big|\alpha^z_{i,p}\big|$, где $\alpha^z_{i,p}$ — одно из поднятий кривой β_z в нормальной окрестности U_i. Отсюда выводим, что

$$\mathscr{H}^1\big(\mathrm{pr}_m \circ \alpha^z_{i,p}\big(\mathrm{Pr}_j^{-1}(z) \cap \Sigma'\big)\big) = 0, \quad m = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, k(i), \tag{10}$$

для $\mathscr{H}^{n-1}$-почти любого $z \in \mathrm{Pr}_j(\Sigma')$.

Шаг 3. Для фиксированных $m, j = 1, \dots, n$ рассмотрим измеримое множество

$$T = \big\{(t, z) : t \in \mathrm{pr}_m(\Sigma),\ z \in (\mathrm{Pr}_j \circ f)\big(\mathrm{pr}_m^{-1}(t) \cap \Sigma\big)\big\}$$

$$= \left\{(t, z) : z \in (\mathrm{Pr}_j \circ f)(\Sigma),\ t \in \mathrm{pr}_m\left(\bigcup_{l=1}^{k(i)} \alpha^z_{i,l}\big(\mathrm{Pr}_j^{-1}(z) \cap Z'\big)\right)\right\},$$

$m = 1, \dots, n$. Так как $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $q > n - 1$, для $\mathscr{H}^1$-почти всех $x_j \in \mathrm{pr}_j(\Omega)$ ограничение f на $\mathrm{pr}_j^{-1}(x_j) \cap \Omega$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина относительно $\mathscr{H}^{n-1}$-меры Хаусдорфа: $\mathscr{H}^{n-1}(f(A)) = 0$, если $\mathscr{H}^{n-1}(A) = 0$, где

$A \subset \mathrm{pr}_j^{-1}(x_j) \cap \Omega$ (см. [6, 30]). По теореме Тоннели выводим

$$0 = \int\limits_{\mathrm{pr}_m(\Sigma)} d\mathscr{H}^1(t) \int\limits_{\mathrm{Pr}_j \circ f(\mathrm{pr}_m^{-1}(t)\cap\Sigma)} d\mathscr{H}^{n-1}(z)$$
$$= \int\limits_{\mathrm{Pr}_j \circ f(\Sigma)} d\mathscr{H}^{n-1}(z) \int\limits_{\mathrm{pr}_m\left(\bigcup\limits_{p=1}^{k(i)} \alpha^z_{i,p}(\mathrm{Pr}_j^{-1}(z)\cap Z')\right)} d\mathscr{H}^1(t)$$
$$\geq \int\limits_{\mathrm{Pr}_j \circ f(\Sigma)} d\mathscr{H}^{n-1}(z) \int\limits_{\mathrm{pr}_m(\alpha^z_{i,l}(\mathrm{Pr}_j^{-1}(z)\cap Z'))} d\mathscr{H}^1(t).$$

Следовательно,

$$\mathscr{H}^1\big(\mathrm{pr}_m\big(\alpha^z_{i,l}\big(\mathrm{Pr}_j^{-1}(z)\cap Z'\big)\big)\big) = 0,\ m = 1,\dots,n,\ k = 1,\dots,k(i), \tag{11}$$

для $\mathscr{H}^{n-1}$-почти любого $z \in \mathrm{Pr}_j(Z')$.

Обозначим символом $\psi_l : E'_l \to E_l$ отображение, обратное к $f : E_l \to E'_l$. Заметим, что на пересечении $E'_l \cap (\{z\} \times [-M, M])$ функция $\mathrm{pr}_m \circ \alpha^z_{i,l}$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, так как $\psi_l \in \mathrm{Lip}(E'_l)$. Применяя соотношение между частной производной и полным дифференциалом, выводим

$$\int\limits_{\{z\}\times[-M,M]\setminus(Z'\cup\Sigma')} \Big|\frac{\partial}{\partial y_j}\big(\mathrm{pr}_m \circ \alpha^z_{i,p}\big)(y_j)\Big|\, dy_j$$
$$\leq \sum_{l\in\mathbb{N}} \int\limits_{\{z\}\times[-M,M]\cap E'_l} |D(\mathrm{pr}_m \circ \psi_l)(y_j)|\, dy_j$$
$$\leq C \sum_{l\in\mathbb{N}} \int\limits_{\{z\}\times[-M,M]\cap E'_l} |D\psi_l(y_j)|\, dy_j. \tag{12}$$

С другой стороны, поскольку $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $q > n-1$, имеем

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} \int\limits_{E'_l} |D\psi_l(y)|\, dy \leq \sum_{l\in\mathbb{N}} \int\limits_{E'_l} |\operatorname{adj} Df(\psi_l(y))| J(y, \psi_l)\, dy$$
$$\leq \int\limits_{\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} E_l} |\operatorname{adj} Df(x)|\, dx \leq \int\limits_{U_i} |\operatorname{adj} Df(x)|\, dx < \infty. \tag{13}$$

Из (12) и (13) по теореме Фубини получаем, что

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} \int\limits_{\{z\}\times[-M,M]\cap E'_l} |D\psi_l(y_j)|\, dy_j < \infty \tag{14}$$

для почти всех $z \in S$.

Шаг 4. Фиксируем точку $z \in S$, для которой выполнены условия (10), (11) и (14). Положим

$$A = \{z\} \times [-M, M] \setminus (Z' \cup \Sigma'), \quad B = \{z\} \times [-M, M] \cap (Z' \cup \Sigma')$$

и применим к функции $\mathrm{pr}_m \circ \alpha^z_{i,l}$ следующее утверждение, альтернативное теореме Бари и теореме Банаха — Зарецкого.

Лемма 6 [15, 16]. *Пусть функция $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна и $[a,b] = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, где A и B — борелевские множества такие, что*

1) $\mathscr{H}^1(\psi(B)) = 0$ и функция $\psi : A \to \mathbb{R}$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина на множестве A: $\mathscr{H}^1(\psi(E)) = 0$ для любого множества $E \subset A$ нулевой $\mathscr{H}^1$-меры;

2) $\psi(t)$ имеет аппроксимативную производную $\operatorname{ap}\psi'(t)$ почти всюду на A;

3) $\operatorname{ap}\psi'(t) \in L_1(A)$.

Тогда функция $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна, а ее обычная производная $\psi'(t)$ равна $\operatorname{ap}\psi'(t)$ для почти всех $t \in A$ и $\psi'(t) = 0$ для почти всех $t \in B$.

Таким образом, функция $\mathrm{pr}_m \circ \alpha^z_{i,l}$, а следовательно, и $\alpha^z_{i,l}$ *абсолютно непрерывны* на $\{z\} \times [-M, M]$, при этом

$$\frac{d}{dt}\alpha^z_{i,l}(t) = 0 \quad \text{для почти всех } t \in (\{z\} \times [-M, M]) \cap (Z' \cup \Sigma'). \tag{15}$$

Для доказательства того, что $v \in \mathrm{ACL}$, достаточно показать, что v абсолютно непрерывна на отрезке $|\beta_z|$ для почти всех $z \in S$. Применяя последовательно пп. 1–3 леммы 5, убеждаемся, что в каждой точке $x = \alpha^z_{i,l}(t) \in f^{-1}(|\beta_z|)$ пересекается ровно $i(x,f)$ кривых $\alpha^z_{i,l}(t)$. Поэтому для $y \in \beta_z$ имеем

$$v(y) = \Lambda \sum_{x \in f^{-1}(y)} i(x,f)u(x) = \Lambda \sum_{i=1}^{s} \sum_{l=1}^{k(i)} u \circ \alpha^z_{i,l} \circ \beta_z^{-1}(y). \tag{16}$$

Так как для почти всех z кривая $\alpha^z_{i,l} \circ \beta_z^{-1}(y)$ абсолютно непрерывна относительно $y \in \beta_z$, то и функция $v(y)$ абсолютно непрерывна относительно $y \in \beta_z$ для почти всех z.

Более того, ввиду $f(B_f) \subset \Sigma' \cup Z'$ из (15) имеем $\nabla v(y) = 0$ для почти всех $y \in f(B_f)$. $\square$

Замечание 3. Абсолютная непрерывность функции $\alpha^z_{i,l}$ в доказательстве леммы 2 при $q = p = n$, $\theta \equiv 1$ другим методом, использующим результаты работы [31], установлена в [20].

Изложенную конструкцию можно применять для описания свойств более широкого класса перенесенных объектов. Рассмотрим, например, наряду с (9) другую перенесенную функцию.

Определение 14. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое и дискретное отображение, сохраняющее ориентацию. Для произвольной гладкой финитной функции $u \in C_0^1(\Omega)$ определим *перенесенную функцию* $w : f(\Omega) \to \mathbb{R}$ по правилу

$$f(\Omega) \ni y \mapsto w(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} u(x), & y \in f(\operatorname{supp} u), \\ 0, & y \notin f(\operatorname{supp} u). \end{cases} \tag{17}$$

В следующей лемме сформулирован аналог леммы 1 о топологических свойствах перенесенной функции w, доказательство которых не зависит от дифференциальных свойств отображения f.

Лемма 7 [31]. *Функция w обладает следующими свойствами:*

1) $\operatorname{supp} w = f(\operatorname{supp} u)$ — *компактное множество;*

2) *она непрерывна.*

Основные дифференциальные свойства функции w сформулированы в следующем утверждении.

