Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 512.543

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ НЕКОТОРЫМИ КЛАССАМИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ОБОБЩЕННОГО СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП С НОРМАЛЬНОЙ ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

Д. Н. Азаров

Аннотация. Пусть G — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, $H \neq A$ и $H \neq B$, и пусть π — конечное множество простых чисел. Доказано, что группа G почти аппроксимируема конечными π-группами тогда и только тогда, когда A, B, A/H и B/H почти аппроксимируемы конечными π-группами.

Ключевые слова: обобщенное свободное произведение, разрешимая группа, финитная аппроксимируемость, почти аппроксимируемость конечными p-группами.

1. Введение

Пусть $\mathscr{K}$ — некоторый класс групп. Напомним, что группа G называется *аппроксимируемой группами из класса* $\mathscr{K}$ (или коротко $\mathscr{K}$*-аппроксимируемой*), если для любого неединичного элемента a группы G существует гомоморфизм группы G на некоторую группу из класса $\mathscr{K}$, при котором образ элемента a отличен от 1. Группа G называется *почти* $\mathscr{K}$*-аппроксимируемой*, если она содержит $\mathscr{K}$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса. Вообще, группа обладает каким-либо свойством почти, если она содержит подгруппу конечного индекса с этим свойством.

Если $\mathscr{F}$ обозначает класс всех конечных групп, то понятие $\mathscr{F}$-аппроксимируемости совпадает с классическим понятием финитной аппроксимируемости. Наряду с финитной аппроксимируемостью изучается более тонкое свойство $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости, где p — некоторое простое число, $\mathscr{F}_p$ — класс всех конечных p-групп. Изучается также свойство $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π — некоторое множество простых чисел, $\mathscr{F}_\pi$ — класс всех конечных π-групп. Особый интерес представляет случай, когда множество π конечно.

Заметим, что если группа почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел (в частности, если она почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для некоторого простого p), то найдется конечное множество Π простых чисел, для которого данная группа $\mathscr{F}_\Pi$-аппроксимируема. Действительно, если группа содержит нормальную $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемую подгруппу конечного индекса n, то искомое множество Π получается добавлением к множеству π всех простых делителей числа n.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки в рамках выполнения НИР по государственному заданию.

Перейдем теперь к свободным произведениям с объединенными подгруппами. Пусть A и B — произвольные группы, H и K — подгруппы групп A и B соответственно, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. Пусть, кроме того, $G = (A * B; H = K, \varphi)$ — свободное произведение групп A и B с подгруппами H и K, объединенными относительно изоморфизма φ. Хорошо известно, что группы A и B естественным образом вложимы в группу G. Поэтому далее будем считать, что A и B — подгруппы группы G. Тогда $A \cap B = H = K$. Далее для группы G будем использовать более компактное обозначение $G = (A * B, H)$ и называть ее *свободным произведением групп A и B с объединенной подгруппой H*. Здесь будет рассмотрено свободное произведение G групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. Это означает, что подгруппа H нормальна в группах A и B (или, что равносильно, H нормальна в G).

В 1963 г. Баумслаг в [1] доказал, что свободное произведение двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой является $\mathscr{F}$-аппроксимируемой группой. В действительности, для такого свободного произведения имеет место следующее более тонкое и нетривиальное утверждение, недавно установленное А. В. Розовым и являющееся частным случаем результатов настоящей работы: *свободное произведение двух полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемо для каждого простого числа p.*

Напомним, что для полициклических групп свойство $\mathscr{F}$-аппроксимируемости доказано еще в 1952 г. Гиршем в [2]. Почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемость произвольной полициклической группы для каждого простого p установлена А. Л. Шмелькиным [3].

Одним из обобщений понятия полициклической группы является понятие разрешимой группы конечного ранга. Напомним, что группа G называется *группой конечного ранга* (или, в другой терминологии, *группой конечного ранга Прюфера*), если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами. Это понятие введено А. И. Мальцевым в [4].

Для разрешимых групп конечного ранга вопрос о финитной аппроксимируемости решается следующей теоремой Робинсона (см., например, [5, п. 5.3.2]).

Предложение 1. *Почти разрешимая группа конечного ранга $\mathscr{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована.*

Напомним, что группа называется *редуцированной*, если она не содержит неединичных полных подгрупп, т. е. таких неединичных подгрупп, в которых из каждого элемента можно извлечь корень любой натуральной степени. Очевидно, что любая финитно аппроксимируемая группа редуцирована.

Вопрос о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух разрешимых групп конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой решается следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathscr{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H редуцированы.*

Так как любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга почти разрешима [6], частным случаем теоремы 1 является следующий результат из [7].

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение конечно порожденных $\mathscr{F}$-аппроксимируемых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathscr{F}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H финитно отделима в группах A и B.

Непосредственным следствием этого результата является упомянутая выше теорема Баумслага.

Теперь выясним, при каких обстоятельствах свободное произведение двух почти разрешимых групп конечного ранга с нормальным объединением является $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемой группой для подходящего конечного множества π простых чисел. Прежде всего заметим, что для разрешимой группы конечного ранга этот вопрос решается следующим образом.

Предложение 2. *Разрешимая группа конечного ранга $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда она редуцирована и является* FATR*-группой.*

Следуя Робинсону [5, п. 5.1.6], называем разрешимую группу FATR-*группой* (*группой с конечными абелевыми тотальными рангами*), если в ней существует конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого является или циклической группой, или квазициклической группой, или группой, вложимой в аддитивную группу рациональных чисел. Достаточность в предложении 2 установлена Робинсоном (см., например, [5, п. 5.3.8]). Доказательство необходимости приведено ниже.

Возвращаясь к поставленному выше вопросу о $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости свободного произведения двух почти разрешимых групп конечного ранга с нормальным объединением, сформулируем первый основной результат настоящей работы.

Теорема 2. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H редуцированы и являются почти* FATR*-группами.*

Таким образом, в силу предложения 2 видим, что $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемость группы G из теоремы 2 для некоторого конечного множества π простых чисел равносильна $\mathscr{F}_{\pi_1}$-аппроксимируемости групп A, B, A/H и B/H для некоторого конечного множества π_1 простых чисел.

Так как свободное произведение двух конечных p-групп с нормальным объединением не обязано быть $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группой, для фиксированного конечного множества π простых чисел $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемость обобщенного свободного произведения G из теоремы 2 не равносильна $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости групп A, B, A/H и B/H. Однако если вместо свойства $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости рассмотреть свойство почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости, где π — фиксированное конечное множество простых чисел, то удается получить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть π — конечное множество простых чисел и $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Группа G почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда группы A, B, A/H и B/H почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемы.*

Эта теорема существенно обобщает аналогичный результат А. В. Розова [8], который доказан в предположении, что A и B — нильпотентные группы конечного ранга, а множество π состоит из одного простого числа p.

