Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 517.958

НЕДООПРЕДЕЛЕННАЯ ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ

Д. С. Аниконов, Д. С. Коновалова

Аннотация. В общей проблеме интегральной геометрии задаются интегралы по некоторым многообразиям от неизвестной функции. Традиционная постановка задачи состоит в нахождении подынтегральной функции. В нашей работе рассматривается недоопределенный случай, когда неизвестные функции зависят от большего числа переменных, чем заданные интегралы. Такие ситуации возникают в ряде прикладных задач, когда используется достаточно сложная математическая модель и отсутствует априорная информация. Для преодоления недостатка имеющихся данных ставится задача нахождения некоторой части неизвестной информации, а именно искомыми объявляются только поверхности разрывов подынтегральных функций. Доказывается соответствующая теорема единственности. Настоящая работа является завершением цикла наших исследований для случая интегрирования по одномерным многообразиям. В предыдущих статьях авторы рассматривали аналогичные задачи, в которых интегрирование осуществлялось вдоль прямых. Здесь доказывается подобный результат для варианта интегрирования неизвестных функций по семейству неизвестных кривых.

Ключевые слова: сингулярный интеграл, интегральная геометрия, неизвестная граница, томография, уравнение переноса.

1. Основные обозначения, постановка задачи и вспомогательные утверждения

Обычно в задаче интегральной геометрии требуется найти функцию по заданному семейству ее интегралов. Не претендуя на общий обзор темы, отметим, что эти задачи отражены, например, в монографиях [1–4]. Также значительный вклад внесен трудами математической школы М. М. Лаврентьева и В. Г. Романова в связи с изучением обратных задач для уравнений математической физики [5, 6].

При исследовании обратных задач для уравнения переноса мы рассматривали подобные вопросы [7, 8] и в результате пришли к новой постановке задачи интегральной геометрии, характеризующейся недоопределенностью. Именно, у нас подынтегральная функция зависит не только от точек интегрирования, но и от дополнительных параметров, описывающих множества, по которым производится интегрирование. В таких условиях нам пришлось ограничиться поиском только поверхностей разрывов подынтегральных функций, что является важной частью информации о неизвестной функции. Настоящая работа является итогом исследования авторами подобных и смежных проблем [9–12]. Здесь мы существенно используем наши предыдущие результаты, в особенности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13–01–275).

статью [12], и для ясности ссылок стараемся максимально возможно использовать прежние обозначения, в частности: $\mathbb{R}^m$, как и раньше, означает m-мерное арифметическое пространство; для произвольного множества T в $\mathbb{R}^m$ ∂T — граница этого множества, $\rho(x,T)$ — расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^m$ до множества T, $T_x = T \setminus \{x\}$ — множество всех точек T, кроме точки x, αT — множество векторов из T, умноженных на число α, $\det(A)$ — определитель матрицы A, $\Omega = \{\omega : \omega \in \mathbb{R}^n,\ |\omega| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, const — некоторое положительное число, $O(1)$ — ограниченная функция, $\mathbb{C}^k(T)$ — пространство функций, непрерывных и ограниченных на T вместе со всеми своими частными производными до порядка k включительно. Для сокращения записи условимся обозначать частные производные функции $\phi(\nu_1,\dots,\nu_m)$, $(\nu_1,\dots,\nu_m) \in \mathbb{R}^m$, по переменной ν_k через $D_k\phi(\nu_1,\dots,\nu_m)$, $k = 1,\dots,m$. Для дальнейших рассуждений нам понадобится продолжение функций, заданных на единичной сфере. Для этого функцию $\zeta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, продолжим в шаровой слой $\Omega_\epsilon = \{v : v \in \mathbb{R}^n,\ 1-\epsilon < |v| < 1+\epsilon\}$ $(0 < \epsilon < 1)$ таким образом, что $\tau \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$, $\zeta(v) = \tau\zeta(\omega)$ для $v = \tau\omega$. Предположим, что существуют непрерывные производные от функции $\zeta(v)$, заданной в открытом множестве Ω_ϵ. Их следы на Ω будем обозначать через $D_k\zeta(\omega)$, $k = 1,\dots,n$. Говоря вообще о дифференцировании функций, заданных на единичной сфере, отметим, что, например, в [13, 14] используются и другие определения, но при этом множества непрерывно дифференцируемых функций совпадают.

Пусть G — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, $g(x,y,\omega)$ — функция, заданная для $(x,y,\omega) \in G \times G \times \Omega$. Продолжим указанным образом функцию $g(x,y,\omega)$ по ω в шаровой слой Ω_ϵ. В результате она оказывается функцией $g(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,v_1,\dots,v_n)$ от $3n$ независимых переменных, принадлежащих открытому множеству $G \times G \times \Omega_\epsilon$.

Согласно договоренности частные производные первого порядка функции $g(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,v_1,\dots,v_n)$ будем обозначать через $D_kg(x,y,v)$. При этом $D_kg(x,y,v)$ — частная производная по x_k, $D_{n+k}g(x,y,v)$ — частная производная по y_k, $D_{2n+k}g(x,y,v)$ — частная производная по v_k для $1 \le k \le n$. Напомним, что производная $D_{2n+k}g(x,y,\omega)$ определяется как след функции $D_{2n+k}g(x,y,v)$ при $v = \omega$ $(|\omega| = 1)$. В дальнейшем символ ω будем использовать для обозначения как точек из Ω, так и точек из Ω_ϵ, каждый раз указывая соответствующее множество.

Предполагаем, что можно указать систему множеств G_i, $i = 1,\dots,p$, такую, что $G_i \subset G$ и для их объединения G_0 верно равенство $\overline{G}_0 = \overline{G}$. Ясно, что $\partial G_0 = \partial G_1 \cup \dots \cup \partial G_p$.

Предположения относительно границ ∂G_i множеств G_i, $i = 1,\dots,p$, совпадают с аналогичными предположениями в [12]. Именно, каждая из них считается кусочно гладкой $(n-1)$-мерной поверхностью класса $\mathbb{C}^2$. В целом поверхность ∂G_i липшицева, т. е. окрестность каждой ее точки можно представить в виде графика функции, удовлетворяющей условию Липшица. Как и в [12], будем называть точку $z \in \partial G_0$ *контактной*, если она принадлежит границе только двух множеств из семейства G_i, $i = 1,\dots,p$, и в некоторой окрестности точки z поверхность ∂G_0 гладкая класса $\mathbb{C}^2$. Предполагается, что множество контактных точек плотно в $\partial G_0 \backslash \partial G$.

Рассмотрим множество ограниченных функций $g(x,y,\omega)$, определенных при $(x,y,\omega) \in G \times G \times \Omega$ и принадлежащих пространствам $\mathbb{C}^1(G \times G_i \times \Omega)$, $i = 1,\dots,p$. С учетом того обстоятельства, что допускается случай невыпуклых множеств G_i, дополнительно предположим выполнение условия Липшица в следующей форме: $|g(x,y,\omega)-g(x,u,\omega)| \le \mathrm{const}\,|y-u|$, $y,u \in G_i$. Ясно, что такие функции имеют конечные предельные значения в точках $z \in \partial G_i$, которые будем обозначать через $[g(x,z,\omega)]_i$, т. е. $g(x,y,\omega) \to [g(x,z,\omega)]_i$, $y \in G_i$, $z \in \partial G_i$, $y \to z$.

Пусть точка $z \in \partial G_0$ граничная для двух и только двух множеств G_j, G_l, $1 \le j,l \le p$. *Величиной разрыва* (*скачка*) функции $g(x,y,\omega)$ в точке (x,z,ω) назовем разность $[g(x,z,\omega)]_{j,l} = [g(x,z,\omega)]_j - [g(x,z,\omega)]_l$. Для удобства будем считать функцию $g(x,y,\omega)$ продолженной по y нулем вне G. Множество таких функций назовем *классом* $\mathbb{K}$.

В множестве G рассмотрим семейство кривых $L(x,\omega)$, исходящих из точки $x \in G$ и имеющих в этой точке касательный вектор ω. Это семейство записывается в виде $L(x,\omega) = \{y : y = \varphi(x,\omega,t)\}$, где t означает длину дуги кривой от точки x до точки y, $t \in (0, l(x,\omega))$, $\varphi(x,\omega,0) = x$, $l(x,\omega) \in \mathbb{C}^1(G \times \Omega)$. Предполагается, что вектор-функция $\varphi(x,\omega,t) = (\varphi_1(x,\omega,t),\dots,\varphi_n(x,\omega,t))$ имеет непрерывные и ограниченные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно, а по переменной t до четвертого порядка включительно.