Лемма 8. *Предположим, что $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $q > n-1$, — непрерывное, открытое и дискретное отображение с конечным искажением: $Df(x) = 0$ почти всюду на $Z = \{x \in \Omega : J(x,f) = 0\}$. Тогда перенесенная функция w обладает свойством* ACL *на множестве $f(\Omega)$. Более того, $\nabla w = 0$ почти всюду на множестве $f(B_f)$.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения основано на рассуждениях леммы 7 и представлении (16), с помощью которого значение функции w для $y \in \beta_z$ можно записать следующим образом:

$$w(y) = \max_{x \in f^{-1}(y)} u(x) = \max_{i,l} u \circ \alpha^z_{i,l} \circ \beta^{-1}(y). \quad \Box \tag{18}$$

Так как для почти всех $z \in S$ кривая $\beta_z \ni y \mapsto \alpha^z_{i,l} \circ \beta^{-1}(y)$ абсолютно непрерывна для всех значений i и l, функция w абсолютно непрерывна на почти всех линиях. Кроме того, $\nabla w = 0$ почти всюду на множестве $f(B_f)$.

1.2. Оценки для перенесенных функций. Сформулируем одно из основных свойств (p,q)-квазиконформных гомеоморфизмов.

Лемма 9. *Пусть $f : \Omega \to \Omega'$ — гомеоморфизм с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением, $n-1 < q \le p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Тогда обратный гомеоморфизм f^{-1} индуцирует по правилу замены переменных ограниченный оператор*

$$(f^{-1})^* : L^1_r(\Omega,\omega) \cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega) \to L^1_s(\Omega'),$$

где $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$, $r = \frac{q}{q-(n-1)}$, $s = \frac{p}{p-(n-1)}$. Более того, $\|(f^{-1})^*\| \le \bigl(K^{\theta,1}_{q,p}(f;\Omega)\bigr)^{n-1}$.

Доказательство. В силу [17, теорема 4] отображение f^{-1} принадлежит $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega')$ и имеет конечное искажение. Для доказательства леммы применим теорему 1: остается проверить, что $K^{1,\omega}_s(\cdot, f^{-1}) \in L_{\varkappa'}(\Omega')$, где $\frac{1}{\varkappa'} = \frac{1}{s} - \frac{1}{r}$. Используя формулу замены переменной, а также учитывая соотношения

$$Df^{-1}(y) = \frac{\operatorname{adj} Df(f^{-1}(y))}{J(f^{-1}(y), f)}, \quad |\operatorname{adj} Df|(x) \le |Df|^{n-1}(x)$$

и $\varkappa'(n-1) = \varkappa$, выводим

$$\begin{aligned}
\bigl\|K^{1,\omega}_s(\cdot, f^{-1}) \mid L_{\varkappa'}(\Omega')\bigr\|^{\varkappa'} &= \int\limits_{\Omega' \setminus (\Sigma' \cup Z')} \biggl(\omega^{-\frac{1}{r}}(f^{-1}(y)) \frac{|Df^{-1}|(y)}{|J(y,f^{-1})|^{\frac{1}{r}}}\biggr)^{\varkappa'} dy \\
&\le \int\limits_{\Omega \setminus Z} \biggl(\omega^{-\frac{1}{r}}(x) \frac{|Df|^{n-1}(x)}{|J(x,f)|^{1-\frac{1}{r}}}\biggr)^{\varkappa'} |J(x,f)|\, dx \\
&= \int\limits_{\Omega \setminus (\Sigma \cup Z)} \biggl(\frac{|Df|(x)\omega^{-\frac{1}{r(n-1)}}(x)}{|J(x,f)|^{\frac{r-1}{r(n-1)}}}\biggr)^{\varkappa'(n-1)} |J(x,f)|\, dx \\
&= \int\limits_{\Omega \setminus (\Sigma \cup Z)} \biggl(\frac{|Df|(x)\theta^{\frac{1}{q}}(x)}{|J(x,f)|^{\frac{1}{p}}}\biggr)^{\varkappa} dx = \bigl(K^{\theta,1}_{q,p}(f;\Omega)\bigr)^{\varkappa'(n-1)} < \infty. \quad \Box
\end{aligned}$$

Лемма 10. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (p, q)-искажением, $n-1 < q \le p < \infty$, и $y_0 \in \operatorname{supp} v \setminus f(\operatorname{supp} u \cap B_f)$. Тогда существует окрестность V_0 точки y_0 такая, что для любой связной окрестности $V \subset V_0$ точки y_0 выполнено*

1) *$V \cap f(\operatorname{supp} u \cap B_f) = \varnothing$;*

2) *число компонент связности $f^{-1}(V)$, пересекающих $\operatorname{supp} u$, конечно; обозначим их через $D_1, \dots, D_k$;*

3) *сужение $f|_{D_i} = f_i : D_i \to V$, $i = 1, \dots, k$, — гомеоморфизм; при этом обратный гомеоморфизм $g_i = f_i^{-1} : V \to D_i$ индуцирует ограниченный оператор $(g_i)^* : L^1_r(D_i, \omega) \to L^1_s(V)$, где $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}$, $r = \frac{q}{q-(n-1)}$, $s = \frac{p}{p-(n-1)}$.*

Доказательство. В силу дискретности отображения f выберем окрестности $U_1, U_2, \dots, U_k$ точек $f^{-1}(y_0) \cap \operatorname{supp} u$ такие, что $\overline{U}_i \Subset \Omega$ и сужение $f|_{\overline{U}_i}$ инъективно.

Покажем, что

$$V_0 = \left(\bigcap_{i=1}^{k} f(U_i) \right) \setminus f\left(\operatorname{supp} u \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i \right)$$

— требуемая окрестность.

Пусть $V \subset V_0$ — связная окрестность точки x_0. Утверждение п. 1 следует из того, что U_i не пересекает B_f для всех $i = 1, \dots, k$.

Если компонента связности D прообраза $f^{-1}(V)$ пересекает $\operatorname{supp} u$, то она пересекает одну из окрестностей U_i. В силу инъективности сужения $f|_{\overline{U}_i}$ имеем $V_0 \cap f(\partial U_i) = \varnothing$, а значит, $D \cap \partial U_i = \varnothing$. Отсюда получаем, что $D \subset U_i$. Кроме того, ровно одна D лежит в U_i, $i = 1, \dots, k$, откуда следуют утверждения п. 2. Применяя лемму 9 к $g_i : V \to D_i$, получаем п. 3. $\square$

Теорема 4. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ и $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (p, q)-искажением, $n - 1 < q \le p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Для перенесенной функции $v = f_* u : f(\Omega) \to \mathbb{R}$ и любой области $D \Subset \Omega$ такой, что $\operatorname{supp} u \subset D$, верна оценка*

$$\bigl\| f_* u \mid L^1_s\bigl(f(D)\bigr) \bigr\| \le \Lambda N(f, D)^{\frac{s-1}{s}} \bigl(K^{\theta,1}_{q,p}(f; D) \bigr)^{n-1} \bigl\| u \mid L^1_r(D, \omega) \bigr\|, \qquad (19)$$

где $r = \frac{q}{q-(n-1)}$, $s = \frac{p}{p-(n-1)}$, $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$.

Доказательство. Пусть $u \in C^1_0(\Omega)$ — произвольная гладкая финитная функция. Построим по ней перенесенную функцию (9): $v = f_* u$. Заметим, что $\nabla v = 0$ вне $\operatorname{supp} v$, а также $\nabla v = 0$ на $f(B_f)$ почти всюду в силу леммы 2. Поэтому интегрирование по $f(D)$ в левой части (19) сводится к интегрированию по $(f(D) \cap \operatorname{supp} v) \setminus f(\operatorname{supp} u \cap B_f)$.

Для произвольной точки $y \in \operatorname{supp} v \setminus f(\operatorname{supp} u \cap B_f)$ найдем окрестность $V_0(y)$, определенную в лемме 10. Рассмотрим семейство шаров

$$\{ B(y, r) \mid B(y, r) \subset V_0(y),\ y \in (f(D) \cap \operatorname{supp} v) \setminus f(\operatorname{supp} u \cap B_f) \},$$

образующее покрытие Витали множества $(f(D) \cap \operatorname{supp} v) \setminus f(\operatorname{supp} u \cap B_f)$. Тогда по теореме Витали можно выделить не более чем счетное семейство $\{B_1, B_2, \dots\}$

дизъюнктных шаров, покрывающее $(f(D)\cap \operatorname{supp} v)\setminus f(\operatorname{supp} u\cap B_f)$ с точностью до множества нулевой меры. Следовательно,

$$\int\limits_{f(D)} |\nabla v|^s dz = \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{B_j} |\nabla v|^s\, dz, \tag{20}$$

где $s=\frac{p}{p-(n-1)}$.