Заметим еще, что теорема 2 является следствием теоремы 3 и предложения 2. Действительно, пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H, причем $A \neq H \neq B$. Предположим сначала, что группы A, B, A/H и B/H редуцированы и являются почти FATR-группами. Тогда по предложению 2 существует конечное множество π простых чисел такое, что группы A, B, A/H и B/H почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемы. Отсюда по теореме 3 следует, что группа G почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема. Поэтому существует конечное множество Π простых чисел, содержащее π и такое, что группа G $\mathscr{F}_\Pi$-аппроксимируема. Таким образом, достаточность в теореме 2 обеспечивается предложением 2 и теоремой 3. Аналогично, применяя сначала теорему 3, а затем предложение 2, можно легко доказать необходимость в теореме 2.

Таким образом, в доказательстве нуждаются только теоремы 1 и 3, а также предложение 2. Доказательство теоремы 3 нетривиально, и ему посвящены разд. 4–6 настоящей работы. Очень простое доказательство теоремы 1 приведено в разд. 2. Разд. 3 посвящен доказательству предложения 2.

Сейчас остановимся на некоторых следствиях из теоремы 3.

Так как по теореме Шмелькина любая полициклическая группа почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для каждого простого числа p, непосредственно из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Свободное произведение двух почти полициклических групп с нормальной объединенной подгруппой почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемо для каждого простого числа p.*

Важным промежуточным классом между классом полициклических групп и классом разрешимых групп конечного ранга является класс разрешимых минимаксных групп. Напомним, что группа называется *минимаксной*, если в ней существует конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет условию минимальности или условию максимальности для подгрупп. Для разрешимой группы это равносильно тому, что в данной группе существует субнормальный ряд, каждый фактор которого является циклической группой или квазициклической группой. Таким образом, любая разрешимая минимаксная группа является FATR-группой. Поэтому любая редуцированная разрешимая минимаксная группа $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел. В действительности имеет место следующее более сильное утверждение: если разрешимая минимаксная группа редуцирована, то она почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p (см., например, [5 , п. 5.3.9]). Поэтому из теорем 1 и 3 вытекает

Следствие 2. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых минимаксных групп A и B с нормальной объединенной подгруппой H. Если группа G финитно аппроксимируема, то она почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.*

Так как любая конечно порожденная финитно аппроксимируемая группа конечного ранга является почти разрешимой минимаксной группой [6], из следствия 2 вытекает

Следствие 3. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение конечно порожденных групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H. Если группа G финитно аппроксимируема, то она почти $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема для всех достаточно больших простых p.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Очевидно, что если группа G финитно аппроксимируема, то группы A и B финитно аппроксимируемы. В [9] Ширвани доказал, что если группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству и $A \neq H \neq B$, то из финитной аппроксимируемости группы G следует финитная отделимость подгруппы H в группах A и B (см. также [10, лемма 2]). В случае, когда H — нормальная подгруппа в группах A и B, ее финитная отделимость в этих группах равносильна финитной аппроксимируемости фактор-групп A/H и B/H. Таким образом, если группы A и B удовлетворяют нетривиальному тождеству, подгруппа H нормальна в A и B и $A \neq H \neq B$, то из финитной аппроксимируемости группы G следует финитная аппроксимируемость фактор-групп A/H и B/H. Это доказывает необходимость в теореме 1, так как любая финитно аппроксимируемая группа редуцирована.

Для доказательства достаточности предположим, что $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H и что группы A, B, A/H и B/H редуцированы. Покажем, что группа G финитно аппроксимируема. Для каждого целого положительного числа n через H^n будем обозначать подгруппу группы H, порожденную n-ми степенями всех ее элементов. Так как H — почти разрешимая редуцированная группа конечного ранга, по предложению 1 она финитно аппроксимируема и, следовательно, $\bigcap\limits_{n \in N} H^n = 1$. Поэтому для доказательства финитной аппроксимируемости группы G достаточно доказать финитную аппроксимируемость фактор-группы G/H^n для каждого n. Заметим, что группа H/H^n является периодической почти разрешимой группой конечного ранга с ограниченными порядками элементов, поэтому она конечна. Фактор-группы A/H^n и B/H^n являются расширениями конечной группы H/H^n с помощью редуцированных групп A/H и B/H, стало быть, группы A/H^n и B/H^n редуцированы. Отсюда по предложению 1 следует, что они финитно аппроксимируемы. Фактор-группа G/H^n представляет собой свободное произведение финитно аппроксимируемых групп A/H^n и B/H^n с конечной объединенной подгруппой H/H^n. Поэтому группа G/H^n финитно аппроксимируема [1].

3. Доказательство предложения 2

Как отмечалось выше, достаточность в предложении 2 доказана Д. Робинсоном. Докажем необходимость. Пусть G — разрешимая группа конечного ранга, $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемая для некоторого конечного множества π простых чисел. Покажем, что она является редуцированной FATR-группой. Так как любая финитно аппроксимируемая группа, очевидно, редуцирована, остается доказать, что группа G является FATR-группой. Будем использовать следующий известный критерий (см. [5, с. 90]).

Разрешимая группа X конечного ранга является FATR-группой тогда и только тогда, когда ее периодический радикал $\tau(X)$ является черниковской группой (т. е. конечной группой или конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп). Напомним, что *периодическим радикалом группы* называется ее наибольшая нормальная периодическая подгруппа. Сформулированный выше критерий для свойства FATR доказан в [5, с. 90] даже в более общей ситуации — когда группа X имеет конечный ранг Гирша, т. е. обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого является циклической или периодической группой.

Теперь доказательство предложения 2 сводится к проверке конечности группы $\tau(G)$, т. е. к доказательству следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть T — периодическая разрешимая группа конечного ранга, являющаяся $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемой для некоторого конечного множества π простых чисел. Тогда группа T конечна.*

Доказательство. Поскольку T — периодическая $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемая группа, она является π-группой.

Пусть $1 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq T_n = T$ — нормальный ряд группы T с абелевыми факторами. Группа $A = T_1$ является абелевой π-группой и раскладывается в прямое произведение примарных компонент, причем их число конечно, так как конечно множество π. Примарные компоненты группы A являются финитно аппроксимируемыми абелевыми p-группами конечного ранга. Покажем, что все они конечны.