Будем использовать формулу Тейлора для функции $\lambda(t)$ в виде

$$\lambda(t) = \lambda(0) + t\lambda'(0) + \dots + t^{k-1}\frac{\lambda^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \frac{t^k}{(k-1)!}\int_0^1 (1-\nu)^{k-1}\lambda^{(k)}(t\nu)\,d\nu. \quad (1.1)$$

Используя формулу (1.1) для $k=2$ и учитывая равенство $\varphi_t(x,\omega,0) = \omega$, кривые $L(x,\omega)$ можно задать следующим образом:

$$y_i = \varphi_i(x,\omega,t), \quad \varphi_i(x,\omega,t) = x_i + t\omega_i + t^2\alpha_i(x,\omega,t), \quad i = 1,\dots,n, \qquad (1.2)$$

где $\alpha_i(x,\omega,t) \in \mathbb{C}^2(T)$, $\alpha(x,\omega,t) = (\alpha_1(x,\omega,t),\dots,\alpha_n(x,\omega,t))$. Здесь и далее $T-$ множество точек (x,ω,t) таких, что $x \in G$, $\omega \in \Omega$, $t \in (0, l(x,\omega))$.

Потребуем, чтобы при каждом фиксированном $x \in G$ равенства (1.2) осуществляли взаимно однозначное отображение множества точек (ω,t), $\omega \in \Omega$, $t \in (0, l(x,\omega))$, на множество G_x, $G_x = G \setminus \{x\}$.

Предположим, что система открытых непересекающихся множеств $\{G_i\}$, $i = 1,\dots,p$, обобщенно выпуклая относительно кривых $L(x,\omega)$ в следующем смысле: для любых $(x,\omega) \in G_0 \times \Omega$ кривая $L(x,\omega)$ пересекает границу ∂G_0 множества G_0 не более чем в счетном числе точек.

Пусть задан криволинейный интеграл первого рода по переменной y:

$$\int_{L(x,\omega)} g(x,y,\omega)\,d_y\sigma = F(x,\omega), \quad (x,\omega) \in G_0 \times \Omega,\ g(x,y,\omega) \in \mathbb{K}.$$

Перейдем к обычному интегралу, используя параметризацию кривой $L(x,\omega)$ уравнением $y = \varphi(x,\omega,t)$, и получим

$$\int_0^{l(x,\omega)} g(x,\varphi(x,\omega,t),\omega)\,dt = F(x,\omega).$$

Следующая лемма является вариацией подобного утверждения из [12].

Лемма 1.1. *Если функция $g(x,y,\omega)$ принадлежит классу $\mathbb{K}$, то функция $F(x,\omega)$ непрерывна и ограничена при $(x,\omega)\in G_0\times\Omega$.*

Доказательство. Ограниченность функции $F(x,\omega)$ следует из ограниченности подынтегральной функции. Докажем ее непрерывность. Фиксируем произвольную точку $(x,\omega)\in G_0\times\Omega$, и пусть $\{(x_k,\omega_k)\}$ – последовательность точек из $G_0\times\Omega$, сходящаяся к (x,ω). Рассмотрим функции $\chi_k(t)=g(x_k,\varphi(x_k,\omega_k,t),\omega_k)$, $\chi(t)=\varphi(x,\omega,t)$. Ясно, что

$$\int\limits_0^{l(x_k,\omega_k)}\chi_k(t)\,dt=F(x_k,\omega_k),\qquad \int\limits_0^{l(x,\omega)}\chi(t)\,dt=F(x,\omega).$$

Запишем равенство

$$\int\limits_0^{l(x_k,\omega_k)}\chi_k(t)\,dt=\int\limits_0^{l(x,\omega)}\chi_k(t)\,dt+\int\limits_{l(x,\omega)}^{l(x_k,\omega_k)}\chi_k(t)\,dt.$$

Обозначим первый и второй интегралы в правой части последнего равенства соответственно через a_k,b_k. Очевидно, что $b_k\longrightarrow 0$ при $k\longrightarrow\infty$. Согласно условию обобщенной выпуклости системы множеств $\{G_i\}$ каждая кривая $L(x_k,\omega_k)$ имеет не более чем счетное число общих точек с множеством ∂G_0, в точках которого функция $g(x,y,\omega)$ может иметь ненулевые разрывы по y, что соответствует значениям $t_{k,j}$ таким, что $\varphi(x_k,\omega_k,t_{k,j})\in\partial G_0$. Всего таких точек $t_{k,j}$ не более чем счетное число. Поэтому в силу непрерывности $g(x,y,\omega)$ в $G\times G_i\times\Omega$ имеем $\chi_k(t)\to\chi(t)$, $k\to\infty$, везде, кроме (быть может) точек $t=t_{k,j}$, т. е. почти всюду на $(0,l(x,\omega))$. Следовательно, по теореме Лебега допустим предельный переход под знаком интеграла в a_k, т. е.

$$\int\limits_0^{l(x,\omega)}\chi_k(t)\,dt\to\int\limits_0^{l(x,\omega)}\chi(t)\,dt,\quad k\to\infty,$$

что и означает непрерывность $F(x,\omega)$ в точке $(x,\omega)\in G_0\times\Omega$. Лемма доказана.

Пусть $A_1,\dots,A_N$ — ортогональные преобразования пространства $\mathbb{R}^n$.

Запишем равенство

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{L(x,A_i\omega)}g_i(x,y,A_i\omega)\,d_y\sigma=H(x,\omega),\quad (x,\omega)\in G_0\times\Omega,\ g_i(x,y,\omega)\in\mathbb{K}.\quad(1.3)$$

Для удобства оформления доопределим функцию $H(x,\omega)$ в точках $(z,\omega)\in\partial G_0\times\Omega$ ее верхним пределом. Отметим, что, как следует из леммы 1.1, функция $H(x,\omega)$ непрерывна в $G_o\times\Omega$ и ограничена в $G\times\Omega$.

Настоящая работа посвящена изучению следующей нетрадиционной задачи интегральной геометрии.

Задача о неизвестной границе. *Из уравнения* (1.3) *найти множество ∂G_0, если известна только функция $H(x,\omega)$, $(x,\omega)\in G\times\Omega$.*

Подчеркнем, что в этой задаче требуется найти множество точек возможных разрывов по переменной y функций $g_i(x,y,\omega)$, $i=1,\dots,N$. При этом неизвестными являются не только подынтегральные функции, но и кривые $L(x,\omega)$, которые определению не подлежат. Такая постановка вопроса полезна, например, для задач зондирования, где искомая поверхность может иметь смысл контактных границ между различными компонентами комплексной среды и где такие границы являются существенными характеристиками внутренней структуры изучаемого объекта. Отметим, что неизвестны не одна, а несколько функций и интегрирование происходит вдоль нескольких семейств кривых. Однако в этом аспекте мы не первые. Например, в [15] тоже исследуется задача интегральной геометрии для нескольких функций, а в [16] рассматривается аналогичная постановка вопроса для решения конкретной прикладной проблемы. Несколько необычным выглядит также интегрирование в (1.3) по линиям $L(x, A_i\omega)$, исходящим из внутренней точки x. Более традиционным было бы интегрирование единственной подынтегральной функции по линиям, проходящим через произвольную точку $x \in G$. Однако наша форма задачи включает в себя и этот частный случай. Достаточно в качестве ортогональных преобразований взять пару $A_1 = E$, $A_2 = -E$, где E — тождественный оператор. Тогда, суммируя интегралы по $L(x,\omega)$ и $L(x,-\omega)$ при подходящем согласовании функций $g_1(x,y,\omega)$, $g_2(x,y,\omega)$, получим интегралы по кривым, для которых точка x не начальная, а внутренняя.