Рассмотрим отдельный шар B_j, и пусть $g_i : B_j \to W_i$, $i=1,\dots,k(j)$, обозначает обратное отображение, определенное свойством 3 леммы 10. По определению перенесенной функции v для точек $y\in B_j$ выводим

$$v(y)=\sum_{i=1}^{k(j)} u(g_i(y)) = \sum_{i=1}^{k(j)} g_i^*(u)(y).$$

На основании вышесказанного, применяя лемму 9 при $p=q$, с учетом $k(j)\le N(f,D)$ получаем

$$\begin{aligned}\bigl\|v \mid L^1_s(B_j)\bigr\|^s = \int\limits_{B_j} |\nabla v|^s(y)\,dy \le \Lambda^s \int\limits_{B_j}\Biggl(\sum_{i=1}^{k(j)} |\nabla(g_i^*(u))|(y)\Biggr)^s dy \\ = \Lambda^s k(j)^{s-1}\sum_{i=1}^{k(j)}\int\limits_{B_j} |\nabla(g_i^*(u))|^s(y)\,dy \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\le \Lambda^s N(f,D)^{s-1}\sum_{i=1}^{k(j)} K^{\theta,1}_{p,p}(f;g_i(B_j))^{s(n-1)}\int\limits_{g_i(B_j)} |\nabla u|^s(x)\omega(x)\,dx \\ \le \Lambda^s N(f,D)^{s-1} K^{\theta,1}_{p,p}(f;f^{-1}(B_j))^{s(n-1)}\int\limits_{f^{-1}(B_j)} |\nabla u|^s(x)\omega(x)\,dx.\end{aligned} \tag{22}$$

Если $q<p$, то, применяя дважды неравенство Гёльдера, из (21) с учетом леммы 9 последовательно выводим

$$\begin{aligned}&\Biggl(\int\limits_{B_j} |\nabla v|^s\,dy\Biggr)^{\frac1s} \\ &\le \Lambda N(f,D)^{\frac{s-1}{s}}\Biggl[\sum_{i=1}^{k(j)}\Biggl(\int\limits_{g_i(B_j)} K^{\theta,1}_q(x;f)^{\frac{pq}{p-q}}\,dx\Biggr)^{\frac{r-s}{r}}\Biggl(\int\limits_{g_i(B_j)} |\nabla u|^r(x)\omega(x)\,dx\Biggr)^{\frac sr}\Biggr]^{\frac1s} \\ &\le \Lambda N(f,D)^{\frac{s-1}{s}}\Biggl[\Biggl(\sum_{i=1}^{k(j)}\int\limits_{g_i(B_j)} K^{\theta,1}_q(x;f)^{\frac{pq}{p-q}}\,dx\Biggr)^{\frac{r-s}{r}} \\ &\qquad\times\Biggl(\sum_{i=1}^{k(j)}\int\limits_{g_i(B_j)} |\nabla u|^r(x)\omega(x)\,dx\Biggr)^{\frac sr}\Biggr]^{\frac1s} \\ &\le \Lambda N(f,D)^{\frac{s-1}{s}}\bigl\|K^{\theta,1}_q(\cdot;f)\mid L_{\frac{pq}{p-q}}(f^{-1}(B_j))\bigr\|^{n-1}\Biggl(\int\limits_{f^{-1}(B_j)} |\nabla u|^r(x)\omega(x)\,dx\Biggr)^{\frac1r},\end{aligned} \tag{23}$$

где $\frac{rs}{r-s} = \frac{pq}{(p-q)(n-1)}$.

Из (20), (22) и (23) имеем

$$\int\limits_{f(D)} |\nabla v|^s(y)\,dy = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{B_j} |\nabla v|^s\,dz$$

$$\leq \Lambda^s N(f,D)^{s-1} \sum_{j=1}^{\infty} \big\| K_q^{\theta,1}(\cdot;f) \mid L_{\frac{pq}{p-q}}(f^{-1}(B_j))\big\|^{s(n-1)} \Bigg(\int\limits_{f^{-1}(B_j)} |\nabla u|^r(x)\omega(x)\,dx\Bigg)^{\frac{s}{r}}.$$

Применяя неравенство Гёльдера, окончательно получаем

$$\int\limits_{f(D)} |\nabla v|^s\,dz \leq \Lambda^s (N(f,D))^{s-1}$$

$$\times \Bigg(\sum_{j=1}^{\infty} \big\| K_q^{\theta,1}(\cdot;f) \mid L_{\frac{pq}{p-q}}(f^{-1}(B_j))\big\|^{\frac{rs}{r-s}(n-1)}\Bigg)^{\frac{r-s}{r}} \Bigg(\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{f^{-1}(B_j)} |\nabla u|^r \omega(x)\,dx\Bigg)^{\frac{s}{r}}$$

$$= \Lambda^s (N(f,D))^{s-1} \Bigg(\sum_{j=1}^{\infty} \big\| K_q^{\theta,1}(\cdot;f) \mid L_{\frac{pq}{p-q}}(f^{-1}(B_j))\big\|^{\frac{pq}{p-q}}\Bigg)^{\frac{r-s}{r}}$$

$$\times \Bigg(\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{f^{-1}(B_j)} |\nabla u|^r \omega(x)\,dx\Bigg)^{\frac{s}{r}} \leq \Lambda^s (N(f,D))^{s-1}$$

$$\times \Bigg\| K_q^{\theta,1}(\cdot;f) \mid L_{\frac{pq}{p-q}}\Bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(B_j)\Bigg)\Bigg\|^{\frac{pq}{p-q}\frac{r-s}{r}} \Bigg(\int\limits_{\bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(B_j)} |\nabla u|^r \omega(x)\,dx\Bigg)^{\frac{s}{r}}$$

$$\leq \Lambda^s (N(f,D))^{s-1} \big(K_{q,p}^{\theta,1}(f;D)\big)^{s(n-1)} \Bigg(\int\limits_D |\nabla u|^r \omega(x)\,dx\Bigg)^{\frac{s}{r}}. \quad \square$$

Замечание 4. Теорема 4 при $q = p = n$, $\theta \equiv 1$ другим способом доказана в [21, 32].

Теорема 5. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ и $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением, $n-1 < q \leq p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Для перенесенной функции $w : f(\Omega) \to \mathbb{R}$ (заданной формулой (17)) и для любой области $D \Subset \Omega$ такой, что $\operatorname{supp} u \subset D$, верна оценка*

$$\Bigg(\int\limits_{f(D)} |\nabla w|^s\,dy\Bigg)^{\frac{1}{s}} \leq K_{q,p}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1} \Bigg(\int\limits_D |\nabla u|^r \omega(x)\,dx\Bigg)^{\frac{1}{r}}, \tag{24}$$

где $s = \frac{p}{p-(n-1)}$, $r = \frac{q}{q-(n-1)}$, $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}$.

Доказательство. Приведем основные отличия сравнительно с доказательством теоремы 4. Отметим прежде всего, что теперь мы базируемся на леммах 7 и 8, в которых сформулированы необходимые дифференциальные свойства функции w.

Докажем соотношение (24). Заметим, что $\nabla w = 0$ вне $\operatorname{supp} w$, а также $\nabla w = 0$ на $f(B_f)$ почти всюду в силу леммы 8. Поэтому ниже интегрирование по $f(D)$ сводится к интегрированию по $(f(D) \cap \operatorname{supp} w) \setminus f(\operatorname{supp} u \cap B_f)$.

Для произвольной точки $x \in \operatorname{supp} w \setminus f(\operatorname{supp} u \cap B_f)$ найдем окрестность $V_0(x)$, определенную в лемме 10. Рассмотрим семейство шаров $\{B(z,r) : B(z,r) \subset V_0(x),\ z \in (f(D) \cap \operatorname{supp} w) \setminus f(\operatorname{supp} u \cap B_f)\}$, образующее покрытие Витали множества $(f(D) \cap \operatorname{supp} w) \setminus f(\operatorname{supp} u \cap B_f)$. Тогда по теореме Витали можно выделить счетное семейство дизъюнктных шаров $\{B_1, B_2, \dots\}$, покрывающее $(f(D) \cap \operatorname{supp} w) \setminus f(\operatorname{supp} u \cap B_f)$ с точностью до множества нулевой меры. Отсюда получаем

$$\int\limits_{f(D)} |\nabla w|^s dy = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{B_j} |\nabla w|^s dy,$$

где $s = \frac{p}{p-(n-1)}$.

Рассмотрим отдельный шар B_j, и пусть $g_i : B_j \to W_i$, $i = 1, \dots, k(j)$, обозначает обратное отображение, определенное свойством 3 леммы 10. Используя ограниченность оператора $(g_i)^* : L^1_r(W_i) \to L^1_s(B_j)$, получаем

$$\Big(\int\limits_{B_j} |\nabla w|^s \, dy\Big)^{\frac{1}{s}}$$
$$\leq \begin{cases} K_p^{\theta,1}(f; f^{-1}(B_j))^{n-1} \big(\int\limits_{f^{-1}(B_j)} |\nabla u|^r \omega(x) \, dx\big)^{\frac{1}{r}} & \text{при } \ q = p, \\ \big\| K_q^{\theta,1}(x; f) \mid L_\varkappa(f^{-1}(B_j)) \big\|^{n-1} \big(\int\limits_{f^{-1}(B_j)} |\nabla u|^r \omega(x) \, dx\big)^{\frac{1}{r}} & \text{при } q < p. \end{cases}$$

Также можно предполагать, что $W_i \Subset D$. Поэтому

$$\int\limits_{f(D)} |\nabla w|^s \, dy = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{B_j} |\nabla w|^s \, dy$$
$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \big\| K_q^{\theta,1}(x; f) \mid L_\varkappa(f^{-1}(B_j)) \big\|^{s(n-1)} \Big(\int\limits_{f^{-1}(B_j)} |\nabla u|^r \omega(x) \, dx \Big)^{\frac{s}{r}}.$$

Применяя неравенство Гёльдера при $q < p$, имеем

$$\int\limits_{f(D)} |\nabla w|^s \, dy$$
$$\leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \big\| K_q^{\theta,1}(x; f) \mid L_\varkappa((f^{-1}(B_j)) \big\|^{\frac{rs}{r-s}(n-1)} \Big)^{\frac{r-s}{s}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{f^{-1}(B_j)} |\nabla u|^r(x) \omega(x) \, dx \Big)^{\frac{s}{r}}$$
$$\leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \big\| K_q^{\theta,1}(x; f) \mid L_\varkappa((f^{-1}(B_j)) \big\|^{\frac{pq}{p-q}} \Big)^{\frac{r-s}{r}} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{f^{-1}(B_j)} |\nabla u|^r(x) \omega(x) \, dx \Big)^{\frac{s}{r}}$$
$$\leq \big\| K_q^{\theta,1}(x; f) \mid L_\varkappa(D \setminus B_f) \big\|^{\frac{pq}{p-q} \frac{r-s}{r}} \Big(\int\limits_{D \setminus B_f} |\nabla u|^r(x) \omega(x) \, dx \Big)^{\frac{s}{r}}$$

$$\leq \left(K_{q,p}^{\theta,1}(f;D)\right)^{s(n-1)}\biggl(\int\limits_D |\nabla u|^r(x)\omega(x)\,dx\biggr)^{\frac{s}{r}}.$$

Заметим, что результат предыдущих неравенств справедлив также и при $q = p$. $\square$

Замечание 5. Теорема 5 при $q = p = n$, $\theta \equiv 1$ другим способом доказана в [31].