Пусть P — p-компонента группы A. Для каждого целого положительного числа k через P_k будем обозначать множество всех элементов a группы P таких, что $a^{p^k} = 1$. Это множество конечно за счет конечности ранга группы P. Поэтому группа P не более чем счетна. Так как P финитно аппроксимируема, в ней нет элементов бесконечной p-высоты, отличных от единицы, т. е. таких неединичных элементов a, из которых в группе A извлекается корень степени p^k для любого целого положительного k. Из последних двух обстоятельств по второй теореме Прюфера вытекает, что группа P раскладывается в прямое произведение циклических p-групп. Отсюда и из конечности ранга группы P следует, что группа P конечна.

Таким образом, все примарные компоненты группы A являются конечными группами. Поскольку число этих примарных компонент также конечно, группа A конечна.

Так как группа T $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема и A — ее конечная нормальная подгруппа, фактор-группа T/A также $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема.

Тем самым T/A — $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемая периодическая разрешимая группа конечного ранга, причем она обладает нормальным рядом с абелевыми факторами длины меньшей n. Поэтому в силу индуктивных соображений группа T/A конечна. Отсюда и из конечности группы A следует конечность группы T.

4. Вспомогательные утверждения

В этом разделе доказаны вспомогательные утверждения, которые требуются для доказательства теоремы 3. Некоторые из них представляют самостоятельный интерес. Так, например, доказанная ниже лемма 4 утверждает, что если разрешимая группа конечного ранга $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, то она почти аппроксимируема конечными нильпотентными π-группами.

Для произвольной группы A через A' будем обозначать коммутант группы A, а через A^n — степенную подгруппу группы A, где n — целое неотрицательное число. Напомним, что подгруппа A^n порождается n-ми степенями всех элементов группы A. Если A — конечная p-группа, то ее подгруппа $A'A^p$, очевидно, совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп группы A.

Лемма 2. *Пусть H — конечная p-группа, Γ — подгруппа в группе всех автоморфизмов группы H. Если все автоморфизмы из Γ действуют тождественно по модулю подгруппы $H'H^p$, то Γ является p-группой.*

Этот результат Ф. Холла хорошо известен (см., например, [11, с. 562]).

Лемма 3. *Пусть G — конечная группа, H — нормальная нильпотентная подгруппа группы G и фактор-группа G/H нильпотентна. Пусть, кроме того, взаимный коммутант $[G, H]$ группы G и подгруппы H содержится в подгруппе $H'H^p$ для каждого простого делителя p порядка группы H. Тогда группа G нильпотентна.*

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда H — p-группа. Обозначим через C централизатор подгруппы H в группе G. Так как $C/C \cap H \cong CH/H \leq G/H$, группа $C/C \cap H$ нильпотентна. Отсюда и из того, что $C \cap H$ — центральная подгруппа группы C, следует, что группа C нильпотентна. Поэтому группа C раскладывается в прямое произведение конечной p-подгруппы P и подгруппы Q, порядок которой взаимно прост с p. Очевидно, что C совпадает с ядром гомоморфизма $\omega : G \to \operatorname{Aut} H$, сопоставляющего каждому элементу g группы G ограничение на H внутреннего автоморфизма группы G, производимого элементом g. Поскольку $[G, H] \subseteq H'H^p$, все автоморфизмы из подгруппы $G\omega$ группы $\operatorname{Aut} H$ действуют тождественно по модулю подгруппы $H'H^p$. Поэтому в силу леммы 2 группа $G\omega$, а значит, и изоморфная ей группа G/C являются p-группами. Отсюда и из того, что $C/Q = (P \times Q)/Q \cong P$ — p-группа, вытекает, что G/Q — p-группа. Так как H — p-подгруппа и порядок подгруппы Q взаимно прост с p, то $Q \cap H = 1$. Стало быть, группа G вложима в прямое произведение $G/Q \times G/H$. Отсюда и из того, что G/Q — конечная p-группа и G/H нильпотентна, следует, что группа G нильпотентна.

Рассмотрим общий случай, когда H — произвольная нормальная нильпотентная подгруппа группы G. Обозначим через π множество всех простых делителей порядка группы H. Для каждого p из π обозначим через Q_p произведение всех примарных компонент группы H, кроме p-компоненты. Тогда H/Q_p — нормальная p-подгруппа группы G/Q_p для каждого $p \in \pi$, фактор-группа $(G/Q_p)/(H/Q_p)$ нильпотентна и $[G/Q_p, H/Q_p] \subseteq (H/Q_p)'(H/Q_p)^p$. Поэтому в силу рассмотренного частного случая группа G/Q_p нильпотентна. Так как $\bigcap\limits_{p \in \pi} Q_p = 1$, группа G вложима в прямое произведение $\prod\limits_{p \in \pi} G/Q_p$. Поскольку в этом прямом произведении все прямые множители G/Q_p нильпотентны, оно само нильпотентно, а значит, и вложимая в него группа G также нильпотентна. Лемма доказана.

Дадим некоторые термины и обозначения. Если H и N — нормальные подгруппы группы G и $N \subseteq H$, то *централизатором фактора H/N в группе G* будем называть множество $C_G(H/N)$ всех элементов группы G, которые перестановочны с каждым элементом из H по модулю подгруппы N.

Замечание 1. Пусть, как и выше, H и N — нормальные подгруппы группы G, $N \subseteq H$, и $C_G(H/N)$ — централизатор фактора H/N в группе G. Очевидно, что взаимный коммутант $[C_G(H/N), H]$ подгрупп $C_G(H/N)$ и H содержится в N. Очевидно также, что $C_G(H/N)$ совпадает с ядром гомоморфизма $\omega : G \to \operatorname{Aut} H/N$, сопоставляющего каждому элементу a из G ограничение на H/N внутреннего автоморфизма группы G/N, производимого элементом aN. В дальнейшем в качестве подгруппы N, как правило, будем рассматривать подгруппу $H'H^p$, где H' — коммутант группы H, H^p — степенная подгруппа, p — простое число. В этом случае $H/H'H^p$ — абелева группа, поэтому подгруппа $C_G(H/H'H^p)$ содержит H. Если вдобавок предположить, что подгруппа H имеет конечный ранг, то, как легко видеть, группа $H/H'H^p$ конечна, а значит, группа $\operatorname{Aut}(H/H'H^p)$ также конечна, тем самым $C_G(H/H'H^p)$ имеет конечный индекс в G. Таким образом, если подгруппа H имеет конечный ранг, то $C_G(H/H'H^p)$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G, содержащей H.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Группу G будем называть *π-примарно аппроксимируемой* (термин недавно предложен Д. И. Молдаванским), если она аппроксимируема классом $\mathscr{K} = \bigcup\limits_{p\in\pi} \mathscr{F}_p$. Это равносильно тому, что группа G аппроксимируема конечными нильпотентными π-группами.