Введем дополнительные ограничения на семейство кривых $L(x,\omega)$. В связи с принятым нами способом продолжения функций, заданных на сфере Ω, равенства (1.2) дополним еще одним равенством $y_{n+1} = |\omega|$, $\omega \in \Omega_\epsilon$, и в совокупности запишем

$$\begin{gathered} y_1 = \varphi_1(x,\omega,t), \quad \varphi_1(x,\omega,t) = x_1 + t\omega_1 + t^2\alpha_1(x,\omega,t), \\ \dots \\ y_n = \varphi_n(x,\omega,t), \quad \varphi_n(x,\omega,t) = x_n + t\omega_n + t^2\alpha_n(x,\omega,t), \\ y_{n+1} = \varphi_{n+1}(x,\omega,t), \quad \varphi_{n+1}(x,\omega,t) = |\omega|. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Используя обозначения $\widetilde{\varphi}(x,\omega,t) = (\varphi_1(x,\omega,t),\dots,\varphi_n(x,\omega,t),\varphi_{n+1}(x,\omega,t))$, $y = (y_1,\dots,y_n)$, $\tilde{y} = (y, y_{n+1})$, равенства (1.4) можно записать в виде $\tilde{y} = \widetilde{\varphi}(x,\omega,t)$. Предполагаем существование положительного числа ϵ такого, что для любой точки $x \in G$ отображение (1.4) множества точек (ω,t), $\omega \in \Omega_\epsilon$, $t \in (0, l(x,\omega))$, на некоторое открытое множество $Y_{x,\epsilon}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ взаимно однозначно. Следовательно, оно имеет обратное:

$$\begin{gathered} (\omega,t) = \widetilde{\psi}(x,\tilde{y}), \quad \omega_i = \psi_i(x,\tilde{y}),\ i \le n, \\ t = \psi_{n+1}(x,\tilde{y}), \quad \widetilde{\psi}(x,\tilde{y}) = (\psi_1(x,\tilde{y}),\dots,\psi_{n+1}(x,\tilde{y})). \end{gathered} \tag{1.5}$$

Нетрудно представить структуру множества $Y_{x,\epsilon}$, точки которого можно описать следующим образом: (y, y_{n+1}), $1-\epsilon < y_{n+1} < 1+\epsilon$, $y = |\omega|\varphi(x,\omega/|\omega|,t) = y_{n+1}\varphi(x,\omega/|\omega|,t)$. Последнее равенство позволяет понять, что точки y принадлежат множеству $y_{n+1}G_x$, которое получается умножением всех векторов из G_x на положительное число y_{n+1}. Из этих же соотношений следует, что первые n равенств в (1.4) при $\omega \in \Omega_\epsilon$ задают кривую $\widetilde{L}(x,\omega)$, которая получается из $L(x,\omega/|\omega|)$ умножением всех ее точек на число $|\omega|$.

Выпишем матрицу Якоби $J(\tilde{y}/(\omega,t))$ для отображения (1.4), где в i-й строке находятся производные $D_k\varphi_i(x,\omega,t)$, $i = 1,\dots,n+1$, $k = n+1,\dots,2n+1$.

Учитывая вид функций $\varphi_i(x,\omega,t)$, эту матрицу можно записать в следующем виде:

$$J(\tilde{y}/(\omega,t)) = \begin{pmatrix} t+t^2O(1) & t^2O(1) & \dots & t^2O(1) & \omega_1+tO(1) \\ t^2O(1) & t+t^2O(1) & \dots & t^2O(1) & \omega_2+tO(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^2O(1) & t^2O(1) & \dots & t+t^2O(1) & \omega_n+tO(1) \\ \omega_1/|\omega| & \omega_2/|\omega| & \dots & \omega_n/|\omega| & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Здесь в первых n строках и n столбцах на главной диагонали находятся элементы $t+t^2O(1)$, а остальные элементы имеют вид $t^2O(1)$. Заметим, что хотя через $O(1)$ обозначаем ограниченные функции, в матрице (1.6) элементы $O(1)$ являются функциями переменных (x,ω,t) из класса $\mathbb{C}^1(T_\epsilon)$, где T_ϵ — множество точек (x,ω,t) таких, что $x\in G$, $\omega\in\Omega_\epsilon$, $t\in(0,l(x,\omega/|\omega|))$.

Рассмотрим более общую матрицу $B=(b_{ij})$, $i,j=1,\dots,m$, $m>2$, отличающуюся от (1.6) элементами последней строки и последнего столбца:

$$B = \begin{pmatrix} t+t^2O(1) & t^2O(1) & \dots & t^2O(1) & \xi_1(x,\omega,t) \\ t^2O(1) & t+t^2O(1) & \dots & t^2O(1) & \xi_2(x,\omega,t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^2O(1) & t^2O(1) & \dots & t+t^2O(1) & \xi_{m-1}(x,\omega,t) \\ \eta_1(x,\omega,t) & \eta_2(x,\omega,t) & \dots & \eta_{m-1}(x,\omega,t) & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где $\xi_i(x,\omega,t)$, $\eta_i(x,\omega,t)\in\mathbb{C}^1(T_\epsilon)$, $i=1,\dots,m-1$.

Лемма 1.2. *Для определителя матрицы B верна формула*

$$\det(B) = -t^{m-2}(\xi_1(x,\omega,t)\eta_1(x,\omega,t)+\dots+\xi_{m-1}(x,\omega,t)\eta_{m-1}(x,\omega,t))+t^{m-1}O(1), \quad (1.8)$$

причем в правой части (1.8) *функция* $O(1)$ *принадлежит классу* $\mathbb{C}^1(T_\epsilon)$.

Доказательство. Воспользуемся определением величины $\det(B)$ как суммы всевозможных произведений $\pm b_{1i_1}b_{2i_2}\dots b_{mi_m}$, где $i_1,i_2,\dots,i_m$ — номера столбцов соответствующих элементов, причем все индексы $i_1,i_2,\dots,i_m$ различны. Знак перед произведением берется плюс, если перестановка $i_1,i_2,\dots,i_m$ четная, и минус, если нечетная. Возьмем такое элементарное произведение, в котором из последней строки взят элемент $\eta_i(x,\omega,t)$, и поставим цель: выбрать остальные сомножители, образующие ненулевое произведение и содержащие t^k с минимальным значением k. Ясно, что они должны быть по возможности диагональными элементами матрицы. Поэтому сомножители, дополнительные к $\eta_i(x,\omega,t)$, берутся по правилу: их номера столбцов образуют перестановку $(1,\dots,i-1,m,i+1,\dots,m-1,i)$, которая одной транспозицией переводится в перестановку с индексами, возрастающими от 1 до m. Следовательно, указанное элементарное произведение берется со знаком минус, а оно само имеет вид $-(t+t^2O(1))\dots(t+t^2O(1))\eta_i(x,\omega,t)(t+t^2O(1))\dots(t+t^2O(1))\xi_i(x,\omega,t) = -t^{m-2}\xi_i(x,\omega,t)\eta_i(x,\omega,t)+t^{m-1}O(1)$. Нетрудно видеть, что остальные ненулевые элементарные произведения, содержащие $\eta_i(x,\omega,t)$, имеют множитель t^k, $k>m-2$. Суммируя все элементарные произведения, получим равенство (1.8). Ясно, что функция $O(1)$ в (1.8) получается из b_{ij} путем их конечной комбинации умножений и сложений и поэтому принадлежит классу $\mathbb{C}^1(T_\epsilon)$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Определитель матрицы Якоби в равенстве* (1.6) *можно представить в виде*

$$\det(J(\tilde{y}/(\omega,t))) = -t^{n-1}(|\omega|+t\gamma(x,\omega,t)), \quad (1.9)$$

где функция $\gamma(x,\omega,t)$ принадлежит классу $\mathbb{C}^1(T_\epsilon)$.

Доказательство. Отметим, что все элементы матрицы Якоби (1.6) и используемой здесь матрицы B суть функции из пространства $\mathbb{C}^1(T_\epsilon)$. Для вычисления якобиана воспользуемся равенством (1.6) и леммой 1.2, где положим $m = n+1$, $\xi_i(x,\omega,t) = \omega_i + tO(1)$, $\eta_i(x,\omega,t) = \omega_i/|\omega|$, $i = 1,\dots,n$. Тогда получим

$$\det(J(\tilde{y}/(\omega,t))) = -t^{n-1}((\omega_1 + tO(1))(\omega_1/|\omega|) \\ + \dots + (\omega_n + tO(1))(\omega_n/|\omega|)) + t^nO(1) = -t^{n-1}(|\omega| + t\gamma(x,\omega,t)),$$

где функция $\gamma(x,\omega,t)$ принадлежит классу $\mathbb{C}^1(T_\epsilon)$. Лемма доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что якобиан $\det(J(\tilde{y}/(\omega,t)))$ обращается в нуль только при $t = 0$. Более того, потребуем выполнения неравенств

$$\mathrm{const} \le |\omega| + t\gamma(x,\omega,t) \le \mathrm{const}\,. \tag{1.10}$$

Заметим, что в частном случае, когда $L(x,\omega)$ — прямые, $J(\tilde{y}/(\omega,t)) = -t^{n-1}|\omega|$ и условие (1.10) очевидно выполняется.