1.3. Оценки для емкости. В весовом пространстве Соболева можно определить емкость конденсатора следующим образом.

Определение 15. Упорядоченная тройка $E = (F_0, F_1; D)$ непустых множеств, где D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а F_1 и F_0 — замкнутые подмножества $\overline{D}$, называется *конденсатором в* $D \subset \mathbb{R}^n$. Величина

$$\operatorname{cap}_p^{\omega}(E) = \operatorname{cap}_p^{\omega}(F_0, F_1; D) = \inf \int\limits_D |\nabla v|^p(x)\omega(x)\,dx,$$

где инфимум берется по всем функциям $v \in C(D) \cap W_\infty^1(D) \cap L_p^1(D, \omega)$ таким, что $v \geq 1$ $(v \leq 0)$ в некоторой окрестности множества F_1 (F_0), называется *ω-весовой p-емкостью конденсатора* $E = (F_0, F_1; D)$.

Если U — открытое множество, C — компакт в U, то конденсатор $E = (\partial U, C; U)$ будем обозначать символом $E = (U, C)$.

Если $\omega \equiv 1$, то допустимыми для определения емкости мы рассматриваем функции из более широкого класса: $v \in C(D) \cap L_p^1(D)$.

Из теоремы 4 выводим

Следствие 1. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (p, q)-искажением, $n - 1 < q \leq p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Если*

1) $E = (A, C)$ — конденсатор в Ω такой, что $A \Subset \Omega$, C — компакт в A, то

$$\left(\operatorname{cap}_s f(E)\right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{\left(K_{q,p}^{\theta,1}(f;\Omega)\right)^{n-1}(N(f,A))^{(s-1)/s}}{M(f,C)}\left(\operatorname{cap}_r^{\omega} E\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{25}$$

где $s = \frac{p}{p-(n-1)}$, $r = \frac{q}{q-(n-1)}$ и $M(f, C) = \inf\limits_{x\in f(C)} \sum\limits_{z\in f^{-1}(x)\cap C} i(z, f)$, $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$;

2) $E = (A, C)$ — конденсатор в Ω такой, что $A \Subset \Omega$ — нормальная область, а C — компакт в A, то

$$\left(\operatorname{cap}_s f(E)\right)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{\left(K_{q,p}^{\theta,1}(f;\Omega)\right)^{n-1}}{(N(f,A))^{\frac{1}{s}}}\left(\operatorname{cap}_r^{\omega} E\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{26}$$

где $s = \frac{p}{p-(n-1)}$, $r = \frac{q}{q-(n-1)}$, и $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$.

Доказательство. 1. В силу леммы 4 имеем $N(f, A) < \infty$. В определении перенесенной функции положим $\Lambda = \frac{1}{M(f,C)}$. Возьмем произвольную допустимую функцию u для конденсатора $E = (A, C)$. Тогда для перенесенной функции имеем $v(x) \geq 1$ в точках $x \in f(C)$. Действительно, пусть $x \in f(C)$ и $f^{-1}(x) \cap C = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$. Тогда

$$v(x) = \frac{1}{M(f,C)} \sum_{z \in f^{-1}(x)} i(z,f)u(z) \geq \frac{1}{M(f,C)} \sum_{l=1}^{k} i(z_l,f)u(z_l) \geq \frac{1}{M(f,C)} \sum_{l=1}^{k} i(z_l,f) \geq 1,$$

так как $u(z_l) \geq 1$.

Из теоремы 4 выводим, что $v(x)$ — допустимая функция для конденсатора $f(E) = (f(A), f(C))$. Отсюда получаем

$$(\operatorname{cap}_s f(E))^{\frac{1}{s}} \leq \biggl(\int\limits_{f(A)} |\nabla v|^s \, dx\biggr)^{\frac{1}{s}} \leq \frac{\bigl(K^{\theta,1}_{q,p}(f;\Omega)\bigr)^{n-1}(N(f,A))^{(s-1)/s}}{M(f,C)} \biggl(\int\limits_{A} |\nabla u|^r \omega(x)\, dx\biggr)^{\frac{1}{r}}.$$

Функция u — произвольная допустимая, поэтому следствие доказано (см. определение 15).

2. Если дополнительно A — нормальная область, то в силу леммы 4 для всех точек $y \in f(A)$ имеем $N(f,A) = \mu(y,f,A) = \sum\limits_{j=1}^{k} i(x_j,f)$, где $\{x_1, \dots, x_k\} = f^{-1}(y) \cap A$. Неравенство (26) элементарно выводится из неравенства (25). $\square$

Замечание 6. Неравенство (25) (соответственно (26)) при $p = q = n$, $\omega \equiv 1$ другим способом доказано в [11, теорема 10.11] (вытекает из модульного неравенства Полецкого [20, теорема 2] или модульного неравенства Вяйсяля [11, следствие 9.2]).

Теорема 6. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением, $n-1 < q \leq p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Если $E = (A,C)$ — конденсатор в Ω, причем $A \Subset \Omega$, а $C \subset A$ — компакт, то*

$$(\operatorname{cap}_s f(E))^{\frac{1}{s}} \leq K^{\theta,1}_{p,q}(f;\Omega)^{n-1}\bigl(\operatorname{cap}^{\omega}_r E\bigr)^{\frac{1}{r}}, \tag{27}$$

где $s = \frac{p}{p-(n-1)}$ и $r = \frac{q}{q-(n-1)}$, $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$.

Доказательство. Возьмем функцию $u \in C^1_0(\mathbb{R}^n)$ такую, что $u = 1$ в некоторой окрестности C, $\operatorname{supp} u \subset A$ и $\int\limits_A |\nabla u|^r(x)\theta(x)\,dx \leq \operatorname{cap}^{\theta}_r(A,C) + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Далее положим $w = f_* u$. Заметим, что $w \geq 1$ на $f(C)$ и $\operatorname{supp} w \subset f(\operatorname{supp} w) \subset f(A)$. Тогда на основании соотношения (24) имеем

$$(\operatorname{cap}_s(f(A), f(C)))^{\frac{1}{s}} \leq \int\limits_{f(A)} |\nabla w|^s \, dy \leq \bigl(K^{\theta,1}_{q,p}(f; f(\Omega))\bigr)^{n-1} \int\limits_{A} |\nabla u|^r(x)\omega(x)\,dx \leq \bigl(K^{\theta,1}_{q,p}(f; f(\Omega))\bigr)^{n-1}\bigl(\operatorname{cap}^{\omega}_r(A,C) + \varepsilon\bigr)^{\frac{1}{r}}. \quad \square$$

Следствие 2. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным (p,q)-искажением, $n-1 < q \le p < \infty$. Если $E = (A, C)$ — конденсатор в Ω, причем множества $\overline{A} \subset \Omega$ и $C \subset A$ компактны, то*

$$\big(\operatorname{cap}_s f(E)\big)^{\frac{1}{s}} \le K_{q,p}(f;\Omega)^{n-1}\big(\operatorname{cap}_r E\big)^{\frac{1}{r}}, \tag{28}$$

где $r = \frac{q}{q-(n-1)}$ и $s = \frac{p}{p-(n-1)}$.

Доказательство. В качестве весовой функции ω берем $\omega(x) \equiv 1$ в области Ω и применяем теорему 6. $\square$

Замечание 7. Неравенство (28) при $p = q = n$ вытекает из модульного неравенства Полецкого [20, теорема 1] (см. также [11, теорема 10.10]).

§ 2. Теоремы типа Лиувилля

Из следующего результата выведем обобщения известной теоремы Лиувилля.

Теорема 7. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением, $n-1 < q \le p < \infty$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема. Если существуют континуум $C \subset \mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью и последовательность ограниченных открытых множеств $A_k \supset C$, исчерпывающих $\mathbb{R}^n$ (другими словами, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbb{R}^n$), такая, что $\operatorname{cap}_r^{\omega}(A_k, C) \to 0$ при $k \to \infty$, то*

$$\operatorname{cap}_s\big(\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R}^n), f(C); \mathbb{R}^n\big) = 0,$$

где $s = \frac{p}{p-(n-1)}$, $r = \frac{q}{q-(n-1)}$, $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$.