Лемма 4. *Пусть G — разрешимая группа конечного ранга, являющаяся $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемой для некоторого конечного множества π простых чисел. Тогда группа G почти π-примарно аппроксимируема.*

Доказательство. В силу известной теоремы Грюнберга — Мальцева (см., например, [5, п. 5.2.2]) в любой разрешимой FATR-группе подгруппа Фиттинга нильпотентна, а фактор-группа по ней почти абелева. Напомним, что *подгруппой Фиттинга* данной группы называется произведение всех ее нормальных нильпотентных подгрупп.

Так как рассматриваемая группа G $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема для некоторого конечного множества π простых чисел, по предложению 2 она является FATR-группой. Поэтому в силу сформулированной выше теоремы Грюнберга — Мальцева подгруппа Фиттинга $F = \operatorname{Fit} G$ группы G нильпотентна, а фактор-группа G/F содержит абелеву подгруппу A/F конечного индекса. Обозначим через P пересечение подгруппы A и подгрупп $C_G(F/F'F^p)$ по всем $p \in \pi$. В силу замечания 1 очевидно, что P — подгруппа конечного индекса группы G, содержащая F, P/F — абелева группа и для всех $p \in \pi$ имеет место включение $[P, F] \subseteq F'F^p$. Поскольку P — подгруппа конечного индекса группы G, для доказательства леммы достаточно доказать, что группа P π-примарно аппроксимируема. Пусть φ — гомоморфизм группы P на какую-нибудь конечную π-группу. Тогда $F\varphi$ — нормальная нильпотентная подгруппа группы $P\varphi$, $P\varphi/F\varphi$ — абелева группа и для всех $p \in \pi$ имеет место включение $[P\varphi, F\varphi] \subseteq (F\varphi)'(F\varphi)^p$. Отсюда по лемме 3 следует, что группа $P\varphi$ нильпотентна. Таким образом, любая конечная π-группа, являющаяся гомоморфным образом группы P, нильпотентна. Отсюда и из того, что группа P аппроксимируема конечными π-группами, вытекает, что она аппроксимируема конечными нильпотентными π-группами, т. е. π-примарно аппроксимируема. Поэтому группа G почти π-примарно аппроксимируема.

Лемма 5. *Пусть G — почти разрешимая группа конечного ранга, H — нормальная подгруппа группы G и фактор-группа G/H является редуцированной почти FATR-группой. Пусть p — простое число. Тогда в группе G существует нормальная подгруппа S конечного индекса, содержащая H и такая, что для* *любого целого положительного числа k в группе S существует подгруппа M конечного p-индекса, нормальная в G и такая, что $M \cap H = H^{p^k}$.*

Доказательство. Покажем сначала, что в группе G существует нормальный ряд $1 \leq H \leq F \leq S \leq G$, удовлетворяющий следующим условиям: F/H — нильпотентная группа, S/F — абелева группа, G/S — конечная группа, $[F, H] \subseteq H'H^p$ и $[S, F] \subseteq F'F^p$.

По условию леммы в группе G/H существует разрешимая FATR-подгруппа G_0/H конечного индекса, и без потери общности можно считать, что она нормальна в G/H. По уже упомянутой выше теореме Грюнберга — Мальцева [5, п. 5.2.2] подгруппа Фиттинга $F_0/H = \mathrm{Fit}(G_0/H)$ нильпотентна, а фактор-группа G_0/F_0 почти абелева. Так как F_0/H характеристична в G_0/H и G_0/H нормальна в G/H, то F_0 нормальна в G. Поскольку группа G/G_0 конечна, а G_0/F_0 почти абелева, группа G/F_0 почти абелева.

Пусть $U = C_G(H/H'H^p)$ — централизатор фактора $H/H'H^p$ в группе G. По замечанию 1 U — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая H, и $[U, H] \subseteq H'H^p$.

Пусть $F = F_0 \cap U$. Поскольку F_0 и U — нормальные подгруппы группы G, содержащие H, то F — нормальная подгруппа группы G, содержащая H. Фактор-группа F/H содержится в нильпотентной группе F_0/H, тем самым F/H нильпотентна. Так как $[U, H] \subseteq H'H^p$ и $F \subseteq U$, то $[F, H] \subseteq H'H^p$.

Поскольку G/F_0 почти абелева и G/U конечна, G/F почти абелева. Поэтому в ней существует нормальная абелева подгруппа S_0/F конечного индекса. Тогда S_0 — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая F.

Пусть $V = C_G(F/F'F^p)$ — централизатор фактора $F/F'F^p$ в группе G. По замечанию 1 V — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая F, и $[V, F] \subseteq F'F^p$.

Пусть $S = S_0 \cap V$. Тогда S — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая F. Фактор-группа S/F содержится в абелевой группе S_0/F, поэтому она абелева. Так как $[V, F] \subseteq F'F^p$ и $S \subseteq V$, то $[S, F] \subseteq F'F^p$.

Таким образом, в группе G построен нормальный ряд $1 \leq H \leq F \leq S \leq G$, удовлетворяющий следующим условиям: F/H — нильпотентная группа, S/F — абелева группа, G/S — конечная группа, $[F, H] \subseteq H'H^p$ и $[S, F] \subseteq F'F^p$.

Покажем, что подгруппа S искомая. Поскольку S — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая H, остается проверить, что для любого целого положительного числа k в группе S существует подгруппа M конечного p-индекса, нормальная в G и такая, что $M \cap H = H^{p^k}$.

Фактор-группа G/H^{p^k} представляет собой расширение конечной группы H/H^{p^k} с помощью редуцированной группы G/H. Тем самым группа G/H^{p^k} редуцирована и в силу предложения 1 финитно аппроксимируема. Следовательно, существует гомоморфизм φ_1 группы G/H^{p^k} на конечную группу, инъективный на подгруппе H/H^{p^k}. Пусть $\varepsilon : G \to G/H^{p^k}$ — естественный гомоморфизм. Введем следующие обозначения: $G_1 = G\varepsilon\varphi_1$, $H_1 = H\varepsilon\varphi_1$, $F_1 = F\varepsilon\varphi_1$, $S_1 = S\varepsilon\varphi_1$. Заметим, что группа G_1 конечна.