Замечание 1.1. Можно было бы потребовать вместо (1.10) выполнения этого условия только при $|\omega| = 1$. Тогда в силу непрерывности неравенства (1.10) выполнялись бы при $\omega \in \Omega_\epsilon$ для достаточно малого числа ϵ.

Лемма 1.4. *Функции $\psi_i(x,\tilde{y})$, указанные в* (1.5), *имеют все непрерывные частные производные первого порядка при $x \in G$, $\tilde{y} \in Y_{x,\epsilon}$ и для всех $i = 1,\dots,n$, $k = 1,\dots,2n$ справедливы следующие оценки:*

$$|D_k\psi_i(x,\tilde{y})| \le \frac{\mathrm{const}}{t}, \quad t = \psi_{n+1}(x,\tilde{y}),\ |D_k\psi_{n+1}(x,\tilde{y})| \le \mathrm{const}\,. \tag{1.11}$$

Доказательство. Сам факт наличия всех непрерывных частных производных первого порядка функций $\psi_i(x,\tilde{y})$ следует из условия взаимной однозначности отображения (1.4) и условия (1.10). Используя в (1.4) равенства (1.5), т. е. $(\omega,t) = \widetilde{\psi}(x,\tilde{y})$, получим тождества

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x,\psi_1(x,\tilde{y}),\dots,\psi_n(x,\tilde{y}),\psi_{n+1}(x,\tilde{y})),\\ &\dots\\ y_n &= \varphi_n(x,\psi_1(x,\tilde{y}),\dots,\psi_n(x,\tilde{y}),\psi_{n+1}(x,\tilde{y})),\\ y_{n+1} &= \varphi_{n+1}(x,\psi_1(x,\tilde{y}),\dots,\psi_n(x,\tilde{y}),\psi_{n+1}(x,\tilde{y})). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Сначала исследуем производные по x_i. Заметим что переменные $(x_1,\dots,x_n)$ входят в соотношения (1.4) равноправно. Поэтому проведем анализ для переменной x_1, а для остальных x_i все получается точно так же. Дифференцируя (1.12) по x_1 и опуская для краткости аргументы, получаем

$$0 = D_1\varphi_1 + D_{n+1}\varphi_1 D_1\psi_1 + D_{n+2}\varphi_1 D_1\psi_2 + \dots + D_{2n}\varphi_1 D_1\psi_n + D_{2n+1}\varphi_1 D_1\psi_{n+1},$$

$$0 = D_1\varphi_2 + D_{n+1}\varphi_2 D_1\psi_1 + D_{n+2}\varphi_2 D_1\psi_2 + \dots + D_{2n}\varphi_2 D_1\psi_n + D_{2n+1}\varphi_2 D_1\psi_{n+1},$$

$$\dots$$

$$0 = D_1\varphi_1 + D_{n+1}\varphi_n D_1\psi_1 + D_{n+2}\varphi_n D_1\psi_2 + \dots + D_{2n}\varphi_n D_1\psi_n + D_{2n+1}\varphi_n D_1\psi_{n+1},$$

$$0 = D_1\varphi_{n+1} + D_{n+1}\varphi_{n+1} D_1\psi_1 + D_{n+2}\varphi_{n+1} D_1\psi_2 \\ + \dots + D_{2n}\varphi_{n+1} D_1\psi_n + D_{2n+1}\varphi_1 D_1\psi_{n+1}. \tag{1.13}$$

Равенства (1.13) можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно $D_1\psi_i$, $i = 1, \ldots, n+1$. Ее определитель есть якобиан $\det(J(\tilde{y}/(\omega, t)))$. Действуя по правилу Крамера и учитывая равенства $D_1\varphi_1 = 1+t^2O(1)$, $D_1\varphi_2 = t^2O(1), \ldots, D_1\varphi_n = t^2O(1), D_1\varphi_{n+1} = 0$, выпишем определитель $\det(J_1)$, используемый для нахождения $D_1\psi_1$:

$$\det(J_1) = \begin{vmatrix} -1+t^2O(1) & t^2O(1) & \ldots & t^2O(1) & \omega_1 + tO(1) \\ t^2O(1) & t+t^2O(1) & \ldots & t^2O(1) & \omega_2 + tO(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t^2O(1) & t^2O(1) & \ldots & t+t^2O(1) & \omega_n + tO(1) \\ 0 & \omega_2/|\omega| & \ldots & \omega_n/|\omega| & 0 \end{vmatrix}. \tag{1.14}$$

Поясним, что аналогично матрице B здесь элементы $t+t^2O(1)$ находятся только на главной диагонали. Определитель $\det(J_1)$ нетрудно выписать. Представляя первый столбец в виде суммы двух столбцов и разлагая определитель $\det(J_1)$ на сумму двух определителей, получим

$$\det(J_1) = \begin{vmatrix} -1 & t^2O(1) & \ldots & t^2O(1) & \omega_1 + tO(1) \\ 0 & t+t^2O(1) & \ldots & t^2O(1) & \omega_2 + tO(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & t^2O(1) & \ldots & t+t^2O(1) & \omega_n + tO(1) \\ 0 & \omega_2/|\omega| & \ldots & \omega_n/|\omega| & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t^2O(1) & t^2O(1) & \ldots & t^2O(1) & \omega_1 + tO(1) \\ t^2O(1) & t+t^2O(1) & \ldots & t^2O(1) & \omega_2 + tO(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t^2O(1) & t^2O(1) & \ldots & t+t^2O(1) & \omega_n + tO(1) \\ 0 & \omega_2/|\omega| & \ldots & \omega_n/|\omega| & 0 \end{vmatrix}. \tag{1.15}$$

Нетрудно видеть, что в правой части (1.15) второй определитель есть функция вида $t^{n-1}O(1)$, а первый определитель можно разложить по первому столбцу и свести его к определителю порядка n, для которого применима лемма 1.2, где $\xi_i(x, \omega, t) = \omega_{i+1} + tO(1)$, $\eta_i(x, \omega, t) = \omega_{i+1}/|\omega|$, $i \le m-1$, $m = n$. Таким образом получаем $\det(J_1) = t^{n-2}\big(\omega_2^2 + \cdots + \omega_n^2\big)/|\omega| + t^{n-1}O(1) = t^{n-2}/|\omega|\big(\omega_2^2 + \cdots + \omega_n^2 + tO(1)\big)$, $O(1) \in \mathbb{C}^1(T_\epsilon)$. Тогда, используя равенство (1.9), имеем

$$D_1\psi_1(x, \tilde{y}) = \frac{\det(J_1)}{\det(J(\tilde{y}/(\omega, t)))} = \frac{-1}{t}\,\frac{\omega_2^2 + \cdots + \omega_n^2 + tO(1)}{|\omega|(|\omega| + t\gamma(x, \omega, t))}.$$

Так как в силу условия (1.10) знаменатель последней дроби отделен от нуля, верно неравенство $|D_1\psi_1(x, \tilde{y})| \le \mathrm{const}/t$.

Отметим наличие связей $\omega_i = \psi_i(x, \tilde{y})$ и равноправность между собой переменных $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, что верно также для $(x_1, \ldots, x_n,)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$. Поэтому аналогично оценкам для $|D_1\psi_1(x, \tilde{y})|$ получаются такие же оценки и для $D_k\psi_i(x, \tilde{y})$, т. е. верны неравенства $|D_k\psi_i(x, \tilde{y})| \le \mathrm{const}/t$, $i, k = 1, \ldots, n$.