Доказательство. Для конденсатора $E_k = (A_k, C)$ верна оценка теоремы 6:

$$(\operatorname{cap}_s(f(E_k)))^{\frac{1}{s}} \le K_{p,q}^{\theta,1}(f;\mathbb{R}^n)^{n-1}\big(\operatorname{cap}_r^{\omega}(E_k)\big)^{\frac{1}{r}}.$$

По условию $\operatorname{cap}_r^{\omega}(E_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Далее выводим оценку на емкость:

$$\operatorname{cap}_s(\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R}^n), f(C); \mathbb{R}^n) \le \lim_{k\to\infty} \operatorname{cap}_s(f(E_k)) = 0.$$

Отсюда имеем $\operatorname{cap}_s(\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R}^n), f(C); \mathbb{R}^n) = 0$, и теорема доказана. $\square$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 7 и $q, p \in (n-1, n)$. Тогда $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R}^n) \ne \varnothing$. Заметим, что $s = \frac{p}{p-(n-1)} > n$. Пусть $f(\mathbb{R}^n) \ne \mathbb{R}^n$. Непустое дополнение $\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R}^n)$ содержит точку y, а $f(C)$ — точку x, которые находятся на конечном расстоянии. s-Емкость пары одноточечных множеств $F_0 = \{x\}$ и $F_1 = \{y\}$ в пространстве $L_s^1(\mathbb{R}^n)$ сравнима с положительной величиной $|x-y|^{n-s}$ (как известно [33], оценка снизу для s-емкости вытекает из ограниченности оператора вложения $L_s^1(\mathbb{R}^n)$ в пространство гёльдеровых функций с показателем $1 - \frac{n}{s}$). Таким образом, $\operatorname{cap}_s(\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R}^n), f(C); \mathbb{R}^n) > 0$. Последнее противоречит теореме 7. $\square$

Следствие 4. *Пусть выполнены условия теоремы 7 и* $n-1 < q \le p = n$. *Если* $\operatorname{cap}_n(\mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R}^n), f(C); \mathbb{R}^n) > 0$, *то совокупность отображений* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *с ограниченным* $(\theta, 1)$*-весовым* (n, q)*-искажением пуста.*

Доказательство. Действительно, предполагая противное, имеем отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (n, q)-искажением. Тогда для этого отображения справедливо заключение теоремы 7, противоречащее условию следствия. $\square$

Замечание 8. Таким образом, при $\theta \equiv 1$, $q = n$ получаем сформулированный во введении результат из [11, следствие 2.12].

§ 3. Устранимые множества

Пространство $w_s^1(\mathbb{R}^n)$, $s \in (1, n)$, определяется как пополнение по норме $\big\|u \mid w_s^1(\mathbb{R}^n)\big\| = \|\nabla u \mid L_s(\mathbb{R}^n)\|$ пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ финитных функций. Известно, что это пространство изоморфно пространству риссовых потенциалов [33, 34]: $u \in w_s^1(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $u = |x|^{1-n} * f$, где $f \in L_s(\mathbb{R}^n)$, $s \in (1, n)$.

Определение 16. Пусть ω — весовая функция на $\mathbb{R}^n$, а $D \subset \mathbb{R}^n$ — область. *Весовой s-емкостью компакта $K \subset D$ в пространстве $W_s^1(D, \omega)$, $s \in [1, \infty)$* ($w_s^1(\mathbb{R}^n)$, $s \in (1, n)$), называется величина

$$\operatorname{cap}\big(K; W_s^1(D; \omega)\big) = \inf\{\|u \mid L_s(D; \omega)\|^s + \|\nabla u \mid L_s(D; \omega)\|^s\},$$

$$\big(\operatorname{cap}\big(K; w_s^1(\mathbb{R}^n)\big) = \inf \|\nabla u \mid L_s(\mathbb{R}^n)\|^s\big),$$

где нижняя грань берется по всем функциям $u \in \mathrm{ACL}(D) \cap C(D)$ таким, что $u \ge 1$ на K.

Заметим, что, рассматривая вместо u срезки $\max(0, \min(1, u))$, тестовые функции в определении 16 емкостей можно считать ограниченными снизу нулем, а сверху — единицей.

На произвольные множества определение емкости для весовой функции $\omega \equiv 1$ распространяется стандартным образом (см., например, [21, 33, 34]).

Определение 17. Пусть $x_0 \in \Omega$ — изолированная точка границы области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что x_0 — *точка нулевой весовой s-емкости в* Ω, если существует шар $B(x_0, R) \subset \Omega \cup \{x_0\}$ такой, что

$$\lim_{r \to 0} \operatorname{cap}\big(B(x_0, r); W_s^1(B(x_0, R); \omega)\big) = 0. \tag{29}$$

Нетрудно проверить, что условие (29) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{cap}\big(\{x_0\}; W_s^1(B(x_0, R); \omega)\big) = 0.$$

Сформулируем два вспомогательных утверждения.

Лемма 11 [11]. *Пусть C — континуум в $\mathbb{R}^n$ и $\operatorname{diam} C \ge \alpha > 0$. Тогда если $E \subset \mathbb{R}^n$ — компакт положительной емкости $\operatorname{cap}\big(E; W_n^1(\mathbb{R}^n)\big) > 0$, то для любого $\alpha > 0$ и $d > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\operatorname{cap}_n(\mathbb{R}^n \setminus E, C) > \delta$ при условии $\operatorname{diam} C \ge \alpha > 0$ и $\operatorname{dist}(C, E_0) \le d$.*

Лемма 12. *Пусть $n - 1 < s < n$, A — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — континуум в A. Тогда для любого $\alpha > 0$ существует число $\varepsilon > 0$ такое, что если $\operatorname{diam} C \ge \alpha$, то $\operatorname{cap}_s(A, C) \ge \varepsilon$.*

Доказательство. Заметим, что $\operatorname{cap}_s(A, C; \mathbb{R}^n) \ge \operatorname{cap}\big(C; w_s^1(\mathbb{R}^n)\big)$. Поэтому сформулированное свойство емкости вытекает из известного соотношения между емкостью компакта в $w_s^1(\mathbb{R}^n)$ и вместимостью Хаусдорфа этого компакта [33, 34]:

$$(\operatorname{diam} C)^{n-s} \le \mathscr{H}^\infty_{n-s}(C) \le \gamma \operatorname{cap}\bigl(C; w_p^1(\mathbb{R}^n)\bigr). \quad \square \tag{30}$$

Лемма 13. *Если в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ компактное подмножество $F \subset \Omega$ таково, что $\operatorname{cap}\bigl(F; W_s^1(\Omega,\omega)\bigr) = 0$, $s \in (1,\infty)$, то для любого шара $B(x_0,R) \subset \Omega$, $x_0 \in F$, и континуума $C \subset B(x_0,R)\setminus F$ выполняется равенство*

$$\operatorname{cap}_s^\omega(B(x_0,R)\setminus F, C) = \operatorname{cap}_s^\omega(B(x_0,R), C).$$

Доказательство. Неравенство

$$\operatorname{cap}_s^\omega(B(x_0,R), C) \le \operatorname{cap}_s^\omega(B(x_0,R)\setminus F, C)$$

очевидно. Докажем обратное соотношение.

В соответствии с определением 16 рассмотрим последовательность ограниченных в совокупности тестовых функций $u_k \in \mathrm{ACL}(\Omega)\cap C(\Omega)$ таких, что $u_k \ge 1$ на C и

$$\|u_k \mid L_s(\Omega;\omega)\|^s + \|\nabla u_k \mid L_s(\Omega;\omega)\|^s \to 0 \tag{31}$$

при $k\to\infty$. Если ψ — липшицева ограниченная функция в Ω, удовлетворяющая условиям $\psi = 1$ на F и $\psi = 0$ на C, то последовательность $v_k = \psi u_k$ обладает следующими свойствами: $v_k = 1$ на F и $v_k = 0$ на C для всех $k\in\mathbb{N}$. Переходя к подпоследовательности, можно подразумевать, что

$$\|v_k \mid L_s(\Omega;\omega)\|^s + \|\nabla v_k \mid L_s(\Omega;\omega)\|^s \to 0$$

при $k\to\infty$. Для последнего перехода последовательность u_k в (31) можно считать такой, что обе последовательности $u_k(x)\omega(x)$ и $\nabla u_k(x)\omega(x)$ сходятся в Ω к 0 почти всюду. Тогда $\|v_k \mid L_s(\Omega;\omega)\|^s = \|\psi u_k \mid L_s(\Omega;\omega)\|^s \to 0$ и

$$\|\nabla v_k \mid L_s(\Omega;\omega)\| \le \|\psi\cdot\nabla u_k \mid L_s(\Omega;\omega)\| + \|u_k\cdot\nabla\psi \mid L_s(\Omega;\omega)\| \to 0$$

при $k\to\infty$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

Пусть w_k — ограниченная в совокупности последовательность тестовых функций для емкости $\operatorname{cap}_s^\omega(B(x_0,R),C)$ такая, что

$$\|w_k\cdot\nabla v_k \mid L_s(\Omega;\omega)\|^s = \int\limits_{B(x_0,R)} |\nabla w_k|^s(x)\omega(x)\,dx \le \operatorname{cap}_s^\omega(B(x_0,R),C) + \frac{1}{k}.$$

Тогда последовательность функций $g_k(x) = w_k(x)\cdot(1 - v_k(x))$ является тестовой для емкости $\operatorname{cap}_s^\omega(B(x_0,R)\setminus F, C)$, так как $g_k(x) = 0$ на $\partial B(x_0,R)\cup (F\cap B(x_0,R))$ и $g_k(x) = 1$ на C. Кроме того,

$$\begin{aligned}\|\nabla g_k \mid L_s(\Omega;\omega)\| &\le \|(1-v_k)\cdot\nabla w_k \mid L_s(\Omega;\omega)\| + \|w_k\cdot\nabla v_k \mid L_s(\Omega;\omega)\|\\ &\le \|\nabla w_k \mid L_s(\Omega;\omega)\| + \|v_k\cdot\nabla w_k \mid L_s(\Omega;\omega)\| + \|w_k\cdot\nabla v_k \mid L_s(\Omega;\omega)\|.\end{aligned}$$

Последние два слагаемых по теореме Лебега о мажорируемой сходимости стремятся к нулю при $k\to\infty$. Отсюда выводим

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_s^\omega(B(x_0,R)\setminus F, C) &\le \varliminf_{k\to\infty} \|\nabla g_k \mid L_s(\Omega;\omega)\|^s\\ &\le \varliminf_{k\to\infty} \|\nabla w_k \mid L_s(\Omega;\omega)\|^s = \operatorname{cap}_s^\omega(B(x_0,R),C). \quad \square\end{aligned}$$

Лемма 14. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, компактное подмножество $F \subset \Omega$ имеет нулевую ω-весовую s-емкость: $\operatorname{cap}\big(F; W_s^1(\mathbb{R}^n;\omega)\big) = 0$, $s \in (1,\infty)$, где ω — произвольная локально суммируемая функция. Если функция $\omega^{\frac{1}{1-s}}$ локально суммируема, то для любого шара $B(x,r) \subset \Omega$ множество $B(x,r) \setminus F$ связно.*

Доказательство. Так как по условию $\operatorname{cap}\big(F; W_s^1(\Omega,\omega)\big) = 0$, в силу условий на весовую функцию имеем $\operatorname{cap}\big(F; W_1^1(\Omega)\big) = 0$. Действительно, для функции u из определения 16, которую можно брать с компактным носителем, одним и тем же для всех тестовых функций, имеем

$$\int\limits_\Omega |u|\,dx = \int\limits_\Omega |u|\omega^{\frac{1}{s}}\omega^{-\frac{1}{s}}\,dx \le \Big(\int\limits_{\Omega\cap\operatorname{supp} u} |u|^s\omega\,dx\Big)^{\frac{1}{s}}\Big(\int\limits_{\Omega\cap\operatorname{supp} u} \omega^{\frac{1}{1-s}}\,dx\Big)^{\frac{s-1}{s}} < \infty.$$

Аналогичное неравенство справедливо и для градиента функции u. Из выведенных неравенств получаем $\operatorname{cap}\big(F; W_1^1(\Omega)\big) = 0$.