Описанные выше свойства ряда $1 \leq H \leq F \leq S \leq G$ очевидным образом переносятся на ряд $1 \leq H_1 \leq F_1 \leq S_1 \leq G_1$. Поэтому $1 \leq H_1 \leq F_1 \leq S_1 \leq G_1$ — нормальный ряд конечной группы G_1, удовлетворяющий следующим условиям: H_1 — p-группа, F_1/H_1 — нильпотентная группа, S_1/F_1 — абелева группа, $[F_1, H_1] \subseteq H_1'H_1^p$ и $[S_1, F_1] \subseteq F_1'F_1^p$.

Так как H_1 — p-группа, F_1/H_1 — нильпотентная группа и при этом $[F_1, H_1] \subseteq H_1' H_1^p$, по лемме 3 F_1 — нильпотентная группа. Обозначим через Q_1 произведение всех примарных компонент группы F_1, кроме p-компоненты. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varphi_2 : G_1 \to G_1/Q_1$. Поскольку $H_1 \cap Q_1 = 1$, гомоморфизм φ_2 инъективен на H_1. Введем следующие обозначения: $G_2 = G_1\varphi_2$, $H_2 = H_1\varphi_2$, $F_2 = F_1\varphi_2$, $S_2 = S_1\varphi_2$. Тогда в группе G_2 получаем нормальный ряд $1 \leq H_2 \leq F_2 \leq S_2 \leq G_2$, удовлетворяющий следующим условиям: F_2 — p-группа, S_2/F_2 — абелева группа и $[S_2, F_2] \subseteq F_2' F_2^p$. Поэтому в силу леммы 3 S_2 — нильпотентная группа. Обозначим через Q_2 произведение всех примарных компонент группы S_2, кроме p-компоненты. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varphi_3 : G_2 \to G_2/Q_2$. Так как $F_2 \cap Q_2 = 1$, гомоморфизм φ_3 инъективен на F_2, а значит, и на H_2. Введем следующие обозначения: $G_3 = G_2\varphi_3$, $S_3 = S_2\varphi_3$. Заметим, что S_3 — конечная p-группа.

Обозначим через φ произведение гомоморфизмов φ_1, φ_2 и φ_3. Поскольку гомоморфизмы φ_1, φ_2 и φ_3 инъективны на подгруппах $H\varepsilon = H/H^{p^k}$, H_1 и H_2, то φ инъективен на подгруппе $H\varepsilon = H/H^{p^k}$. Поэтому $\operatorname{Ker} \varepsilon\varphi \cap H = H^{p^k}$.

Пусть $M = S \cap \operatorname{Ker} \varepsilon\varphi$. Тогда $M \cap H = S \cap \operatorname{Ker} \varepsilon\varphi \cap H = \operatorname{Ker} \varepsilon\varphi \cap H = H^{p^k}$ и $S/M = S/S \cap \operatorname{Ker} \varepsilon\varphi \cong S\varepsilon\varphi = S_3$ — конечная p-группа. Таким образом, M — подгруппа конечного p-индекса группы S, нормальная в G, и $M \cap H = H^{p^k}$. Лемма доказана.

Напомним, что группа G называется *расщепляемым расширением группы A с помощью группы B*, если A — нормальная подгруппа группы G, B — подгруппа группы G, $A \cap B = 1$ и $G = AB$.

Лемма 6. *Пусть G — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B. Если A — конечная p-группа, группа B $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема и взаимный коммутант $[B, A]$ подгрупп B и A содержится в подгруппе $A'A^p$, то группа G $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.*

Это утверждение доказано в [10, предложение 4]. В основе его доказательства лежит лемма 2.

Лемма 7. *Пусть G — почти разрешимая группа конечного ранга и H — конечная нормальная подгруппа группы G.*

1. *Если группа G/H финитно аппроксимируема, то и группа G финитно аппроксимируема.*

2. *Если для некоторого множества π простых чисел группа G/H почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема, то и группа G почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема.*

Доказательство. Пусть группа G/H финитно аппроксимируема. Так как любая финитно аппроксимируемая группа редуцирована, G/H редуцирована. Отсюда и из конечности группы H следует, что группа G редуцирована. Тогда по предложению 1 она финитно аппроксимируема.

Предположим, что группа G/H почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема. Тогда она финитно аппроксимируема, поэтому в силу утверждения 1 леммы группа G финитно аппроксимируема. Отсюда и из того, что H — конечная подгруппа группы G, вытекает, что в G найдется подгруппа X конечного индекса, тривиально пересекающая H. Тогда X вложима в почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемую группу G/H, значит, X сама почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что X имеет конечный индекс в G, следует, что G почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема.

5. Доказательство достаточности в теореме 3

Пусть π — конечное множество простых чисел, и пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение почти разрешимых групп A и B конечного ранга с нормальной объединенной подгруппой H. Далее будем предполагать, что группы A, B, A/H и B/H почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемы. Покажем, что группа G почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема.

Так как H — почти разрешимая и почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемая группа конечного ранга, по лемме 4 она почти π-примарно аппроксимируема, т. е. в ней существует нормальная π-примарно аппроксимируемая подгруппа конечного индекса r. Пусть $H_1 = H^r$. Тогда H_1 — π-примарно аппроксимируемая подгруппа конечного индекса группы H, нормальная в G.

На первом этапе доказательства покажем, что в группах A и B существуют подгруппы S и T, удовлетворяющие следующим условиям.

1°. S и T — нормальные подгруппы конечных индексов групп A и B соответственно, и $S \cap H = H_1 = T \cap H$.

2°. Группы S/H_1 и T/H_1 $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемы.

3°. Для любого $p \in \pi$ и любого целого $k \geq 0$ в группах S и T существуют подгруппы M и N конечных p-индексов, нормальные в A и B соответственно и такие, что $M \cap H = H_1^{p^k}$ и $N \cap H = H_1^{p^k}$.

Докажем, что в группе A существует подгруппа S со свойствами 1°–3°.

Так как группа A/H_1 почти разрешима, имеет конечный ранг и является расширением конечной группы H/H_1 с помощью почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемой группы A/H, по лемме 7 группа A/H_1 почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема. Отсюда и из того, что ее подгруппа H/H_1 конечна, следует, что в группе A/H_1 существует нормальная $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемая подгруппа S_1/H_1 конечного индекса, тривиально пересекающая H/H_1. Тогда S_1 — нормальная подгруппа конечного индекса группы A и $S_1 \cap H = H_1$.

Поскольку A/H_1 является почти разрешимой группой конечного ранга и A/H_1 почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема для конечного множества π простых чисел, по предложению 2 A/H_1 является почти FATR-группой, причем, как и любая финитно аппроксимируемая группа, она редуцирована. Поэтому в силу леммы 5 для каждого простого p в группе A существует нормальная подгруппа S_p конечного индекса, содержащая H_1 и такая, что для любого целого положительного числа k в группе S_p существует подгруппа L конечного p-индекса, нормальная в A и такая, что $L \cap H_1 = H_1^{p^k}$.