Ввиду равенства $t = \psi_{n+1}(x, \tilde{y})$ функция $\psi_{n+1}(x, \tilde{y})$ существенно отличается от $\psi_i(x, \tilde{y})$, $i \le n$. Поэтому проведем для нее отдельное исследование. Определитель, нужный для нахождения $D_1\psi_{n+1}(x, \tilde{y})$, имеет вид

$$\det(J_{n+1}) = \begin{vmatrix} t+t^2O(1) & t^2O(1) & \ldots & t^2O(1) & -1+t^2O(1) \\ t^2O(1) & t+t^2O(1) & \ldots & t^2O(1) & t^2O(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t^2O(1) & t^2O(1) & \ldots & t+t^2O(1) & t^2O(1) \\ \omega_1/|\omega| & \omega_2/|\omega| & \ldots & \omega_n/|\omega| & 0 \end{vmatrix}.$$

Так же, как и для определителя $\det(J_1)$, представим последний столбец в виде суммы двух столбцов и, разлагая определитель $\det(J_{n+1})$ на сумму двух определителей, получим

$$\det(J_{n+1}) = \begin{vmatrix} t+t^2O(1) & t^2O(1) & \dots & t^2O(1) & -1 \\ t^2O(1) & t+t^2O(1) & \dots & t^2O(1) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^2O(1) & t^2O(1) & \dots & t+t^2O(1) & 0 \\ \omega_1/|\omega| & \omega_2/|\omega| & \dots & \omega_n/|\omega| & 0 \end{vmatrix} + t^nO(1). \qquad (1.16)$$

Для определителя в правой части (1.16) применим лемму 1.2, полагая $m = n+1$, $\eta_i = \omega_i/|\omega|$, $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = \dots = \xi_n = 0$, стало быть, $\det(J_{n+1}) = t^{n-1}\omega_1/|\omega| + t^nO(1)$. Следовательно,

$$D_1\psi_{n+1}(x,\tilde{y}) = \frac{\det(J_{n+1})}{\det(J(\tilde{y}/(\omega,t)))} = -\frac{\omega_1/|\omega| + tO(1)}{|\omega| + t\gamma(x,\omega,t)}, \quad |D_1\psi_{n+1}(x,\tilde{y})| \le \mathrm{const}\,.$$

Аналогично получаются оценки

$$|D_k\psi_{n+1}(x,\tilde{y})| \le \mathrm{const}, \quad k = 1,\dots,n. \qquad (1.17)$$

Схема исследования производных от функций $\psi_i(x,\tilde{y})$ по y_k совпадает с таковой для производных по x_k, $k = 1,\dots,n$, $i = 1,\dots,n+1$. Проведем рассуждения для переменной y_1, для других переменных y_k результат будет такой же по уже высказанным причинам. Дифференцируя (1.12) по y_1 и опуская для краткости аргументы, получаем

$$1 = D_{n+1}\varphi_1 D_{n+1}\psi_1 + D_{n+2}\varphi_1 D_{n+1}\psi_2 + \dots + D_{2n}\varphi_1 D_{n+1}\psi_n + D_{2n+1}\varphi_1 D_{n+1}\psi_{n+1},$$
$$0 = D_{n+1}\varphi_2 D_{n+1}\psi_1 + D_{n+2}\varphi_2 D_{n+1}\psi_2 + \dots + D_{2n}\varphi_2 D_{n+1}\psi_n + D_{2n+1}\varphi_2 D_{n+1}\psi_{n+1},$$
$$\dots$$
$$0 = D_{n+1}\varphi_n D_{n+1}\psi_1 + D_{n+2}\varphi_n D_{n+1}\psi_2 + \dots + D_{2n}\varphi_n D_{n+1}\psi_n + D_{2n+1}\varphi_n D_{n+1}\psi_{n+1},$$
$$0 = D_{n+1}\varphi_{n+1} D_{n+1}\psi_1 + D_{n+2}\varphi_{n+1} D_{n+1}\psi_2 + \dots + D_{2n}\varphi_{n+1} D_{n+1}\psi_n + D_{2n+1}\varphi_{n+1} D_{n+1}\psi_{n+1}. \qquad (1.18)$$

Как и для (1.13), равенства (1.18) рассматриваем как систему линейных уравнений относительно $D_{n+1}\psi_i$, которую решаем по правилу Крамера. Определитель, нужный для нахождения $D_{n+1}\psi_1(x,\tilde{y})$, имеет вид

$$\det(I_1) = \begin{vmatrix} 1 & t^2O(1) & \dots & t^2O(1) & \omega_1 + tO(1) \\ 0 & t+t^2O(1) & \dots & t^2O(1) & \omega_2 + tO(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & t^2O(1) & \dots & t+t^2O(1) & \omega_n + tO(1) \\ 0 & \omega_2/|\omega| & \dots & \omega_n/|\omega| & 0 \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель $\det(I_1)$ по первому столбцу и применяя лемму 1.2, получаем

$$\det(I_1) = -\frac{t^{n-2}}{|\omega|}\big(\omega_2^2 + \dots + \omega_n^2\big) + t^{n-1}O(1) = -\frac{t^{n-2}}{|\omega|}\big(\omega_2^2 + \dots + \omega_n^2 + tO(1)\big).$$

Снова используя равенство (1.9), имеем

$$D_{n+1}\psi_1(x,\tilde{y}) = \frac{\det(I_1)}{\det(J(\tilde{y}/(\omega,t)))} = \frac{1}{t}\,\frac{\omega_2^2 + \dots + \omega_n^2 + tO(1)}{|\omega|^2 + |\omega|t\gamma(x,\omega,t)}.$$

Отсюда легко следует неравенство $|D_{n+1}\psi_1(x,\tilde{y})| \le \mathrm{const}/t$. Вполне аналогично получаются неравенства $|D_{n+k}\psi_i(x,\tilde{y})| \le \mathrm{const}/t$; $k=1,\dots,n$, $i=1,\dots,n$.

Ввиду равенства $t=\psi_{n+1}(x,\tilde{y})$ для производной $D_{n+1}\psi_{n+1}(x,\tilde{y})$ приходится проводить отдельное исследование, поскольку переменная t играет особую роль в соотношениях (1.4). Вместе с тем схема рассуждений остается прежней, в частности, получим оценку для производной по переменной y_1, считая, что для других y_k, $k=2,\dots,n$, все аналогично. Снова обращаемся к системе (1.18) и видим, что для вычисления $D_{n+1}\psi_{n+1}(x,\tilde{y})$ нам понадобится определитель $\det(I_{n+1})$:

$$\det(I_{n+1}) = \begin{vmatrix} t+t^2O(1) & t^2O(1) & \dots & t^2O(1) & 1 \\ t^2O(1) & t+t^2O(1) & \dots & t^2O(1) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^2O(1) & t^2O(1) & \dots & t+t^2O(1) & 0 \\ \omega_1/|\omega| & \omega_2/|\omega| & \dots & \omega_n/|\omega| & 0 \end{vmatrix}.$$

Применяя лемму 1.2, получим

$$\det(I_{n+1}) = -t^{n-1}\omega_1/|\omega| + t^nO(1), \quad |D_{n+1}\psi_{n+1}(x,\tilde{y})| \le \mathrm{const},$$

$$|D_{n+k}\psi_{n+1}(x,\tilde{y})| \le \mathrm{const}, \quad k=1,\dots,n.$$

Тем самым лемма 1.4 доказана.

Функции $\psi_i(x,\tilde{y})$, $\psi(x,\tilde{y})$ при $y_{n+1}=1$ будем обозначать соответственно $\psi_i(x,y)$, $\psi(x,y)$, $i=1,\dots,n+1$. Напомним, что при $|\omega|=1$ или, что то же, $y_{n+1}=1$, переменная t означает длину дуги $L(x,\omega)$ от точки x до y.

Лемма 1.5. *Для переменных x,y,ω,t, связанных равенствами* (1.4), *при* $|\omega|=1$ $(y_{n+1}=1)$ *верны соотношения*

$$\begin{gathered} \mathrm{const}\,|y-x| \le t \le \mathrm{const}\,|y-x|, \\ |y-x| = t(1+t\delta(x,\omega,t)),\ \ \delta(x,\omega,t)\in\mathbb{C}^1(T), \quad |\omega-s|\le \mathrm{const}\,|y-x|, \\ \left|\frac{\partial(\omega-s)}{\partial x_k}\right| \le \mathrm{const},\ \ k=1,\dots,n, \quad s=(y-x)/|y-x|. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Доказательство. Соотношения (1.19) будем доказывать в том порядке, в каком они указаны в формулировке леммы. Прежде всего отметим неравенство $|x-y|\le t$, которое выражает тот факт, что длина любой кривой, соединяющей точки x,y, не меньше, чем расстояние между этими точками. Поскольку $t=\psi_{n+1}(x,y)$, $\psi_{n+1}(x,x)=0$ и, как следует из леммы 1.4, $|\nabla\psi_{n+1}(x,y)|\le\mathrm{const}$, то $|\psi_{n+1}(x,x)-\psi_{n+1}(x,y)|\le\mathrm{const}\,|y-x|$, т. е. $t\le\mathrm{const}\,|y-x|$.