Учитывая соотношения между емкостью в пространстве W_1^1 и $(n-1)$-мерой Хаусдорфа [33], выводим, что

$$\mathscr{H}^{n-1}(\operatorname{Pr}_j F) = 0 \quad \text{для любого } j = 1,\dots,n.$$

Из последнего условия вытекает, что дополнение $B(x,r) \setminus F$ связно для любого $r > 0$. $\square$

Теорема 8. *Пусть $f : \Omega \setminus F \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным $(\theta,1)$-весовым (p,q)-искажением, $n-1 < q < n \le p < \frac{(n-1)^2}{(n-2)}$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ локально суммируема на $\mathbb{R}^n$. Пусть изолированная точка $x_0 \in \partial\Omega$ границы области Ω является точкой нулевой ω-весовой r-емкости в Ω, где $r = \frac{q}{q-(n-1)}$.*

Если при $p = n$ выполняется дополнительное условие

$$\operatorname{cap}_n\big(\mathbb{R}^n \setminus f(\Omega\setminus\{x_0\}); W_n^1(\mathbb{R}^n)\big) \ge \varepsilon > 0,$$

то отображение f можно продолжить до непрерывного отображения $\tilde f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ при $n < p$ ($\tilde f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}^n}$ при $n = p$).

Доказательство. Случай $n-1 < q < n < p$. Рассмотрим произвольную последовательность точек $\{x_i\}$ в проколотом шаре $B(x_0,R)\setminus\{x_0\} \subset \Omega$, сходящуюся к точке x_0. Фиксируем i и соединяем x_i и x_j, $i \le j$, непрерывной кривой C_{ij}, лежащей в проколотом шаре $B(x_0,r_i)\setminus\{x_0\}$ для всех номеров $j \ge i$. Заметим, что $r_i \to 0$ при $i \to \infty$. Рассмотрим открытые множества A_k, компактно вложенные в $B(x_0,R)\setminus\{x_0\}$ и исчерпывающие изнутри $B(x_0,R)\setminus\{x_0\}$ при $k\to\infty$, т. е. $A_k \Subset B(x_0,R)\setminus\{x_0\}$ и $\bigcup\limits_k A_k = B(x_0,R)\setminus\{x_0\}$. Тогда в силу теоремы 6 для фиксированных i,j и достаточно большого k получаем

$$(\operatorname{cap}_s(f(A_k), f(C_{ij})))^{\frac{1}{s}} \le K_{q,p}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}\big(\operatorname{cap}_r^\omega(A_k,C_{ij})\big)^{\frac{1}{r}},$$

где $s = \frac{p}{p-(n-1)}$. Переходя к пределу при $k\to\infty$, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}\big(f(C_{ij}); w_s^1(\mathbb{R}^n)\big)^{\frac{1}{s}} &\le (\operatorname{cap}_s(f(B(x_0,R)\setminus\{x_0\}), f(C_{ij})))^{\frac{1}{s}}\\ &\le K_{q,p}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}\big(\operatorname{cap}_r^\omega(B(x_0,R)\setminus\{x_0\}, C_{ij})\big)^{\frac{1}{r}}\end{aligned}$$

$$= K_{q,p}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}\bigl(\mathrm{cap}_r^{\omega}(B(x_0,R),C_{ij})\bigr)^{\frac{1}{r}}$$
$$\le K_{q,p}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}\bigl(\mathrm{cap}_r^{\omega}(B(x_0,R),B(x_0,r_i))\bigr)^{\frac{1}{r}}. \quad (32)$$

Здесь для одного перехода в приведенных соотношениях применили равенство

$$\mathrm{cap}_r^{\omega}(B(x_0,R)\setminus\{x_0\},C_{ij}) = \mathrm{cap}_r^{\omega}(B(x_0,R),C_{ij})$$

для любых $j \ge i$, справедливость которого вытекает из леммы 13 при $F = \{x_0\}$, $C = C_{ij}$.

Заметим, что правая часть (32) может быть сделана сколь угодно малой, откуда в силу соотношений (30) выводим $|f(x_i) - f(x_j)| \to 0$ при $i, j \to \infty$. В силу критерия Коши существует конечный предел $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_i)$. Из критерия Гейне сходимости выводим существование конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Случай $n = p$. Предположим, что f не имеет предела в точке x_0. Тогда в некотором выколотом шаре $B(x_0,R)\setminus\{x_0\} \subset \Omega$ существуют две последовательности точек $\{x_i\}$ и $\{x_i'\}$, сходящиеся к точке x_0, но при этом $d(f(x_i), f(x_i')) \ge \alpha > 0$ для любого индекса i.

Из вышесказанного вытекает, что точки x_i и x_i' можно соединить кривой C_i, лежащей в выколотом шаре $B(x_0,r_i)\setminus\{x_0\}$, при этом $r_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Далее исключим из рассмотрения ситуацию, когда

$$\varliminf_{i\to\infty} |f(x_i)| < \infty, \quad \varlimsup_{i\to\infty} |f(x_i')| = \infty. \quad (33)$$

Основная ситуация дальнейших рассмотрений состоит в том, что первую последовательность можно считать ограниченной, а вторую — неограниченной. Так как $\mathrm{diam}(f(C_i)) \ge \alpha$, по лемме 11 имеем $\mathrm{cap}_n(\mathbb{R}^n\setminus f(\Omega\setminus\{x_0\}), f(C_i)) \ge \varepsilon > 0$ для всех i. Рассмотрим открытые множества A_j, компактно вложенные в $B(x_0,R)\setminus\{x_0\}$ и исчерпывающие изнутри $B(x_0,R)\setminus\{x_0\}$ при $j\to\infty$, т. е. $A_j \Subset B(x_0,R)\setminus\{x_0\}$ и $\bigcup\limits_j A_j = B(x_0,R)\setminus\{x_0\}$. Тогда в силу теоремы 6 для фиксированного i и достаточно большого j получаем

$$(\mathrm{cap}_n(f(A_j), f(C_i)))^{\frac{1}{n}} \le K_{q,n}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}\bigl(\mathrm{cap}_r^{\omega}(A_j,C_i)\bigr)^{\frac{1}{r}}.$$

Переходя к пределу при $j\to\infty$, приходим к соотношениям

$$\varepsilon \le (\mathrm{cap}_n(\mathbb{R}^n\setminus f(\Omega\setminus\{x_0\}), f(C_i)))^{\frac{1}{n}} \le (\mathrm{cap}_n(\mathbb{R}^n\setminus f(B(x_0,R)\setminus\{x_0\}), f(C_i)))^{\frac{1}{n}}$$
$$\le K_{q,n}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}\bigl(\mathrm{cap}_r^{\omega}(B(x_0,R)\setminus\{x_0\},C_i)\bigr)^{\frac{1}{r}}$$
$$= K_{q,n}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}\bigl(\mathrm{cap}_r^{\omega}(B(x_0,R),C_i)\bigr)^{\frac{1}{r}}. \quad (34)$$

Для последнего перехода мы применили равенство $\mathrm{cap}_r^{\omega}(B(x_0,R)\setminus\{x_0\},C_i) = \mathrm{cap}_r^{\omega}(B(x_0,R),C_i)$ для любого i, справедливость которого вытекает из леммы 13.

С другой стороны, $\mathrm{cap}_n^{\omega}(B(x_0,R),C_i) \le \mathrm{cap}_n^{\omega}(B(x_0,R),B(x_0,r_i)) \to 0$. Получаем противоречие с отграниченностью от нуля левой части (34).

Таким образом, либо обе последовательности $\{f(x_i)\}$ и $\{f(x_i')\}$ стремятся к ∞ при $i\to\infty$ и тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, либо обе они ограничены и тогда существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}^n$. Последний вывод основан на том, что левая часть (34) стремится к нулю и тогда $|f(x_i) - f(x_i')| \to 0$ при $i\to\infty$ в силу леммы 11. $\square$

Теорема 9. *Пусть $f : \Omega \setminus F \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (p, q)-искажением, $n < q \le p < \frac{(n-1)^2}{(n-2)}$, а весовые функции $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ и $\theta^{\frac{p-(n-1)}{q-(n-1)}}$ локально суммируемы на $\mathbb{R}^n$. Пусть компактное множество $F \subset \Omega$ имеет нулевую ω-весовую r-емкость в пространстве $W^1_r(\mathbb{R}^n; \omega)$, где $r = \frac{q}{q-(n-1)}$.*

Тогда отображение f можно продолжить до непрерывного отображения $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность точек $\{x_i\}$ дополнения $B(x_0, R) \setminus F \subset \Omega$, сходящуюся к точке x_0. Фиксируем i и соединяем x_i и x_j, $i \le j$, непрерывной кривой $C_{ij} \subset B(x_0, r_i) \setminus F$ (это можно сделать по лемме 14, в которой по условию весовая функция $\omega^{\frac{1}{1-s}} = \theta^{\frac{p-(n-1)}{q-(n-1)}}$ локально суммируема, где $s = \frac{p}{p-(n-1)}$).