Пусть S — пересечение подгруппы S_1 с подгруппами S_p по всем $p \in \pi$. Тогда S — нормальная подгруппа конечного индекса группы A. Так как $S_1 \cap H = H_1$ и все подгруппы S_p содержат H_1, то $S \cap H = H_1$. Таким образом, для подгруппы S выполняется условие 1°. Условие 2° для подгруппы S также выполняется. Действительно, группа S/H_1 содержится в $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемой группе S_1/H_1 и поэтому $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема. Для проверки условия 3° зафиксируем целое число $k \geq 0$ и простое число $p \in \pi$. По определению группы S_p в ней существует подгруппа L конечного p-индекса, нормальная в A и такая, что $L \cap H_1 = H_1^{p^k}$. Пусть $M = L \cap S$. Очевидно, что M нормальна в A. Поскольку S_p/L — конечная p-группа и $S/M \cong SL/L \leq S_p/L$, то M имеет конечный p-индекс в S. Так как $S \cap H = H_1$ и $L \cap H_1 = H_1^{p^k}$, то $M \cap H = H_1^{p^k}$. Таким образом, условие 3° для подгруппы S выполняется.

Аналогично доказывается, что в группе B существует подгруппа T со свойствами 1°–3°. В дальнейшем доказательстве подгруппы S и T со свойствами 1°–3° считаются фиксированными.

Так как $S \cap H = T \cap H$ в силу условия 1°, отображение $HS/S \to HT/T$, определенное по правилу $hS \to hT$, где $h \in H$, является изоморфизмом, поэтому можно рассмотреть соответствующее ему свободное произведение $G_{ST} = (A/S * B/T; H_{ST})$ групп A/S и B/T с объединенной подгруппой $H_{ST} = HS/S = HT/T$. Рассмотрим еще гомоморфизм $\rho_{ST} : G \to G_{ST}$, продолжающий естественные гомоморфизмы $A \to A/S$ и $B \to B/T$.

Известно, что свободное произведение двух конечных групп с объединенной подгруппой финитно аппроксимируемо [1]. Поскольку в силу условия 1° группы A/S и B/T конечны, группа G_{ST} финитно аппроксимируема, тем самым существует гомоморфизм τ группы G_{ST} на конечную группу, инъективный на A/S и B/T. Пусть $U = \operatorname{Ker} \rho_{ST}\tau$. Тогда U — нормальная подгруппа конечного индекса группы G. Так как ρ_{ST} продолжает естественные гомоморфизмы $A \to A/S$ и $B \to B/T$ и τ инъективен на A/S и B/T, то $U \cap A = S$ и $U \cap B = T$. Отсюда и из того, что в силу условия 1° $S \cap H = H_1$, получаем $U \cap H = U \cap A \cap H = S \cap H = H_1$. Таким образом,

$$U \cap A = S, \quad U \cap B = T, \quad U \cap H = H_1. \tag{1}$$

Пусть p — простое число, $V_p = C_G\big(H_1/H_1'H_1^p\big)$ — централизатор фактора $H_1/H_1'H_1^p$ в группе G. Тогда в силу замечания 1 V_p — нормальная подгруппа группы G, содержащая H_1, и $[V_p, H_1] \subseteq H_1'H_1^p$. Так как ранг группы H_1 конечен, по замечанию 1 V_p имеет конечный индекс в G. Пусть $V = \bigcap\limits_{p\in\pi} V_p$. Тогда V — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая H_1, и $[V, H_1] \subseteq H_1'H_1^p$ для каждого $p \in \pi$.

Пусть $W = U \cap V$. Тогда W — нормальная подгруппа конечного индекса группы G, содержащая H_1. Для доказательства почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G достаточно доказать $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемость группы W. Для этого возьмем неединичный элемент w из W и построим для него гомоморфизм группы W на конечную π-группу, при котором образ элемента w отличен от 1. Ясно, что достаточно указать гомоморфизм группы W на $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемую группу, отображающий w в неединичный элемент.

Сначала рассмотрим случай, когда $w \notin H_1$. Пусть $\varepsilon : G \to G/H_1$ — естественный гомоморфизм. Заметим, что $G/H_1 = (A/H_1 * B/H_1; H/H_1)$ — свободное произведение групп A/H_1 и B/H_1 с объединенной подгруппой H/H_1. Так как $H_1 \subseteq U$, из (1) следует, что

$$U/H_1 \cap A/H_1 = S/H_1, \quad U/H_1 \cap B/H_1 = T/H_1, \quad U/H_1 \cap H/H_1 = 1.$$

Отсюда и из того, что подгруппа U/H_1 нормальна в группе G/H_1, вытекает, что она пересекается тривиально со всеми подгруппами группы G/H_1, сопряженными с объединенной подгруппой H/H_1. Поэтому в силу теоремы Х. Нейман [12, с. 122] подгруппа U/H_1 раскладывается в свободное произведение некоторой свободной группы и некоторого семейства подгрупп группы G/H_1, сопряженных с S/H_1 и T/H_1. Так как по условию 2° группы S/H_1 и T/H_1 $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемы и свободная группа $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема, группа U/H_1 раскладывается в свободное произведение некоторого семейства $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемых групп. Известно, что такое свободное произведение само $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемо [13, разд. 6.5]. Следовательно, группа U/H_1, а значит, и ее подгруппа W/H_1 $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемы. Так как $w \notin H_1$, естественный гомоморфизм $W \to W/H_1$ будет искомым, т. е. он отображает группу W на $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемую группу W/H_1 и переводит w в неединичный элемент.

Рассмотрим случай, когда $w \in H_1$. Поскольку H_1 π-примарно аппроксимируема, найдутся простое число $p \in \pi$ и целое положительное число k такие, что $w \notin H_1^{p^k}$. До конца доказательства числа p и k считаются фиксированными. Так как подгруппы S и T удовлетворяют условию 3°, в них существуют подгруппы M и N конечных p-индексов, нормальные в A и B соответственно и такие, что $M \cap H = H_1^{p^k} = N \cap H$. Заметим, что $w \notin M$ и $w \notin N$.