Далее, из (1.4) вытекает

$$y-x = t\omega + t^2\alpha(x,\omega,t), \quad |y-x| = t|\omega + t\alpha(x,\omega,t)|,$$

причем в силу уже доказанных в этой лемме неравенств имеем $\mathrm{const} \le |\omega + t\alpha(x,\omega,t)| \le \mathrm{const}$. Обозначим $\lambda(x,\omega,t) = |\omega+t\alpha(x,\omega,t)|$ и представим эту функцию в виде $\lambda(x,\omega,t) = (1+2t(\omega,\alpha(x,\omega,t)) + t^2|\alpha(x,\omega,t)|^2)^{0.5}$. Для достаточно малого числа $\eta>0$ при $t\in[0,\eta]$ можно разложить $\lambda(x,\omega,t)$ по t в биномиальный ряд, допускающий почленное дифференцирование. Следовательно, имеем равенство $\lambda(x,\omega,t)=1+t\delta_1(x,\omega,t)$, $t\in[0,\eta]$, причем $\delta_1(x,\omega,t)\in\mathbb{C}^1(G\times\Omega\times[0,\eta])$. С другой стороны, разлагая $\lambda(x,\omega,t)$ по t по формуле Тейлора

(1.1), получаем $\lambda(x,\omega,t) = 1 + t\delta_2(x,\omega,t)$, $t \in [0, l(x,\omega)]$, причем при $t > 0$ функция $\delta_2(x,\omega,t)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным. Сравнивая полученные два представления для $\lambda(x,\omega,t)$, убеждаемся в том, что

$$|y-x| = t(1 + t\delta(x,\omega,t)), \quad \delta(x,\omega,t) \in \mathbb{C}^1(T), \tag{1.20}$$

где $\delta(x,\omega,t) = \delta_2(x,\omega,t)$.

Далее запишем тождества

$$\frac{y-x}{|y-x|} - \omega = \frac{t\omega + t^2\alpha(x,\omega,t)}{|y-x|} - \omega = \frac{t\omega}{|y-x|} - \omega + \frac{t^2\alpha(x,\omega,t)}{|y-x|}.$$

Используя уже полученное представление $|y-x| = t(1+t\delta(x,\omega,t))$, продолжим равенства

$$\frac{y-x}{|y-x|} - \omega = \frac{\omega}{1+t\delta(x,\omega,t)} - \omega + \frac{t\alpha(x,\omega,t)}{1+t\delta(x,\omega,t)} = \frac{t(\alpha(x,\omega,t) - \omega\delta(x,\omega,t))}{1+t\delta(x,\omega,t)}.$$

Отсюда с учетом неравенств $\mathrm{const} \le 1 + t\delta(x,\omega,t) \le \mathrm{const}$ легко следует, что $|s-\omega| \le t\,\mathrm{const} \le \mathrm{const}\,|y-x|$.

Применяя (1.20), легко убедиться в том, что

$$|y-x|^{n-1} = t^{n-1}(1 + t\mu(x,\omega,t)), \quad \mathrm{const} \le 1 + t\mu(x,\omega,t) \le \mathrm{const}, \tag{1.21}$$

где $\mu(x,\omega,t) \in \mathbb{C}^1(T)$.

Для доказательства последнего утверждения в лемме используем уже полученные соотношения

$$s - \omega = \frac{t(\alpha(x,\omega,t) - \omega\delta(x,\omega,t))}{1+t\delta(x,\omega,t)}, \quad \mathrm{const} \le 1 + t\delta(x,\omega,t) \le \mathrm{const}\,. \tag{1.22}$$

Отсюда с учетом принадлежности функций $\alpha_i(x,\omega,t)$, $\delta(x,\omega,t)$ пространству $\mathbb{C}^1(T)$, а также соотношений $t = \psi_{n+1}(x,y)$, $|\nabla\psi_{n+1}(x,y)| \le \mathrm{const}$, делаем вывод о справедливости неравенства $|\partial(\omega - s)/\partial x_k| \le \mathrm{const}$. Тем самым лемма 1.5 доказана полностью.

2. Основные утверждения

Снова рассмотрим криволинейный интеграл первого рода

$$\int\limits_{L(x,\omega)} \theta(x,y,\omega)\, d_y\sigma = F(x,\omega), \quad (x,\omega) \in G_0 \times \Omega,\ \theta(x,y,\omega) \in \mathbb{K}. \tag{2.1}$$

Как и раньше, доопределим $F(x,\omega)$ в точках $(z,\omega) \in \partial G_0 \times \Omega$ ее верхним пределом. Как следует из леммы 1.1, функция $F(x,\omega)$ непрерывна в $G_0 \times \Omega$ и ограничена в $G \times \Omega$.

Лемма 2.1. *Интеграл по* $\omega \in \Omega$ *от правой части равенства* (2.1) *можно представить в виде*

$$\int\limits_{G} \frac{\theta(x,y,\omega)\, dy}{|\det(J(y/(\omega,t)))|} = \int\limits_{\Omega} F(x,\omega)\, d\omega, \quad (x,\omega) \in G \times \Omega, \tag{2.2}$$

где якобиан $\det(J(y/(\omega,t)))$ *выражен через* x, y *посредством равенства* $(\omega,t) = \widetilde{\psi}(x,y)$.

Доказательство. От криволинейного интеграла в (2.1) перейдем к обычному, используя задание кривой $L(x,\omega)$ в виде $y = \varphi(x,\omega,t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in (0, l(x,\omega))$, и получим

$$\int\limits_0^{l(x,\omega)} \theta(x,\varphi(x,\omega,t),\omega)\,dt = F(x,\omega). \tag{2.3}$$

Продолжим функцию $\theta(x,y,\omega)$ в цилиндр $(y, y_{n+1}) \in G \times (1-\epsilon, 1+\epsilon)$ тождественно по y_{n+1}. Полученное продолжение будем обозначать через $\theta(x,\tilde{y},\omega)$ или $\theta(x,y,y_{n+1},\omega)$. Очевидно, имеем $\theta(x,y,y_{n+1},\omega) = \theta(x,y,1,\omega) = \theta(x,y,\omega)$. Продолжая $\varphi(x,y,\omega)$ по ω в шаровой слой Ω_ϵ по формуле $\varphi(x,y,\omega) = |\omega|\varphi(x,y,\omega/|\omega|)$, как это делалось в соотношениях (1.4), и используя это продолжение в равенстве (2.3), получим

$$\int\limits_0^{l(x,\omega/|\omega|)} \theta(x,\widetilde{\varphi}(x,\omega,t),\omega)\,dt = F(x,\omega), \quad \omega \in \Omega_\epsilon. \tag{2.4}$$

Применяя указанные продолжения в левой части (2.4), получаем соответствующее продолжение функции $F(x,\omega)$ в правой части, которое также непрерывно в $G_0 \times \Omega_\epsilon$ и ограничено в $G \times \Omega_\epsilon$.