Заметим, что $r_i \to 0$ при $i \to \infty$. Рассмотрим открытые множества A_k, компактно вложенные в $B(x_0, R) \setminus F$ и исчерпывающие изнутри $B(x_0, R) \setminus F$ при $k \to \infty$, т. е. $A_k \Subset B(x_0, R) \setminus F$ и $\bigcup\limits_k A_k = B(x_0, R) \setminus F$. Тогда в силу теоремы 6 для фиксированных i, j и достаточно большого k получаем

$$(\mathrm{cap}_s(f(A_k), f(C_{ij})))^{\frac{1}{s}} \le K^{\theta,1}_{q,p}(f; \Omega)^{n-1} \big(\mathrm{cap}^{\omega}_r(A_k, C_{ij})\big)^{\frac{1}{r}},$$

где $s = \frac{p}{p-(n-1)} \in (n-1, n)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}\big(f(C_{ij}); w^1_s(\mathbb{R}^n)\big)^{\frac{1}{s}} &\le (\mathrm{cap}_s(f(B(x_0, R) \setminus F), f(C_{ij})))^{\frac{1}{s}} \\ &\le K^{\theta,1}_{q,p}(f; \Omega)^{n-1} \big(\mathrm{cap}^{\omega}_r(B(x_0, R) \setminus F, C_{ij})\big)^{\frac{1}{r}} \\ &= K^{\theta,1}_{q,p}(f; \Omega)^{n-1} \big(\mathrm{cap}^{\omega}_r(B(x_0, R), C_{ij})\big)^{\frac{1}{r}} \\ &\le K^{\theta,1}_{q,p}(f; \Omega)^{n-1} \big(\mathrm{cap}^{\omega}_r(B(x_0, R), B(x_0, r_i))\big)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned} \tag{35}$$

В третьем переходе в (35) применили равенство

$$\mathrm{cap}^{\omega}_r(B(x_0, R) \setminus F, C_{ij}) = \mathrm{cap}^{\omega}_r(B(x_0, R), C_{ij})$$

для любых $j \ge i$, справедливость которого вытекает из леммы 13 при $C = C_{ij}$.

Заметим, что правая часть (35) может быть сделана сколь угодно малой, откуда в силу соотношений (30) выводим $|f(x_i) - f(x_j)| \to 0$ при $i, j \to \infty$. В силу критерия Коши существует конечный предел $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_i)$. Из критерия Гейне сходимости выводим существование конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}^n$. □

Теорема 10. *Пусть $F \subset \Omega$ — компактное множество, $f : \Omega \setminus F \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (p, n)-искажением, $n \le p < \frac{(n-1)^2}{(n-2)}$, а весовая функция $\omega(x) = \theta^{1-n}(x)$ локально суммируема на $\mathbb{R}^n$. Пусть еще компактное подмножество $F \subset \Omega$ таково, что $\mathrm{cap}\big(F; W^1_n(\Omega, \omega)\big) = 0$.*

Если дополнительно $\mathrm{cap}\big(\mathbb{R}^n \setminus f(\Omega \setminus F); W^1_n(\mathbb{R}^n)\big) > 0$ при $p = n$, то отображение f продолжимо до непрерывного отображения $\tilde{f} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}^n$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in F$. Предположим, что f не имеет предела в точке x_0. Тогда в некотором шаре $B(x_0, R) \Subset \Omega$ существуют две последовательности точек $\{x_i\}$ и $\{x'_i\}$, сходящиеся к точке x_0, но при этом $d(f(x_i), f(x'_i)) \ge \alpha > 0$ для любого индекса i.

Из леммы 14 вытекает, что точки x_i и x_i' можно соединить кривой C_i, лежащей в множестве $B(x_0, r_i) \setminus F$.

Пусть далее одна из последовательностей, например $\{x_i'\}$, ограничена. Так как $\operatorname{diam}(f(C_i)) \geq \alpha$, по леммам 11 и 12 имеем $\operatorname{cap}_s(\mathbb{R}^n \setminus f(\Omega \setminus F), f(C_i)) \geq \varepsilon > 0$ для всех i (из условий на показатели суммируемости имеем $n-1 < s = \frac{p}{p-(n-1)}$). Рассмотрим открытые множества A_j, компактно вложенные в $B(x_0, R) \setminus F$ и исчерпывающие изнутри $B(x_0, R) \setminus F$ при $j \to \infty$. Тогда в силу теоремы 6 получаем

$$(\operatorname{cap}_s(f(A_j), f(C_i)))^{\frac{1}{s}} \leq K_{p,n}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}\big(\operatorname{cap}_n^\omega(A_j, C_i)\big)^{\frac{1}{n}}.$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq (\operatorname{cap}_s(\mathbb{R}^n \setminus f(\Omega \setminus F), f(C_i)))^{\frac{1}{s}} &\leq (\operatorname{cap}_s(\mathbb{R}^n \setminus f(B(x_0, R) \setminus F), f(C_i)))^{\frac{1}{s}} \\ &\leq K_{p,n}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}\big(\operatorname{cap}_n^\omega(B(x_0, R) \setminus F, C_i)\big)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq K_{p,n}^{\theta,1}(f;\Omega)^{n-1}\big(\operatorname{cap}_n^\omega(B(x_0, R), C_i)\big)^{\frac{1}{n}}. \quad (36)\end{aligned}$$

Для последнего перехода мы применили равенство $\operatorname{cap}_n^\omega(B(x_0, R) \setminus F, C_i) = \operatorname{cap}_n^\omega(B(x_0, R), C_i)$ для любого i, справедливость которого в силу леммы 13 вытекает из соотношения $\operatorname{cap}\big(F; W_n^1(\Omega, \omega)\big) = 0$.

С другой стороны, $\operatorname{cap}_n^\omega(B(x_0, R), C_i) \leq \operatorname{cap}_n^\omega(B(x_0, R), B(x_0, r_i)) \to 0$, так как $\operatorname{cap}_n^\omega(B(x_0, R), \{x_0\} = 0$. Получаем противоречие с отделенностью от нуля левой части (36).

Таким образом, либо обе последовательности $\{f(x_i)\}$ и $\{f(x_i')\}$ стремятся к ∞ при $i \to \infty$ и тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, либо обе они ограничены и тогда так же, как и в предыдущих теоремах, существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Из доказанной теоремы непосредственно выводим

Следствие 5. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение с $(\theta, 1)$-весовым (p, n)-искажением, $n \leq p < \frac{(n-1)^2}{(n-2)}$ и b — изолированная точка $\partial\Omega$ такая, что*

$$\operatorname{cap}^\omega\big(\{b\}; W_n^1(\mathbb{R}^n)\big) = 0, \quad \omega(x) = \theta^{1-n}(x).$$

Если $\operatorname{cap}\big(\mathbb{R}^n \setminus f(\Omega \setminus \{b\}); W_n^1(\mathbb{R}^n)\big) > 0$ при $p = n$, то отображение f продолжимо до непрерывного отображения $\tilde{f} : \Omega \cup \{b\} \to \overline{\mathbb{R}}^n$, которое будет отображением с $(\theta, 1)$-весовым (p, q)-искажением.

Для доказательства следствия надо лишь проверить, что в некоторой окрестности точки b отображение f конечнократно. Это проверятся так же, как и в доказательстве следствия 2.10 из [11].

Следствие 6. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непостоянное отображение с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (n, n)-искажением и b — изолированная точка $\partial\Omega$ такая, что $\operatorname{cap}^\omega\big(\{b\}; W_n^1(\mathbb{R}^n)\big) = 0$. Также предположим, что f не имеет предела в точке b. Тогда*

1) *$\operatorname{cap}\big(\mathbb{R}^n \setminus f(U \setminus \{b\}); W_n^1(\mathbb{R}^n)\big) = 0$ для любой окрестности $U \subset \Omega \cup \{b\}$ точки b;*

2) *существует σ-множество $E \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ нулевой емкости: $\operatorname{cap}\big(E; W_n^1(\mathbb{R}^n)\big) = 0$, такое, что $N(z, f, U \setminus \{b\}) = \infty$ для любой точки $z \in \overline{\mathbb{R}}^n \setminus E$ и любой окрестности $U \subset \Omega \cup \{b\}$ точки b.*

Доказательство. Предположим, что первое утверждение не выполняется, т. е.

$$\operatorname{cap}\big(\mathbb{R}^n \setminus f(U \setminus \{b\}); W_n^1(\mathbb{R}^n)\big) > 0$$

для некоторой окрестности U точки b. Тогда по следствию 5 отображение f имеет предел в точке b, что противоречит условию следствия.