Поскольку $M \cap H = N \cap H$, отображение $HM/M \to HN/N$, определенное по правилу $hM \to hN$, где $h \in H$, является изоморфизмом. Поэтому можно рассмотреть соответствующее свободное произведение $G_{MN} = (A/M * B/N; H_{MN})$ групп A/M и B/N с объединенной подгруппой $H_{MN} = HM/M = HN/N$ и гомоморфизм $\rho_{MN} : G \to G_{MN}$, продолжающий естественные отображения $A \to A/M$ и $B \to B/N$. Введем следующие обозначения: $G_{MN} = \overline{G}$, $A\rho_{MN} = A/M = \overline{A}$, $B\rho_{MN} = B/N = \overline{B}$, $H\rho_{MN} = \overline{H}$, $H_1\rho_{MN} = \overline{H}_1$, $S\rho_{MN} = S/M = \overline{S}$, $T\rho_{MN} = T/N = \overline{T}$, $U\rho_{MN} = \overline{U}$, $W\rho_{MN} = \overline{W}$, $w\rho_{MN} = \overline{w}$. Тогда $\overline{G} = (\overline{A} * \overline{B}; \overline{H})$. Так как $w \notin M$, то $\overline{w} \neq 1$.

Поскольку гомоморфизм ρ_{MN} отображает группу W на группу $\overline{W}$ и переводит элемент w в неединичный элемент $\overline{w}$, для завершения доказательства остается только проверить, что группа $\overline{W}$ $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема. В действительности будет доказано даже более сильное утверждение: группа $\overline{W}$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.

Заметим, что группы $\overline{S} = S/M$ и $\overline{T} = T/N$, а также их подгруппа $\overline{H_1}$ являются конечными p-группами. Заметим еще, что группы $\overline{A} = A/M$ и $\overline{B} = B/N$ конечны, тем самым группа $\overline{G}$ конечно порождена.

Очевидно, что $\operatorname{Ker}\rho_{MN} \leq \operatorname{Ker}\rho_{ST} \leq U$. Поэтому из (1) получаем

$$\overline{U} \cap \overline{A} = \overline{S}, \quad \overline{U} \cap \overline{B} = \overline{T}, \quad \overline{U} \cap \overline{H} = \overline{H}_1. \tag{2}$$

Рассмотрим фактор-группу $\overline{G}/\overline{H}_1 = (\overline{A}/\overline{H}_1 * \overline{B}/\overline{H}_1; \overline{H}/\overline{H}_1)$. Так как $\overline{H}_1 \subseteq \overline{U}$, из (2) следует, что

$$\overline{U}/\overline{H}_1 \cap \overline{A}/\overline{H}_1 = \overline{S}/\overline{H}_1, \quad \overline{U}/\overline{H}_1 \cap \overline{B}/\overline{H}_1 = \overline{T}/\overline{H}_1, \quad \overline{U}/\overline{H}_1 \cap \overline{H}/\overline{H}_1 = 1.$$

Следовательно, по теореме Х. Нейман нормальная подгруппа $\overline{U}/\overline{H}_1$ группы $\overline{G}/\overline{H}_1$ раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы и семейства подгрупп группы $\overline{G}/\overline{H}_1$, сопряженных с $\overline{S}/\overline{H}_1$ и $\overline{T}/\overline{H}_1$. Заметим, что все эти сопряжения являются конечными p-группами, так как $\overline{S}$ и $\overline{T}$ — конечные p-группы. В силу известной теоремы Куроша подгруппа $\overline{W}/\overline{H}_1$ имеет такую же структуру, как и $\overline{U}/\overline{H}_1$, т. е. $\overline{W}/\overline{H}_1$ раскладывается в свободное произведение вида $\overline{W}/\overline{H}_1 = F * P_1 * P_2 * \cdots * P_m$, где F — свободная группа, а все P_i — конечные p-группы. Заметим, что число свободных сомножителей в этом разложении конечно, так как группа $\overline{W}$ конечно порождена как подгруппа конечного индекса в конечно порожденной группе $\overline{G}$. Рассмотрим гомоморфизм группы $\overline{W}/\overline{H}_1$ на прямое произведение $P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_m$, продолжающий отображение $F \to 1$ и тождественные отображения $P_i \to P_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Его ядро $\overline{K}/\overline{H}_1$ является свободной нормальной подгруппой конечного p-индекса группы $\overline{W}/\overline{H}_1$. Получаем, таким образом, субнормальный ряд $1 \leq \overline{H}_1 \leq \overline{K} \leq \overline{W}$, где $\overline{H}_1$ — конечная p-группа, $\overline{K}/\overline{H}_1$ — свободная группа и $\overline{W}/\overline{K}$ — конечная p-группа.

Известно [14] и легко проверяется, что любое расширение $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группы с помощью конечной p-группы является $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой группой. Так как $\overline{W}$ — расширение группы $\overline{K}$ с помощью конечной p-группы $\overline{W}/\overline{K}$, доказательство $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости группы $\overline{W}$ сводится к доказательству $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемости группы $\overline{K}$.

Группа $\overline{K}$ представляет собой расширение конечной p-группы $\overline{H}_1$ с помощью свободной группы. Известно и легко проверяется, что любое расширение с помощью свободной группы расщепляемо. Поэтому существует свободная подгруппа $\overline{F}$ группы $\overline{K}$ такая, что группа $\overline{K}$ является расщепляемым расширением группы $\overline{H}_1$ с помощью $\overline{F}$. Так как $W \subseteq V$ и по построению подгруппы V имеет место включение $[V, H_1] \subseteq H_1' H_1^p$, то $[W, H_1] \subseteq H_1' H_1^p$, поэтому $[\overline{W}, \overline{H}_1] \subseteq \overline{H}_1' \overline{H}_1^p$. Отсюда и из того, что $\overline{F} \leq \overline{K} \leq \overline{W}$, следует, что $[\overline{F}, \overline{H}_1] \subseteq \overline{H}_1' \overline{H}_1^p$. Таким образом, $\overline{K}$ — расщепляемое расширение конечной p-группы $\overline{H}_1$ с помощью свободной (и потому $\mathscr{F}_p$-аппроксимируемой) группы $\overline{F}$, и $[\overline{F}, \overline{H}_1] \subseteq \overline{H}_1' \overline{H}_1^p$. Стало быть, в силу леммы 6 группа $\overline{K}$ $\mathscr{F}_p$-аппроксимируема.

6. Доказательство необходимости в теореме 3

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Напомним, что подгруппа H группы G называется *$\mathscr{F}_\pi$-отделимой*, если для каждого элемента g группы G, не принадлежащего подгруппе H, существует гомоморфизм группы G на конечную π-группу, при котором образ элемента g не принадлежит образу подгруппы H. Для нормальной подгруппы H это свойство равносильно $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости фактор-группы G/H.

Необходимость в теореме 3 обеспечивается следующей леммой.