Проинтегрируем последнее равенство по $\omega \in \Omega_\epsilon$:

$$\int\limits_{\Omega_\epsilon} \int\limits_0^{l(x,\omega/|\omega|)} \theta(x,\widetilde{\varphi}(x,\omega,t),\omega,)\,dtd\omega = \int\limits_{\Omega_\epsilon} F(x,\omega)\,d\omega.$$

Сделаем замену переменных $\tilde{y} = \widetilde{\varphi}(x,\omega,t)$, $\omega \in \Omega_\epsilon$, $t \in (0, l(x,\omega/|\omega|))$. Согласно предположениям это отображение переводит множество точек (ω,t), $\omega \in \Omega_\epsilon$, $t \in (0, l(x,\omega/|\omega|))$, на $Y_{x,\epsilon}$ взаимно однозначно. Обратное отображение имеет вид $(\omega,t) = \widetilde{\psi}(x,\tilde{y})$. Якобиан обратного отображения обозначается через $\det(J((\omega,t)/\tilde{y}))$. Он может быть выражен через якобиан $\det(J(\tilde{y}/(\omega,t)))$ посредством равенства

$$\det(J((\omega,t)/\tilde{y})) = (\det(J(\tilde{y}/(\omega,t))))^{-1}, \quad (\omega,t) = \widetilde{\psi}(x,\tilde{y}). \tag{2.5}$$

Тогда получаем

$$\int\limits_{Y_{x,\epsilon}} \frac{\theta(x,\tilde{y},\omega)\,d\tilde{y}}{|\det(J(\tilde{y}/(\omega,t)))|} = \int\limits_{\Omega_\epsilon} F(x,\omega)\,d\omega.$$

Учитывая структуру множества $Y_{x,\varepsilon}$ и применяя теорему Фубини, имеем

$$\int\limits_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} dy_{n+1} \int\limits_{y_{n+1}G} \frac{\theta(x,y,y_{n+1},\omega)\,dy}{|\det(J(\tilde{y}/(\omega,t)))|} = \int\limits_{\Omega_\epsilon} F(x,\omega)\,d\omega. \tag{2.6}$$

Обратим внимание на внутренний интеграл в левой части (2.6). Используя равенства (1.9) и (1.21), его можно представить в виде интеграла по $y \in G$ от выражения $|y-x|^{-(n-1)}\varrho(x,y,y_{n+1})$, где функция $\varrho(x,y,y_{n+1})$ непрерывна и ограничена. Из известных свойств интегралов типа потенциала следует, что внутренний интеграл в левой части (2.6) непрерывен по (x, y_{n+1}) и ограничен [14]. Как отмечалось, функция $F(x,\omega)$ в правой части (2.6) непрерывна по $(x,\omega) \in G_0 \times \Omega_\epsilon$. Поэтому, деля обе части равенства (2.6) на 2ϵ, устремляя ϵ к нулю и используя теорему о среднем для интегралов, в пределе получаем равенство (2.2). Лемма 2.1 доказана.

Обозначим через $V(x)$ интеграл по $\omega \in \Omega$ в правой части в (2.2).

Лемма 2.2. *Равенство* (2.2) *можно представить в виде*

$$\int\limits_G \frac{\theta(x,y,s)\,dy}{|y-x|^{n-1}} + \Lambda(x) = V(x), \quad s = (y-x)/|y-x|, \tag{2.7}$$

где функция $\Lambda(x)$ *принадлежит классу* $\mathbb{C}^1(G)$.

Доказательство. Проанализируем выражение $|\det(J(y/(\omega,t)))|$, которое является следом функции $|\det(J(\tilde{y}/(\omega,t)))|$ при $|\omega| = 1$. Используя формулу (1.9), запишем $|\det(J(y/(\omega,t)))| = t^{n-1}(1+t\gamma(x,\omega,t))$, $\gamma(x,\omega,t) \in \mathbb{C}^1(T)$. Тогда

$$\frac{1}{|\det(J(y/(\omega,t)))|} = \frac{1}{t^{n-1}(1+t\gamma(x,\omega,t))} \\ = \frac{1}{|y-x|^{n-1}} + \frac{1}{t^{n-1}(1+t\gamma(x,\omega,t))} - \frac{1}{|y-x|^{n-1}}.$$

Применяя простое числовое тождество

$$\frac{1}{a(1+b)} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a(1+b)}, \quad a \neq 0,\ 1+b \neq 0,$$

и равенство в (1.21), получаем

$$\frac{1}{|\det(J(y/(\omega,t)))|} = \frac{1}{|y-x|^{n-1}} + \frac{1}{t^{n-1}} - \frac{\gamma(x,\omega,t)}{t^{n-2}(1+t\gamma(x,\omega,t))} - \frac{1}{|y-x|^{n-1}} \\ = \frac{1}{|y-x|^{n-1}} + \frac{\mu(x,\omega,t)-\gamma(x,\omega,t)}{t^{n-2}(1+t\gamma(x,\omega,t))(1+t\mu(x,\omega,t))}.$$

Обозначим $Q(x,y) = \theta(x,y,\omega)(\mu(x,\omega,t) - \gamma(x,\omega,t))$. Тогда (2.2) запишется в виде

$$\int\limits_G \frac{\theta(x,y,\omega)\,dy}{|y-x|^{n-1}} + \int\limits_G \frac{Q(x,y)\,dy}{t^{n-2}(1+t\mu(x,\omega,t))(1+t\gamma(x,\omega,t))} = V(x). \tag{2.8}$$

Напомним, что здесь и далее переменные (ω,t) выражаются через x,y посредством равенства $(\omega,t) = \widetilde{\psi}(x,y)$.

Используем в (2.8) равенство $\theta(x,y,\omega) = \theta(x,y,s) + \theta(x,y,\omega) - \theta(x,y,s)$ и получим

$$\int\limits_G \frac{\theta(x,y,s)\,dy}{|y-x|^{n-1}} + \int\limits_G \frac{(\theta(x,y,\omega)-\theta(x,y,s))\,dy}{|y-x|^{n-1}} \\ + \int\limits_G \frac{Q(x,y)\,dy}{t^{n-2}(1+t\mu(x,\omega,t))(1+t\gamma(x,\omega,t))} = V(x). \tag{2.9}$$

Отметим, что здесь при $x \neq y$ все подынтегральные выражения имеют непрерывные частные производные по x_k, y_k, $k = 1,\dots,n$, которые, вообще говоря, неограниченны. Обозначим второй и третий интегралы в левой части (2.9) соответственно через $\Lambda_1(x)$, $\Lambda_2(x)$ и докажем, что их сумма есть функция $\Lambda(x)$, указанная в формулировке леммы. Вычислим производную по x_k от числителя во втором интеграле в левой части (2.9). Принимая во внимание равенство $\omega_i = \psi_i(x,y)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\theta(x,y,\omega)-\theta(x,y,s)) = D_k\theta(x,y,\omega) - D_k\theta(x,y,s)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(D_{2n+i}\theta(x,y,\omega)D_k\omega_i - D_{2n+i}\theta(x,y,s)D_k s_i) = D_k\theta(x,y,\omega) - D_k\theta(x,y,s)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(D_{2n+i}\theta(x,y,\omega)(D_k(\omega_i - s_i)) + (D_{2n+i}\theta(x,y,\omega) - D_{2n+i}\theta(x,y,s))D_k s_i).$$

Теперь воспользуемся неравенствами

$$|D_k\theta(x,y,\omega) - D_k\theta(x,y,s)| \le \mathrm{const}, \quad |D_k(\omega_i - s_i)| \le \mathrm{const},$$
$$|D_{2n+i}\theta(x,y,\omega) - D_{2n+i}\theta(x,y,s)| \le \mathrm{const}\,|\omega - s| \le \mathrm{const}\,|y-x|,$$
$$|D_k s_i| \le \mathrm{const}\,|y-x|^{-1}.$$

Этого достаточно, чтобы получить оценку

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}(\theta(x,y,\omega)-\theta(x,y,s))\right| \le \mathrm{const}\,.$$

Дополнительно к этому, учитывая неравенства

$$|\theta(x,y,\omega)-\theta(x,y,s)| \le \mathrm{const}\,|\omega - s| \le \mathrm{const}\,|y-x|,$$

убеждаемся в том, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{(\theta(x,y,\omega)-\theta(x,y,s))}{|y-x|^{n-1}}\right| \le \frac{\mathrm{const}}{|y-x|^{n-1}}.$$

Отсюда следует, что $\Lambda_1(x) \in \mathbb{C}^1(G)$. Осталось проанализировать третий интеграл в левой части (2.9). Примем во внимание следующие соотношения:

$$\mathrm{const} \le 1 + t\gamma(x,\omega,t) \le \mathrm{const}, \quad |x-y|\,\mathrm{const} \le t \le |x-y|\,\mathrm{const},$$
$$\mathrm{const} \le 1 + t\mu(x,\omega,t) \le \mathrm{const}, \quad t = \psi_{n+1}(x,y), \quad |\nabla\psi_{n+1}(x,y)| \le \mathrm{const},$$
$$\omega_i = \psi_i(x,y), \quad |\nabla\psi_i(x,y)| \le \mathrm{const}\,|y-x|^{-1}, \quad i = 1,\dots,n.$$

Отсюда нетрудно получить неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{Q(x,y)\,dy}{t^{n-2}(1+t\mu(x,\omega,t))}\right| \le \frac{\mathrm{const}}{|y-x|^{n-1}}.$$

Следовательно, $\Lambda_2(x) \in \mathbb{C}^1(G)$. Тем самым лемма 2.2 доказана.