Выберем k_0 такое, что $\frac{1}{k_0} < \operatorname{dist}(b, \partial U \setminus \{b\})$. Множество $\mathbb{R}^n \setminus f\big(B\big(b, \frac{1}{k}\big) \setminus \{b\}\big)$ имеет емкость нуль в пространстве $W_n^1(\mathbb{R}^n)$ для любого $k \geq k_0$. Тогда множество

$$E = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} \mathbb{R}^n \setminus f(B(b, 1/k) \setminus \{b\})$$

в силу субаддитивности емкости также имеет емкость нуль в пространстве $W_n^1(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, прообраз любой точки $z \in \mathbb{R}^n \setminus E$ принадлежит шарам $B\big(b, \frac{1}{k}\big)$ для $k \geq k_0$. Поэтому существует последовательность различных точек $x_i \in B\big(b, \frac{1}{k_i}\big)$ таких, что $f(x_i) = z$ для любого $i \in \mathbb{N}$. $\square$

§ 4. Классификация римановых многообразий

Следуя [35], введем определение классов отображений $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{N})$ для римановых многообразий $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$.

Определение 18. Пусть $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ — отображение между римановыми пространствами $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$. Тогда f принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{N})$, если функция $[f]_y : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, определенная по правилу $[f]_y(x) = \operatorname{dist}(f(x), y)$, принадлежит $L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ для всех $y \in \mathbb{N}$, и существует функция $g \in L_{p,\mathrm{loc}}(M, \mathbb{R})$ такая, что $|\nabla [f]_y|(x) \leq g(x)$ почти всюду на $\mathbb{M}$ для всех $y \in \mathbb{N}$.

Для отображения класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{N})$ определен почти всюду формальный дифференциал $Df(x) : T_x M \to T_{f(x)} N$.

Далее предполагаем, что многообразия ориентированы и имеют одинаковую размерность n. Условие ориентированности многообразий позволяет определить класс отображений с ограниченным весовым (p, q)-искажением аналогично определению 3, при этом интегрирование будет производится по соответствующей мере Хаусдорфа на многообразиях, порожденных соответствующими римановыми метриками.

Определение 19. Отображение $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ называется *отображением с ограниченным* $(\theta, 1)$*-весовым* (p, q)*-искажением,* $n - 1 < q \leq p < \infty$, если

1) f непрерывно, открыто и дискретно;
2) f принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$;
3) $J(x, f) \geq 0$ для почти всех $x \in \mathbb{M}$;
4) f имеет конечное искажение;
5) функция локального $(\theta, 1)$-весового q-искажения:

$$\Omega \ni x \mapsto K_q^{\theta,\sigma}(x, f) = \begin{cases} \frac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df|(x)}{J(x,f)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } J(x, f) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{37}$$

принадлежит классу $L_\varkappa(\mathbb{M})$, где $\varkappa$ находится из условия $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\varkappa = \infty$ при $q = p$). (При $p = q$, $\omega \equiv 1$ и некоторых дополнительных предположениях введенный класс отображений исследовался в [13].)

Введем обозначение $K_{q,p}^{\theta,\sigma}(f; \mathbb{M}) = \big\| K_q^{\theta,\sigma}(y, f) \mid L_\varkappa(\mathbb{M}) \big\|$.

Аналогично предыдущим рассмотрениям для произвольной гладкой функции $u : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, $u \in C_0^1(\mathbb{M})$, определяем перенесенную функцию $w : f(\mathbb{M}) \to \mathbb{R}$ (см. определение 17). Аналогично рассуждениям доказательства леммы 2 выводим, что $w \in \mathrm{ACL}(f(\mathbb{M}))$: так как свойство $\mathrm{ACL}(f(\mathbb{M}))$ локальное, для любой точки $y \in f(M)$, выбирая достаточно малую ее окрестность, покрываемую одной картой, сводим задачу к случаю евклидовых пространств. При этом также можно вывести следующую оценку:

$$\Big(\int\limits_{B_j} |\nabla v|^s \, d\nu(y)\Big)^{\frac{1}{s}} \leq \big\| K_q^{\theta,1}(x;f) \mid L_\varkappa(f^{-1}(B_j))\big\|^{(n-1)} \Big(\int\limits_{f^{-1}(B_j)} |\nabla u|^r \omega(x) \, d\mu(x)\Big)^{\frac{1}{r}},$$

где $d\mu(x)$ и $d\nu(x)$ — меры Хаусдорфа соответственно на $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$, $s = \frac{p}{p-(n-1)}$, $r = \frac{q}{q-(n-1)}$, $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$. Далее с помощью метода, примененного в доказательстве теоремы 6, получаем емкостную оценку

$$(\operatorname{cap}_s f(E))^{\frac{1}{s}} \leq K_{q,p}^{\omega,1}(f;\mathbb{M})^{n-1} \big(\operatorname{cap}_r^\omega E\big)^{\frac{1}{r}},$$

где $r = \frac{q}{q-(n-1)}$ и $s = \frac{p}{p-(n-1)}$, $E = (A, C)$ — конденсатор.

Полученные результаты можно применить к классификации многообразий.

Как известно, римановы пространства можно классифицировать в зависимости от поведения s-емкости их компактов.

Определение 20. Многообразие $\mathbb{M}$ называется *r-параболичным* (*θ-r-параболичным*), если $\operatorname{cap}_p(D, \mathbb{M}) = 0$ ($\operatorname{cap}_r^\omega(D, \mathbb{M}) = 0$) для любого компакта $D \subset \mathbb{M}$ с непустой внутренностью. В противном случае $\mathbb{M}$ *r-гиперболично* (*ω-r-гиперболично*).

Докажем теорему о поведении свойства параболичности при действии отображений с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (p, q)-искажением.

Теорема 11. *Пусть $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ — отображение с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (p, q)-искажением. Тогда если $\mathbb{M}$ ω-r-параболично, $\mathbb{N}$ s-параболично, где $r = \frac{q}{q-(n-1)}$, $s = \frac{p}{p-(n-1)}$, $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$.*

Доказательство. Пусть $D \subset \mathbb{M}$ — компактное множество с непустой внутренностью. Так как f непрерывно и открыто, $f(D) \subset \mathbb{N}$ также компактное множество с непустой внутренностью. Тогда

$$\operatorname{cap}_s(f(D), \mathbb{N}) \leq \operatorname{cap}_s(f(D), f(\mathbb{M})) \leq K_{q,p}^{\theta,1}(f;\mathbb{M})^{n-1} \operatorname{cap}_r^\omega(D, \mathbb{M}).$$

Поэтому если $\mathbb{M}$ ω-r-параболично, то $\mathbb{N}$ будет s-параболичным. $\square$

Замечание 9. В теореме 11 обобщаем аналогичный результат из [13, теорема A], доказанный при условии, что отображение $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, $q = p$, а $\omega \equiv 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
2. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
3. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
4. *Hajłasz P.* Change of variables formula under minimal assumptions // Colloq. Math. 1993. V. 64, N 1. P. 93–101.

5. *Vodop'yanov S. K.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Тр. по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 603–670.
6. *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 67–86.
7. *Whitney H.* On totally differentiable and smooth functions // Pacif. J. Math. 1951. V. 1, N 1. P. 143–159.
8. *Ukhlov A., Vodopyanov S. K.* Mappings associated with weighted Sobolev spaces // Complex Analysis and Dynamical Systems. III: Contemporary Mathematics AMS. 2008. V. 455. P. 363–382.
9. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. Математика. 2002. № 10. С. 11–33.
10. *Kilpeläinen T.* Weighted Sobolev spaces and capacity // Ann. Acad. Sci. Fenn., AI. Math. 1994. V. 19. P. 95–113.
11. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verl., 1993.
12. *Водопьянов С. К., Маркина И. Г.* Локальные оценки изменения отображений с ограниченным s-искажением на группах Карно // Алгебра, геометрия, анализ и математическая физика / Тр. 12-й Сибирской математической школы: Новосибирск, 18–23 июля 1998 г. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999. С. 28–53.
13. *Troyanov M., Vodop'yanov S. K.* Liouville type theorems for mappings with bounded (co)-distortion // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 2002. V. 52, N 6. P. 1753–1784.
14. *Vodop'yanov S. K., Ukhlov A.* Mappings with bounded (P, Q)-distortion on Carnot groups // Bull. Sci. Math. 2010. V. 134, N 6. P. 605–634.
15. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Докл. АН. 2008. Т. 423, № 5. С. 592–596.
16. *Водопьянов С. К.* Отображения с конечным коискажением и классы функций Соболева // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 3. С. 301–305.
17. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.
18. *Водопьянов С. К.* О регулярности функции Полецкого при слабых аналитических предположениях исходного отображения // Докл. АН. 2014. Т. 455, № 2. С. 130–134.
19. *Menchoff D. E.* Sur une generalization d'un theoreme de M. H. Bohr // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 2. С. 339–356.
20. *Полецкий Е. А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 2. С. 261–272.
21. *Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford: Clarendon Press, 1993.
22. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130, № 2. С. 185–206.
23. *Ухлов А. Д.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 1. С. 185–192.
24. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Классы Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.
25. *Севостьянов Е. А.* Исследование пространственных отображений геометрическим методом. Киев: Наук. думка, 2014.
26. *Пономарев С. П.* Об N-свойстве гомеоморфизмов класса W^1_p // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 2. С. 140–148.
27. *Водопьянов С. К.* Топологические и геометрические свойства отображений классов Соболева с суммируемым якобианом // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 23–48.
28. *Radó N., Reichelderfer P. V.* Continuous transformation in analysis. Berlin: Springer-Verl., 1955.
29. *Vodop'yanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.
30. *Решетняк Ю. Г.* Некоторые геометрические свойства функций и отображений с первыми обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 4. С. 886–919.
31. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI. 1969. V. 448. P. 1–40.
32. *Martio O.* A capacity inequality for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI. 1970. V. 474. P. 1–18.

33. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
34. *Мазья В. Г., Хавин В. П.* Нелинейная теория потенциала // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 6. С. 67–138.
35. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 567–583.

Статья поступила 6 октября 2014

Байкин Алексей Николаевич   Водопьянов Сергей Константинович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru, alexey.baykin@gmail.com