Лемма 8. *Пусть $G = (A * B, H)$ — свободное произведение групп A и B, удовлетворяющих нетривиальным тождествам, с нормальной объединенной подгруппой H, причем $H \neq A$ и $H \neq B$. Пусть, кроме того, группа G почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема, где π — некоторое множество простых чисел. Тогда группа G/H (а следовательно, и ее подгруппы A/H и B/H) почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемы.*

Доказательство. Заметим, что группа G/H представляет собой свободное произведение групп A/H и B/H. Поэтому если A/H и B/H — группы порядка 2, то G/H — бесконечная диэдральная группа и, следовательно, она почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема. Можно предполагать, что порядок хотя бы одной из групп A/H или B/H больше 2. Пусть для определенности порядок группы A/H больше 2. В группе G зафиксируем какой-нибудь элемент g, не лежащий в A. Тогда $A \cap g^{-1}Ag = H$.

По условию группа G почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируема, т. е. содержит $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемую подгруппу P конечного индекса. Без потери общности можно считать, что подгруппа P нормальна в G. Так как PH/H — подгруппа конечного индекса группы G/H, для доказательства почти $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости группы G/H достаточно доказать $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемость группы $PH/H \cong P/P \cap H$, т. е. $\mathscr{F}_\pi$-отделимость подгруппы $P \cap H$ в группе P. Поскольку $P \cap H = (P \cap A) \cap (P \cap g^{-1}Ag)$, для проверки $\mathscr{F}_\pi$-отделимости подгруппы $P \cap H$ в группе P достаточно показать $\mathscr{F}_\pi$-отделимость подгрупп $P \cap A$ и $P \cap g^{-1}Ag$ в группе P.

По условию группа A удовлетворяет нетривиальному тождеству

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1.$$

Покажем, что она максимальна среди всех подгрупп группы G с этим тождеством. Допустим, напротив, что A строго содержится в подгруппе C группы G с тождеством $f = 1$. Введем обозначения: $\overline{G} = G/H$, $\overline{A} = A/H$, $\overline{B} = B/H$, $\overline{C} = C/H$. Тогда $\overline{G}$ — свободное произведение групп $\overline{A}$ и $\overline{B}$, подгруппа $\overline{C}$ строго содержит $\overline{A}$ и удовлетворяет тождеству $f = 1$. Зафиксируем в подгруппе $\overline{C}$ элемент $\bar{c}$, не лежащий в $\overline{A}$. Рассмотрим в группе $\overline{G}$ подгруппу $\overline{D}$, порожденную подгруппами $\overline{A}$ и $\bar{c}^{-1}\overline{A}\bar{c}$. Тогда, с одной стороны, подгруппа $\overline{D}$ удовлетворяет тождеству $f = 1$, а с другой стороны, она содержит нециклическую свободную подгруппу, так как является свободным произведением подгрупп $\overline{A}$ и $\bar{c}^{-1}\overline{A}\bar{c}$, порядки которых больше 2; противоречие.

Таким образом, подгруппа A максимальна среди всех подгрупп группы G с тождеством $f = 1$. Тем же свойством обладает и сопряженная к ней подгруппа $g^{-1}Ag$. Используя эти свойства подгрупп A и $g^{-1}Ag$, докажем $\mathscr{F}_\pi$-отделимость подгрупп $P \cap A$ и $P \cap g^{-1}Ag$ в группе P.

Докажем $\mathscr{F}_\pi$-отделимость подгруппы $P \cap A$ в группе P. Пусть u — элемент группы P, не принадлежащий подгруппе $P \cap A$. Так как A — максимальная среди всех подгрупп группы G с тождеством $f = 1$ и $u \notin A$, подгруппа L группы G, порожденная подгруппой A и элементом u, не удовлетворяет тождеству $f = 1$. Поэтому найдутся элементы $l_1, l_2, \ldots, l_n$ из L такие, что элемент $l = f(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ отличен от 1. Так как $u \in P$, то $L \leq AP$, поэтому $LP/P \leq AP/P$. Отсюда и из того, что группа AP/P удовлетворяет тождеству $f = 1$, вытекает, что и группа LP/P удовлетворяет этому тождеству. Поэтому $f(l_1P, l_2P, \ldots, l_nP) = 1$, т. е. $l \in P$. Отсюда и из $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости группы P следует, что в группе P существует нормальная подгруппа M конечного π-индекса, не содержащая элемента l. Поскольку M имеет конечный индекс в группе G, число всех подгрупп группы G, сопряженных с M, конечно, причем все эти сопряжения являются нормальными подгруппами группы P и имеют в группе P конечный π-индекс, совпадающий с $[P : M]$. Поэтому пересечение N всех подгрупп группы G, сопряженных с M, является подгруппой конечного π-индекса группы P, причем подгруппа N нормальна в G. Заметим, что $l \notin N$ и поэтому $f(l_1N, l_2N, \ldots, l_nN) \neq 1$. Таким образом, в группе LN/N тождество $f = 1$ не выполняется. Отсюда и из того, что группа AN/N удовлетворяет тождеству $f = 1$, получаем $LN/N \neq AN/N$. Учитывая к тому же, что подгруппа LN/N порождается подгруппой AN/N и элементом uN, заключаем, что $uN \notin AN/N$ и, в частности, $uN \notin (A \cap P)N/N$. Таким образом, при естественном гомоморфизме группы P на конечную π-группу P/N образ uN элемента u не принадлежит образу $(A \cap P)N/N$ подгруппы $A \cap P$, поэтому подгруппа $A \cap P$ $\mathscr{F}_\pi$-отделима в группе P.

Аналогично, используя тот факт, что $g^{-1}Ag$ максимальна среди всех подгрупп группы G с тождеством $f = 1$, можно доказать $\mathscr{F}_\pi$-отделимость подгруппы $P \cap g^{-1}Ag$ в группе P. Это завершает доказательство леммы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
2. *Hirsh K. A.* On infinite soluble groups // J. London Math. Soc. 1952. V. 27. P. 81–85.
3. *Шмелькин А. Л.* Полициклические группы // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 1. С. 234–235.
4. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 351–352.
5. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford: Clarendon press, 2004.
6. *Lubotzky A., Mann A.* Residually finite groups of finite rank // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1989. V. 106, N 3. P. 185–188.

7. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 485–497.
8. *Розов А. В.* Некоторые аппроксимационные свойства свободных произведений разрешимых групп конечного ранга с нормальными объединенными подгруппами // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, № 1. С. 130–142.
9. *Shirvani M.* A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 104, N 3. P. 703–706.
10. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости HNN-расширений и обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1203–1215.
11. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.
12. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
13. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
14. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.

Статья поступила 27 марта 2014 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский гос. университет,
ул. Ермака, 37, Иваново 153025
azarovdn@mail.ru