Обратимся снова к уравнению (1.3). Умножая обе его части на произвольную пока функцию $\beta(x,\omega)$ из класса $\mathbb{C}^2(G\times\Omega)$ и интегрируя по $\omega\in\Omega$, получим

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\int_{L(x,A_i\omega)}\beta(x,\omega)g_i(x,y,A_i\omega)\,d_y\sigma d\omega = \int_{\Omega}\beta(x,\omega)H(x,\omega)\,d\omega, \quad (x,\omega)\in G\times\Omega.$$

Ввиду того, что $A_i\omega \in \Omega$ для любого $\omega \in \Omega$, можем применить здесь для каждого слагаемого тождества (2.2), (2.7). Тогда, используя обозначения

$$q_i(x,y,\omega) = \beta(x, A^{-1}\omega) g_i(x,y,\omega), \quad q(x,y,\omega) = \sum_{i=1}^{N} q_i(x,y,\omega),$$

получим равенство

$$\int_G \frac{q(x,y,s)\,dy}{|y-x|^{n-1}} + \Gamma(x) = W(x), \quad s = (y-x)/|y-x|, \tag{2.10}$$

где

$$W(x) = \int_\Omega \beta(x,\omega) H(x,\omega)\,d\omega, \quad \Gamma(x) \in \mathbb{C}^1(G). \tag{2.11}$$

Обозначим через $\Phi(x)$ интеграл в левой части (2.10), $n_j(z)$ — единичный вектор внутренней нормали к поверхности ∂G_j в точке $z \in \partial G_j$, $j = 1, \ldots, p$.

В [12] нами доказана

Теорема 2.1 [12]. *Функция $\Phi(x)$, $x \in G_0$, имеет непрерывные частные производные первого порядка, ограниченные на любом непустом множестве $\{x : x \in G_0,\ \rho(x, \partial G_0) > \varepsilon > 0\}$. Для любой контактной точки $z \in \partial G_j \cap \partial G_l$, $1 \le j, l \le p$, $j \ne l$, и точек $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < |\tau| \le \tau_0$ (τ_0 — достаточно малое положительное число), имеет место равенство*

$$|\nabla\Phi(x)| = |M(z)|\,|\ln \rho(x, \partial G_0)| + O(1), \tag{2.12}$$

где

$$M(z) = \int_{\Omega_z} \sum_{i=1}^{N} [q_i(z,z,\omega)]_{j,l}\,d\omega, \quad \Omega_z = \{\omega : \omega \in \Omega,\ (\omega, n_j(z)) = 0\}, \quad n > 2,$$

$$M(z) = \sum_{i=1}^{N} ([q_i(z,z,\omega_0(z))]_{j,l} + [q_i(z,z,-\omega_0(z))]_{j,l}), \quad (\omega_0(z), n_j(z)) = 0, \quad n = 2.$$

Очевидным выводом из этой теоремы является

Следствие 2.1. *При выполнении условия*

$$M(z) \ne 0 \tag{2.13}$$

функция $|\nabla\Phi(x)|$ не ограничена только вблизи поверхности ∂G_0.

Напомним, что наш объект исследования — уравнение (1.3) — было преобразовано в уравнение (2.10). Такая же схема была использована и в [12], где мы исследовали аналогичную задачу для случая, когда $L(x,\omega)$ — прямые. Тогда мы получили уравнение, которое является частным случаем (2.10) при $\Gamma(x) = 0$. Доказательство теоремы единственности в [12] основано на свойстве неограниченности $|\nabla\Phi(x)|$ вблизи искомой поверхности ∂G_0 (следствие 2.1). Поскольку в (2.10) $|\nabla\Gamma(x)| \le \mathrm{const}$, неограниченной оказывается величина $|\nabla W(x)|$, и доказательство теоремы единственности в настоящей работе совпадает с доказательством такого же факта в [12]. Поэтому здесь ограничимся только формулировкой следующего утверждения.

Теорема 2.2. *Если для каждой контактной точки $z \in \partial G_0$ выполнено условие* (2.13), *т. е. $M(z) \neq 0$, то задача о неизвестной границе на основании данных* (1.3) *имеет не более одного решения.*

Замечание 2.1. Из доказательства теоремы единственности в [12] легко следует ее локальная форма, приведенная в [11]. Аналогичное дополнение к теореме 2.2 в настоящей работе состоит в том, что задача нахождения только той части искомой поверхности, где выполняется условие (2.13), имеет не более одного решения.

В заключение приведем комментарии, аналогичные комментариям в [12].

Замечание 2.2. Весовая функция $\beta(x, \omega)$ играет роль резерва, и ее выбор можно использовать для улучшения алгоритма решения задачи о неизвестной границе. Так, в частности, если искать поверхность ∂G_0 по аномально большим значениям величины $|\nabla W(x)|$, то полезно выбрать положительную функцию $\beta(x, \omega)$, удовлетворяющую условию $\beta(x, \omega) \to 0$ при $\rho(x, \partial G) \to 0$. Такая весовая функция может служить своеобразным фильтром, уменьшая значения $|\nabla W(x)|$ вблизи поверхности ∂G, которая и так известна из постановки задачи.

Замечание 2.3. Обратим внимание на условный характер теоремы 2.2, поскольку неравенство $M(z) \neq 0$ содержит неизвестные функции и задано на неизвестной границе. Однако нетрудно привести простые условия, гарантирующие условие (2.13). При положительной функции $\beta(x, \omega)$ достаточно потребовать выполнения неравенств $[g_i(z, z, \omega)]_{j,l} \leq 0$ или $[g_i(z, z, \omega)]_{j,l} \geq 0$, $\omega \in \Omega$, для всех i, $1 \leq i \leq m$, причем хотя бы для одного номера i неравенство должно быть строгим. Эти условия можно понимать так, что в контактной точке z разрыв хотя бы одной из функций $g_i(x, y, \omega)$, $i = 1, \ldots, N$, действительно существует при $x = z$, $y = z$, $\omega \in \Omega$, а возможные разрывы других функций $g_i(x, y, \omega)$ этот разрыв не компенсируют.

Вообще, можно надеяться, что условие $M(z) \neq 0$ не будет серьезным препятствием для применения полученных результатов. По крайней мере отрицание этого условия, т. е. равенство $M(z) = 0$, в случае существования искомой поверхности разрывов означает наличие специфических связей между параметрами задачи и вряд ли будет выполняться в широком классе различных случаев.

Замечание 2.4. В работе есть некоторые ограничения, принятые только для сокращения рассуждений. Таким образом, несмотря на итоговый характер полученных результатов, остается возможность небольшого усовершенствования выводов в плане минимизации предположений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. М.: Мир, 1983.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
3. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
4. *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.
5. *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Ин-т математики, 1999.
6. *Романов В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1973.
7. *Аниконов Д. С.* Задача типа Стефана для уравнения переноса // Докл. АН. 1994. Т. 338, № 1. С. 25–28.

8. *Коновалова Д. С.* Поэтапное решение обратной задачи для уравнения переноса применительно к задаче томографии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 1. С. 189–199.
9. *Аниконов Д. С.* Специальная задача интегральной геометрии // Докл. АН. 2007. Т. 415, № 1. С. 7–9.
10. *Аниконов Д. С.* Индикатор контактных границ для одной задачи интегральной геометрии // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49. С. 739–755.
11. *Аниконов Д. С., Коновалова Д. С.* Проблема недоопределенности в задаче интегральной геометрии // Докл. АН. 2011. Т. 438, № 1. С. 7–10.
12. *Аниконов Д. С., Коновалова Д. С.* Задача интегральной геометрии о неизвестной границе для пучка прямых // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 962–976.
13. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
14. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. школа, 1977.
15. *Романов В. Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1969.
16. *Вертгейм Л. Б.* Задача интегральной геометрии вдоль нескольких семейств кривых и ее применение к обратной задаче для системы уравнений Власова. Новосибирск, 1999. 15 с. (Препринт/Ин-т математики СО РАН; № 66).

Статья поступила 22 мая 2014 г.

Аниконов Дмитрий Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
anik@math.nsc.ru

Коновалова Дина Сергеевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
dsk@math.nsc.ru